

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Введение

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работе [2] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри пор.

В работе [3] разработана локальная осесимметричная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе развита локальная существенно неосесимметричная модель напряженно-деформированного состояния пористого материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Поры имеют сферическую форму. Рассматривается случай параллельного расположения пор в упругом пространстве, которое находится под действием одноосного и двухосного растяжения.

Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство Ω с двумя непересекающимися сферическими полостями, сдвинутыми друг относительно друга на a вдоль оси ρ , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам пор O_j , $i = 1, 2$.

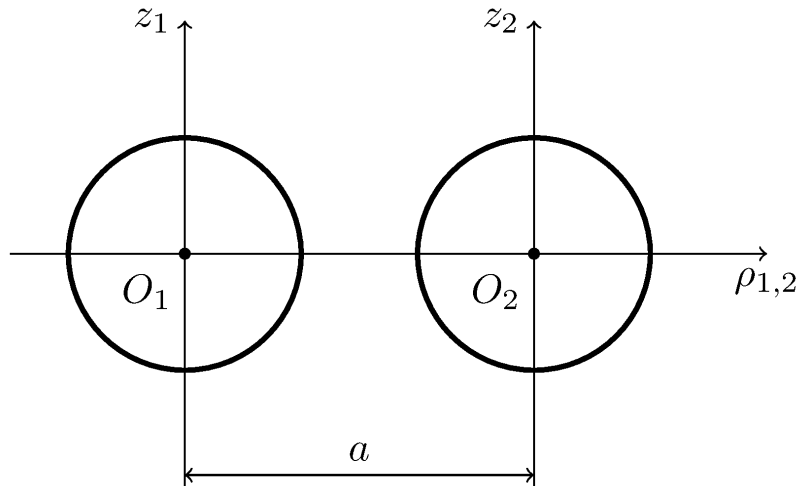


Рисунок 1 - Схематическое представление задачи

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двухосное растяжение), а границы полостей свободны от усилий.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_1} = \mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_2} = 0 \quad (2)$$

и указанными выше условиями на бесконечности. Здесь \mathbf{U} - вектор перемещений; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ - отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ - коэффициент Пуассона.

Решение задачи

Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j),$$

где $A_{s,n,m}^{(j)}$ - неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T \sigma \rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (5)$$

где T - усилие на бесконечности; G - модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ - орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сферы [4]:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \nabla u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \left[z_j \nabla + (4\sigma - 3) \mathbf{e}_z \right] u_{n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) - \frac{R_j^2}{2(n \pm 1) + 1} \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = i \text{rot} \left[u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_z \right]; \quad (8)$$

$$u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = (n-m)! \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi};$$

$$u_{n,m}^{- (4)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{(n+m)!} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ - функция Лежандра 1-го рода, символам «+» («-») в вектор-функциях (6) - (8) отвечают внешние (внутренние) решения для шара.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \text{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (9)$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфероидов. Для решений (6) - (8) справедливы следующие теоремы сложения [5]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l+1} f_{nm}^{(44)kl} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+l} \left\{ f_{nm}^{(44)kl} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{R_2^2}{2k+3} + \frac{R_1^2}{2n+3} \right) f_{nm}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{nm}^{(44)k+1,l} \right] \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \right\}; \quad (11) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+l+1} f_{nm}^{(44)kl} \mathbf{U}_{s,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+l} \left\{ f_{nm}^{(44)kl} \mathbf{U}_{2,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{R_1^2}{2k+3} + \frac{R_2^2}{2n+3} \right) f_{nm}^{(44)k+2,l} - z_{12} f_{nm}^{(44)k+1,l} \right] \mathbf{U}_{1,k,l}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right\}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$f_{nm}^{(44)kl} = u_{n+k, m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}).$$

Для расположения полостей, представленного на рис. 1, $z_{12} = 0$, $\theta_{12} = \pi / 2$, $r_{12} = a$ и для сдвига вдоль оси X $\varphi_{12} = 0$.

Разрешающая система уравнений

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ получаем краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_i} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_i}$.

Используя теоремы сложения (10) - (13), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_1 :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ A_{s,n,m}^{(1)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \times \right. \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+s} A_{s,k,l}^{(2)} f_{kl}^{(44)nm} + \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(4)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \delta_{s2} \times \\ & \left. \times (-1)^{k+m} \left[\left(\frac{R_1^2}{2n+3} + \frac{R_2^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] A_{s,n,m}^{(2)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

и с началом в точке O_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ \mathbf{A}_{s,n,m}^{(2)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \times \right. \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+s} \mathbf{A}_{s,k,l}^{(1)} f_{kl}^{(44)nm} + \mathbf{U}_{1,n,m}^{-(4)}(r_2, \theta_2, \varphi_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} \delta_{s2} \times (15) \\
& \left. \times (-1)^{n+m} \left[\left(\frac{R_2^2}{2n+3} + \frac{R_1^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] \mathbf{A}_{s,n,m}^{(1)} \right\}.
\end{aligned}$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\mathbf{A}_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \mathbf{A}_{s,n,m}^{(1)} \mathbf{F}_{s,n,m}^{+(j)}(R_1) + \mathbf{F}_{s,n,m}^{-(j)}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m+s} \mathbf{A}_{s,k,l}^{(2)} f_{kl}^{(44)nm} + \\
& + \delta_{s2} \mathbf{F}_{1,n,m}^{-(j)}(R_1) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{k+m} \mathbf{A}_{s,k,l}^{(2)} \times \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{R_1^2}{2n+3} + \frac{R_2^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] = \mathbf{F}_{n,m}^{0(j)};$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 \mathbf{A}_{s,n,m}^{(2)} \mathbf{F}_{s,n,m}^{+(j)}(R_2) + \mathbf{F}_{s,n,m}^{-(j)}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m+s} \mathbf{A}_{s,k,l}^{(1)} f_{kl}^{(44)nm} + \\
& + \delta_{s2} \mathbf{F}_{1,n,m}^{-(j)}(R_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} (-1)^{n+m} \mathbf{A}_{s,k,l}^{(1)} \times \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\frac{R_2^2}{2n+3} + \frac{R_1^2}{2k+3} \right) f_{kl}^{(44)n+2,m} - z_{12} f_{kl}^{(44)n+1,m} \right] = \mathbf{F}_{n,m}^{0(j)};$$

$$\mathbf{F}_{1,n,m}^{+(1)}(R) = 2G \frac{(n+1)(n-m+1)!}{R^{n+2}}, \quad \mathbf{F}_{1,n,m}^{+(2)}(R) = -2G \frac{(n+1)(n-m-1)!}{R^{n+2}};$$

$$\mathbf{F}_{1,n,m}^{+(3)}(R) = 2G \frac{(n+1)(n-m)!}{R^{n+2}}, \quad \mathbf{F}_{3,n,m}^{+(1)}(R) = -\frac{G}{R^{n+2}} (n-m+2)!;$$

$$\mathbf{F}_{2,n,m}^{+(1)}(R) = \frac{2G}{R^{n+2}} (n+m) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m+1)!;$$

$$\mathbf{F}_{2,n,m}^{+(3)}(R) = \frac{2G}{R^{n+2}} (n-m)! \left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)(n+3)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right];$$

$$\begin{aligned}
F_{2,n,m}^{+(2)}(R) &= -\frac{2G}{R^{n+2}}(n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m-1)!; \\
F_{3,n,m}^{+(2)}(R) &= -\frac{G}{R^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!; \\
F_{3,n,m}^{+(1)}(R) &= \frac{G}{R^{n+2}}m(n-m)!, \quad F_{1,n,m}^{-(1)}(R) = -2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!}; \\
F_{1,n,m}^{-(2)}(R) &= 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!}, \quad F_{1,n,m}^{-(3)}(R) = 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(1)}(R) &= -2GR^{n-1} \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n+1} + 2\sigma \right] \frac{n-m+1}{(n+m-1)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(2)}(R) &= 2GR^{n-1} \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(3)}(R) &= 2GR^{n-1} \left[\frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{3,n,m}^{-(1)}(R) &= GR^{n-1} \frac{1}{(n+m-2)!}, \quad F_{3,n,m}^{-(2)}(R) = GR^{n-1} \frac{n-m-1}{(n+m+1)!}; \\
F_{3,n,m}^{-(3)}(R) &= -GR^{n-1} \frac{m}{(n+m)!}.
\end{aligned}$$

Компоненты $F_{nm}^{0(j)}$ определяются условиями на бесконечности. В результате имеем: $F_{nm}^{0(1)} = F_{nm}^{0(2)} = 0$; $F_{nm}^{0(3)} = -T\delta_{n1}\delta_{m0}$ (одноосное растяжение), $F_{nm}^{0(1)} = -2T\delta_{n1}\delta_{m0}$; $F_{nm}^{0(2)} = T\delta_{n1}\delta_{m0}$, $F_{nm}^{0(3)} = 0$ (двухосное растяжение). Оператор системы уравнений (16) - (17) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей.

Анализ результатов

Численный анализ решения задачи проведен для двух одинаковых сферических полостей, коэффициент Пуассона $\sigma = 0.3$. Под относительным показателем близости полостей понимаем величину $(R_1 + R_2) / a$, принимаем ее значение равным 0.5. Система уравнений решена методом редукции. Анализ сходимости метода редукции показал, что высокая точность достигается уже при $N = 5$, т.е. в бесконечных суммах по n и k удерживаем шесть слагаемых.

На рис. 2 приведены графики напряжений σ_z / T и σ_ρ / T на оси между полостями при одноосном растяжении. Из анализа графиков можно сделать вывод, что при одноосном растяжении определяющими

являются напряжения σ_z и их концентрация наблюдается у смежных полюсов сфер. На рис. 3 приведены графики напряжений σ_z / T и σ_ρ / T на оси между полостями при двухосном растяжении. В данном случае напряжения σ_z и σ_ρ примерно равны между собой по максимальной абсолютной величине, но при этом $\sigma_z < 0$, а $\sigma_\rho > 0$, концентрация первых наблюдается у смежных полюсов сфер, а максимальное значение вторых достигается в средней точке на оси между полостями. Представленные графики имеют симметричный вид, как и должно быть при симметричных граничных условиях на бесконечности, что может служить косвенной проверкой расчетов.

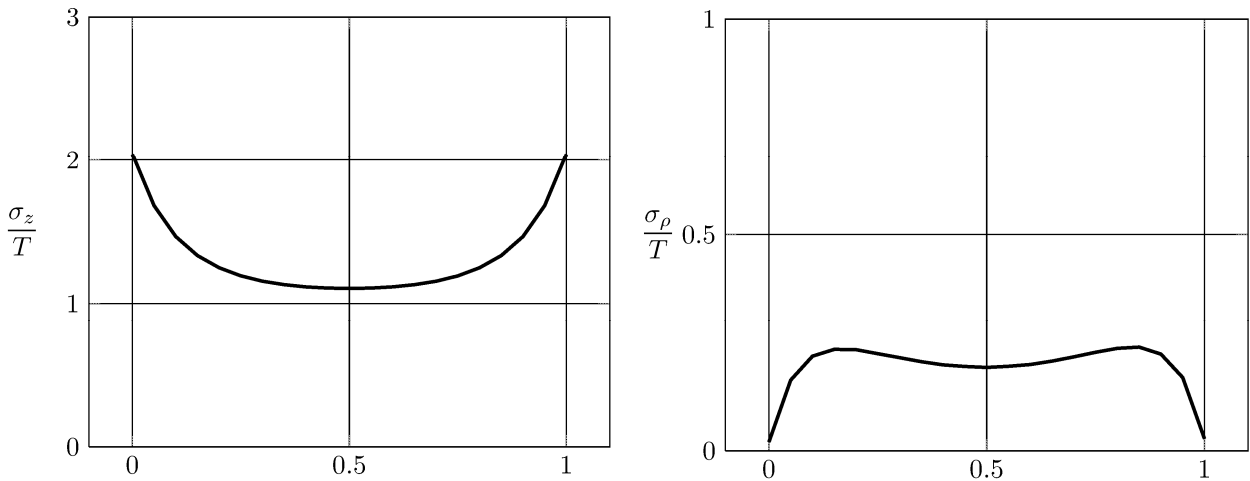


Рисунок 2 - Напряжения σ_z / T (слева) и σ_ρ / T (справа) на оси между полостями при одноосном растяжении

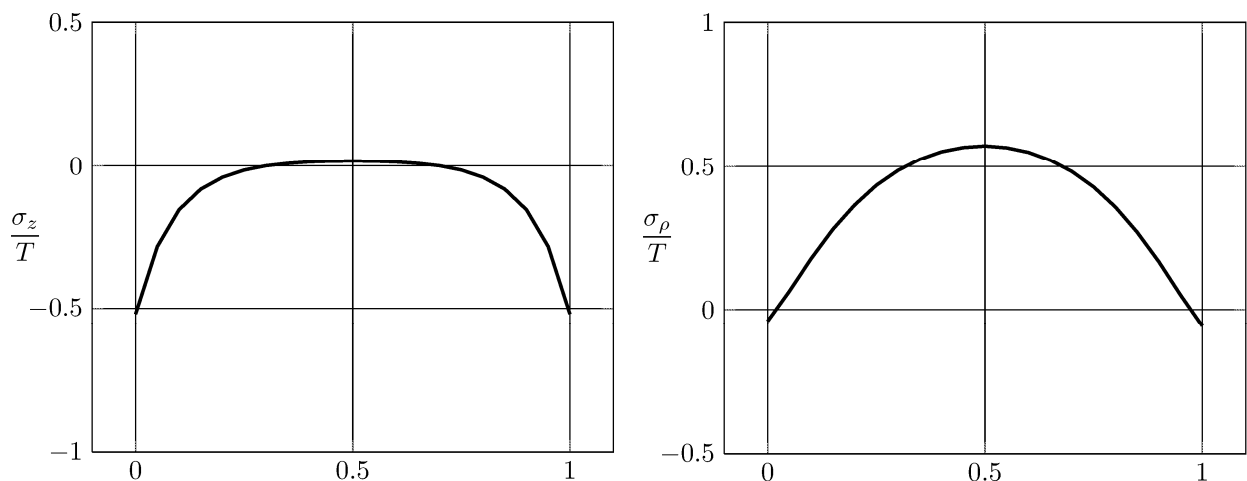


Рисунок 3 - Напряжения σ_z / T (слева) и σ_ρ / T (справа) на оси между полостями при двухосном растяжении

Выводы

Исследовано напряженно-деформированное состояние существенно неосесимметричного упругого тела. В отличие от сугубо численных моделей предложенный в настоящей работе подход позволяет строить приближенные аналитические модели, степень точности которых можно неограниченно улучшать. Приведенные выше результаты позволяют судить о его высокой эффективности.

Разработанная в настоящей работе локальная модель напряженно-деформированного состояния пористого материала может использоваться для определения интегральных упругих модулей композиционных материалов со сферическими зернистыми неоднородностями. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры материала.

Список использованных источников

1. Khoroshun, L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text] / L.P. Khoroshun // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284 – 1316.
2. Николаев, А.Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». - 2009. - Т. 2 (58). - С. 48-58.
3. Николаев, А.Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 2010. - Т. 922. - С. 4-19.
4. Николаев, А.Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А.Г. Николаев // Доповіді НАН України. - 1998. - Т. 2. - С. 78-83.
5. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. - Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. - 109 с. - Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

Поступила в редакцию 03.12.2012.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.