

ПОВЗКІСТЬ КОНСОЛЬНИХ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ МАШИН

Високі температури і значні перепади тиску можуть спричинити недопустимо великі деформації, передчасні поламки і поверхневі руйнування найбільш навантажених деталей машин. У таких умовах працюють елементи парових і газових турбін, реактивних двигунів, теплообмінних апаратів, деталі фюзеляжів і крил літальних апаратів тощо. Окремі деталі, наприклад крила літаків, лопаті турбін, компресорів, насосів і вентиляторів, у розрахункових моделях подаються як консольні пластини [1, 2].

Використання теорії R-функцій [1] дозволяє виконувати розрахунки пластин на основі аналітичного подання розв'язків крайових задач у вигляді структурних формул. Метод R-функцій надає широких можливостей автоматизації процесів проектування конструкцій на етапі визначення геометричних і крайових умов задачі.

У статті запропоновано виконувати комп'ютерні дослідження повзкості [3, 4] консольних пластин на базі теорії R-функцій.

Розглянемо тонку пластину в декартовій системі координат Ox_1x_2z . Роботу консолей вивчимо під рівномірно розподіленою навантагою $q(x_1, x_2, t)$.

Функціонал Лагранжа для пластин сформульовано у вигляді [4]

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(D_{11} \dot{w}_{,11}^2 + D_{22} \dot{w}_{,22}^2 + 2D_{33} \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_{44} \dot{w}_{,12}^2 + \dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} + \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} + 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12} \right) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \dot{q} \dot{w} dx_1 dx_2. \quad (1)$$

У функціоналі (1) уведено позначення:

$$\dot{M}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{(1-\nu^2)} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz;$$

$$\dot{M}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{(1-\nu^2)} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \quad \dot{M}_{12}^c = 2 \int_{(h)} Gz \dot{p}_{12} dz;$$

$$D_{11} = D_{22} = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{(1-\nu^2)} dz; \quad D_{33} = \int_{(h)} \frac{Ez^2 \nu}{(1-\nu^2)} dz; \quad D_{44} = \int_{(h)} \frac{2Ez^2}{(1+\nu)} dz,$$

де w – прогин; p_{ij} – деформації повзкості; E, G, ν – модуль пружності, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу. Точка над символом означає похідну за часом t .

Консольні пластини є окремим випадком класу задач згинання пластин, частина контуру яких вільна, а інша – жорстко закріплена (рис. 1, 4). Розділимо контур $\partial\Omega$ пластини на дві частини $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_2$. На частині контуру $\partial\Omega_1$ реалізовано жорстке закріплення, а інша частина $\partial\Omega_2$ – вільна, тоді крайові умови для задачі згинання пластини такі:

$$\dot{w}|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \dot{w},n|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad (2)$$

$$\dot{M}_{nn}^c|_{\partial\Omega_2} = \dot{M}_{11}^c n_1^2 + 2\dot{M}_{12}^c n_1 n_2 + \dot{M}_{22}^c n_2^2; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \left(\dot{M}_{n\tau,\tau}^c + \dot{Q}_n^c \right)|_{\partial\Omega_2} &= \left(\dot{M}_{22}^c - \dot{M}_{11}^c \right) n_1 n_2 + \dot{M}_{12}^c \left(n_1^2 - n_2^2 \right) + \\ &+ \dot{M}_{11,1}^c n_1 + \dot{M}_{22,2}^c n_2 + \dot{M}_{12,2}^c n_1 + \dot{M}_{21,1}^c n_2, \end{aligned}$$

де n_1, n_2 – напрямні косинуси нормалі \vec{n} до контуру $\partial\Omega$.

Безпосередньою перевіркою можна перекоонатися, що часткова структура розв'язку, яка задовольняє тільки геометричним крайовим умовам (2), має вигляд

$$\dot{w} = \omega_1^2 F_1,$$

де $\omega_1 = 0$ – рівняння жорстко закріпленої ділянки контуру $\partial\Omega_1$; F_1 – невизначені функції.

У роботі [4] отримано структуру розв'язку, що задовольняє статичним (3) і геометричним (2) крайовим умовам:

$$\dot{w}^H = - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)} \frac{\dot{M}_{nn}^c}{D_{11}}; \quad (4)$$

$$\dot{w}^O = \omega_1^2 F_1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \left[\omega_2 F_2 - D_2 (\omega_1^2 F_1) - \nu T_2 (\omega_1^2 F_1) \right]; \quad (5)$$

$$\dot{w} = \dot{w}^O + \dot{w}^H, \quad (6)$$

де $\omega_2 = 0$ – рівняння вільної ділянки контуру $\partial\Omega_2$; \dot{w}^O , \dot{w}^H – однорідна і неоднорідна частини структури розв'язку; F_1 , F_2 – невизначені компоненти; D_2 , T_2 – лінійні диференціальні оператори [1].

Для більшості наближених методів характерно зведення нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. Цього можна досягти поданням невизначеного компонента у вигляді поліному

$$F_N(x) = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i,$$

де C_j – коефіцієнти, що підлягають визначенню варіаційним методом Рітца; ψ_j – степеневі поліноми.

Задача I. Розглянемо прямокутну консольну пластину (рис. 1) під рівномірно розподіленою навантагою. Розташуємо вісі координат як показано на рис. 1. Границя $x_1 = 0$ прямокутної пластини жорстко закріплена, а інші три ($x_1 = a$; $x_2 = \pm b$) – вільні. Для матеріалу пластини маємо такі параметри пружності: $\nu = 0,3$; $E = 1 \cdot 10^5$ МПа. Закон одновісної повзкості для цього матеріалу сформульовано для швидкостей деформацій повзкості [4]

$$\dot{\rho} = At^\beta \sigma^m,$$

де $\beta = -\frac{2}{3}$; $m = 3$; $A = 1,7953583 \cdot 10^{-10}$ МПа $^{-m}$ ·год $^{-(\beta+1)}$.

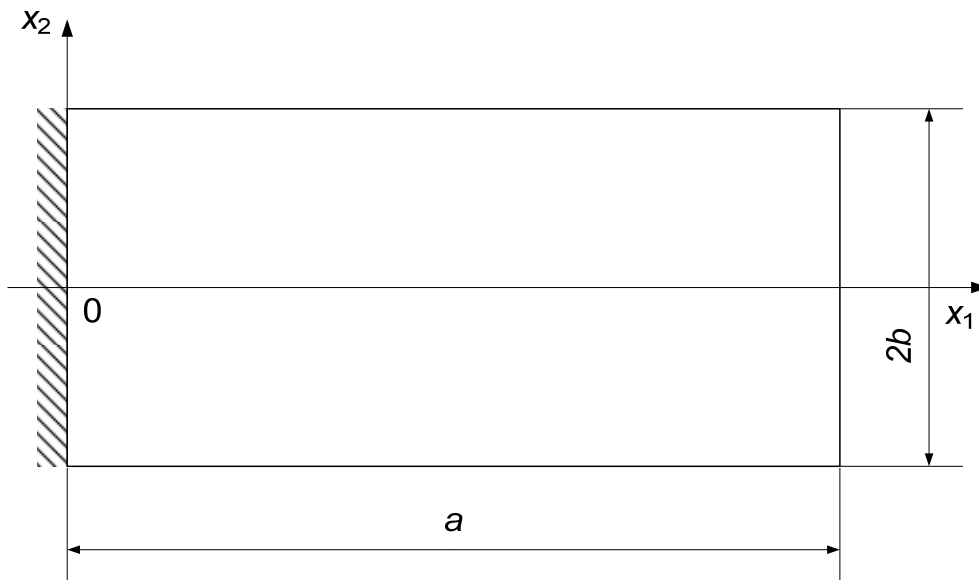


Рисунок 1 – Консольна прямокутна пластина

Задача зводиться до знаходження функції прогинів $\dot{w}(x, y)$, що забезпечує мінімум функціоналу (1) в прямокутній області Ω і задовольняє крайовим умовам: на краю $x_1 = 0$ – (2), а на вільних краях $x_1 = a$; $x_2 = \pm b$ – (3). У формули для розв'язків задачі (4), (5), (6) входять функції ω_1 , ω_2 , які залежать від форми пластини. Функція $\omega_1(x_1, x_2)$ визначається формою жорстко закріпленої ділянки $\partial\Omega_1$, а функція $\omega_2(x_1, x_2)$ – формою вільної від закріплення ділянки контуру пластини $\partial\Omega_2$.

Жорстке закріплення в нашому випадку здійснено на лінії $x_1 = 0$, тому $\omega_1(x_1, x_2) = x_1$.

Логіка побудови області пластини, обмеженої лінією $\partial\Omega_2$, визначається булевою функцією

$$P = P_1 \wedge P_2.$$

Області P_1 и P_2 задаються нерівностями:

$$(P_1) \quad f_1 = b^2 - x_2^2 \geq 0;$$

$$(P_2) \quad f_2 = a - x_1 \geq 0.$$

Тому

$$\omega_2(x_1, x_2) = (b^2 - x_2^2) \wedge_0 (a - x_1),$$

де \wedge_0 – R-кон'юнкція [1].

Для квадратної пластини проведено деякі обчислювальні експерименти. Зокрема визначено, що при збільшенні кількості k координатних функцій значення максимальних прогинів та згинальних моментів стабілізується. При кількості координатних функцій $k = 21$ отримано добре наближення, і подальше збільшення кількості координатних функцій вносить незначні уточнення (у третій або четвертій значущій цифрі).

Використовуючи формули, отримані для розрахунку прогинів і деформацій прямокутних консольних пластин, можна обчислити компоненти напруженого стану. Порівняємо величини згинального моменту M_{11} , отримані для пружної задачі, з величинами, обчисленими в роботі М.Г. Склепуса [2].

Таблиця 1 – Дослідження достовірності результатів для згинальних моментів $M_{11}/(qa^2)$

Метод розрахунку	$y/b = 0$	0,5	1,0	
О.М. Склепус	-0,551	-0,542	-0,352	$x_1 = 0,0$
	-0,122	-0,128	-0,116	$x_1 = 0,5$
М.Г. Склепус	-0,504	-0,488	-0,372	$x_1 = 0,0$
	-0,125	-0,123	-0,126	$x_1 = 0,5$

Наведені результати дослідження пружного згину прямокутних консольних пластин добре узгоджуються з раніше отриманими результатами.

Максимальний прогин у середині вільного від закріплення краю пластини

$$w_{max} = 0,129 \frac{qa^4}{D_{11}}$$

Зробимо аналіз особливостей, властивих напружено-деформованому стану консольних прямокутних пластин в умовах повзкості. Розв'язки пружної задачі складають початкові умови задачі повзкості. Для інтегрування задачі повзкості за часом у роботі використовувався метод Рунге – Кутта – Мерсона з автоматичним вибором кроку інтегрування. Результати розрахунків прогинів квадратної пластини $a = 2b = 1$ м товщиною $h = 0,1$ м подано на рис. 2 залежно від величини зовнішньої навантаги q для різних моментів часу t .

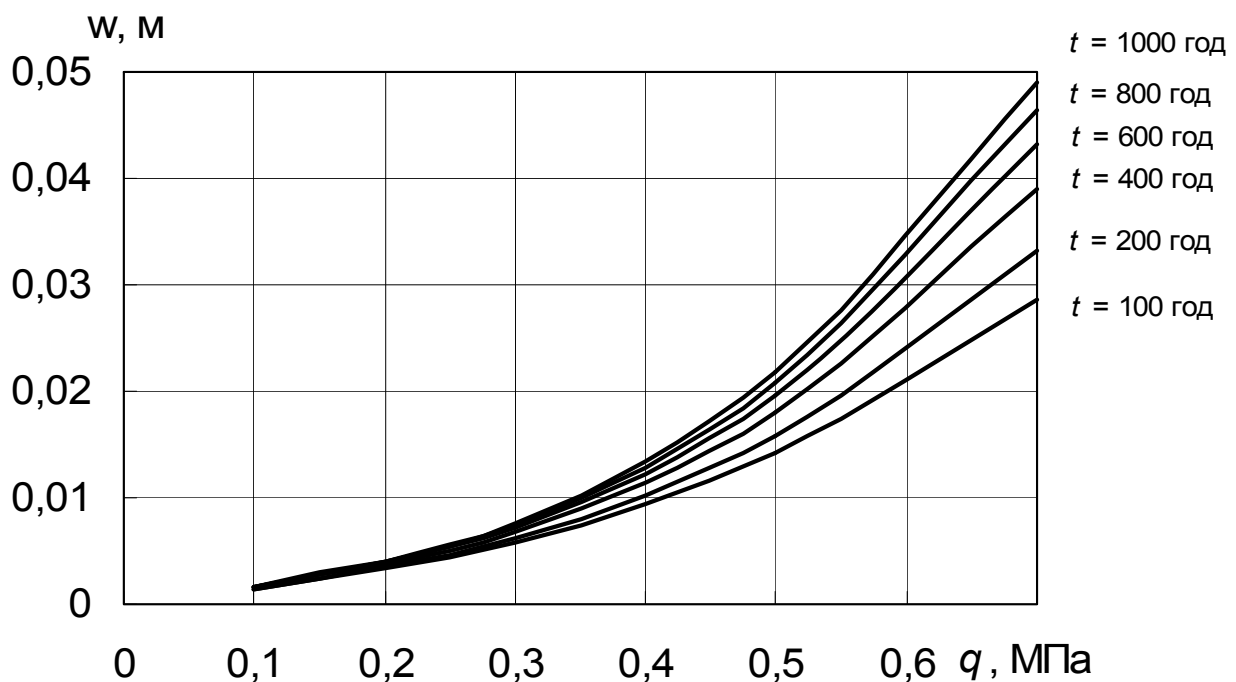


Рисунок 2 – Максимальні прогини w прямокутної пластини залежно від величини зовнішньої навантаги q для різних моментів часу t

Напруження і деформації пластини, спричиненні початковим навантаженням, протягом часу змінюються. При проектуванні конструкцій машин, виходячи із режимів їхньої роботи, оцінюють час, за який деформації повзкості досягають певної величини. Цей проміжок часу зазвичай визначає термін служби проектованої деталі. На рис. 3 наведено графіки максимальних деформацій ε_{11} на поверхні пластини в точці $(0,0)$ жорсткого закріплення залежно від величини зовнішньої навантаги q для різних термінів служби t .

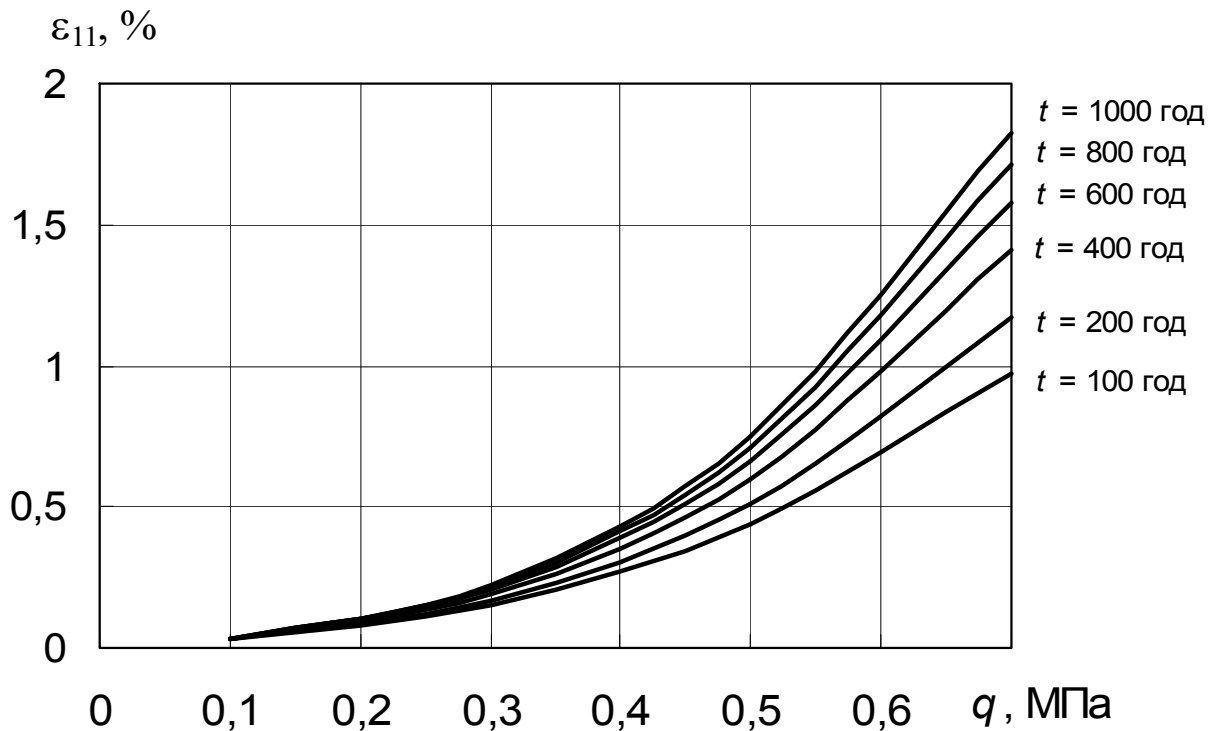


Рисунок 3 – Залежність деформацій пластини ε_{11} у центрі жорсткого закріплення від величини зовнішньої навантаги q для різних моментів часу t

Задача II. Розглянемо трапецієподібну консольну пластину (рис. 4). Відносні розміри пластини в плані: $a = 1$; $2c = 0,75$; $2b = 1,25$; товщина $h = 0,1$ м. Матеріал має ті ж характеристики пружності й повзкості, що і в задачі I.

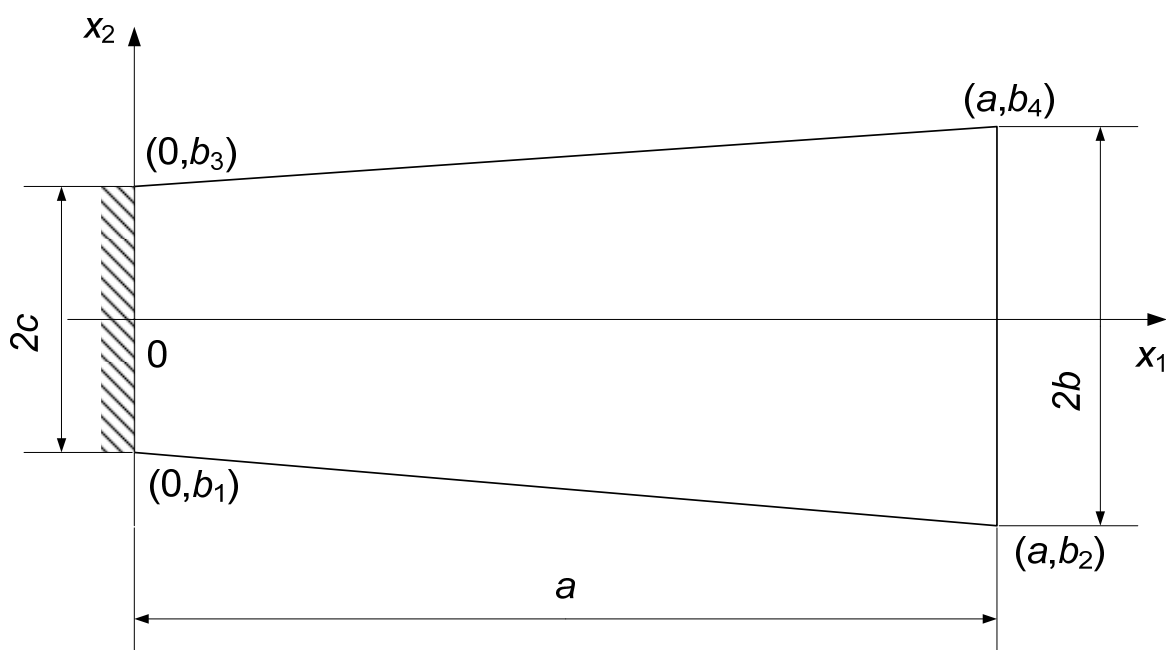


Рисунок 4 – Консольна трапецієподібна пластина

Побудуємо функції $\omega(x, y)$ для трапецієподібної пластини (див. рис. 4). Рівняння закріпленої границі пластини – $\omega_1(x_1, x_2) = x_1 = 0$. Логіка побудови області P , що обмежена вільними від закріплення ділянками контуру й охоплює жорстко закріплену границю, визначається булевою функцією

$$P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3,$$

де P_1 , P_2 и P_3 – області, що визначаються нерівностями:

$$(P_1) f_1 = (a - x) \geq 0;$$

$$(P_2) f_2 = -\frac{1}{\sqrt{(b_2 - b_1)^2 + a^2}} [x(b_2 - b_1) - a(y - b_1)] \geq 0;$$

$$(P_3) f_3 = \frac{1}{\sqrt{(b_4 - b_3)^2 + a^2}} [x(b_4 - b_3) - a(y - b_3)] \geq 0.$$

Отже, функція $\omega_2(x_1, x_2)$ для області P має вигляд

$$\omega_2(x_1, x_2) = (f_2 \wedge f_3) \wedge f_1.$$

Максимальні прогини здійснюються в незакріплених кутах пластини. Їхні значення та значення прогинів посередині вільного від закріплення краю для пружної задачі:

$$w_{max} = 0,200 \frac{qa^4}{D_{11}};$$

$$w(a, 0) = 0,159 \frac{qa^4}{D_{11}}.$$

Найбільші згинальні моменти діють у жорсткому закріпленні – перерізі $x_1 = 0$. Наведемо значення згинальних моментів M_{11} у деяких точках цього перерізу:

$$M_{11}(0, 0) = 0,575qa^2;$$

$$M_{11max}(0, \pm c) = 1,03qa^2.$$

На рис. 5, 6 наведено результати розв'язання задачі повзкості. Результати розрахунків максимальних прогинів w_{max} залежно від величини зовнішньої навантаги для різних термінів служби t наведено на рис. 5. На рис. 6 показано графіки максимальних деформацій на поверхні пластини у жорсткому закріпленні $\varepsilon_{11}(0, \pm c)$ залежно від значень навантаги q для різних термінів служби t .

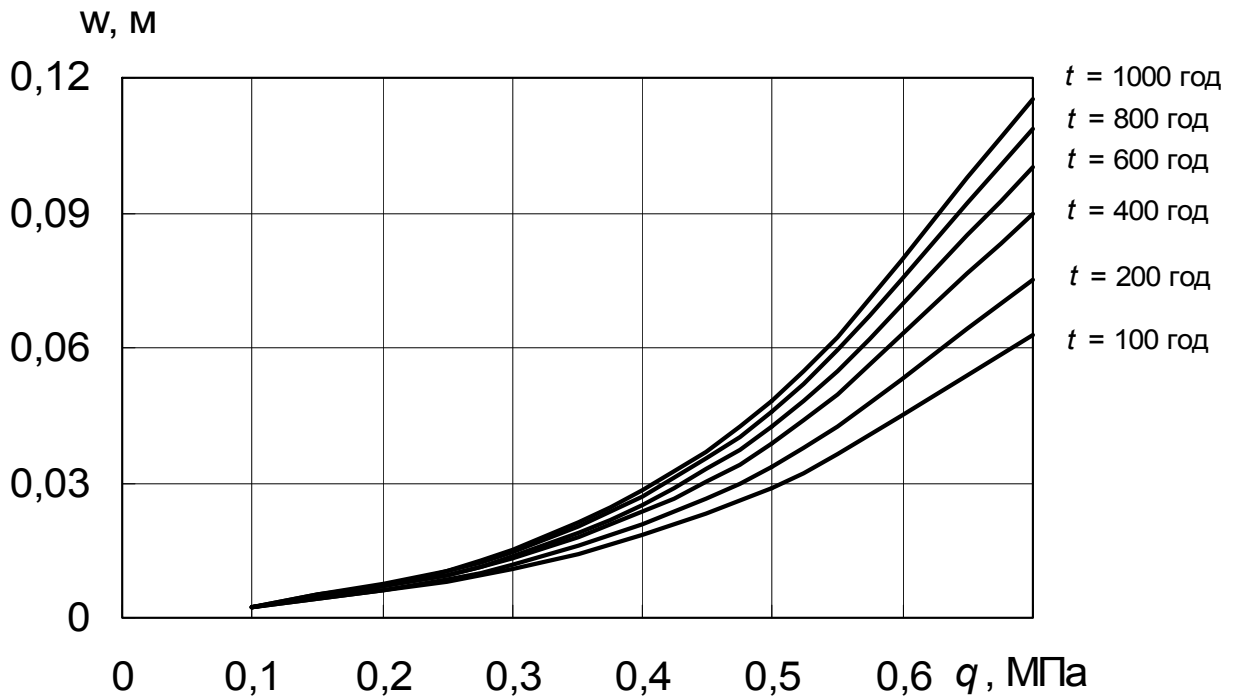


Рисунок 5 – Максимальні прогини W_{max} прямокутної пластини залежно від величини зовнішньої навантаги для різних моментів часу t

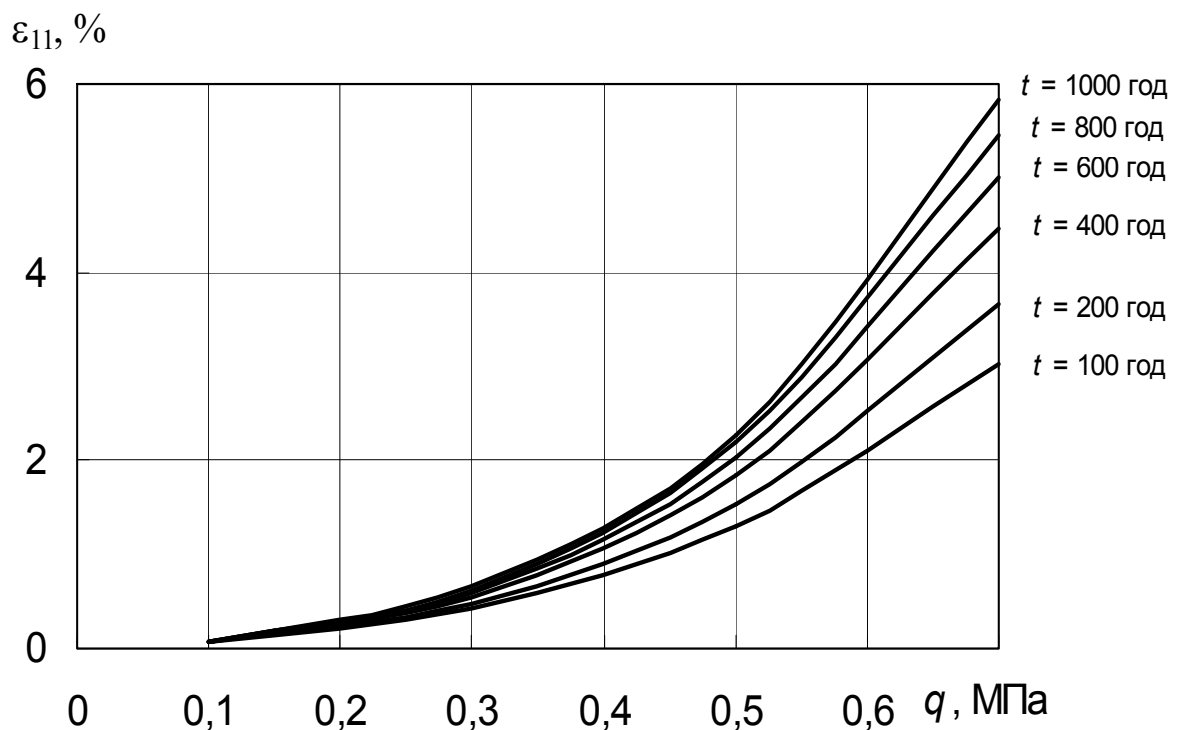


Рисунок 6 – Залежність максимальних деформацій пластини ε_{11max} від величини зовнішньої навантаги q для різних моментів часу t

При виборі координатних функцій і обчисленні елементів матриці Рітца враховувалася симетрія задачі. Результати цієї задачі отримано при кількості координатних функцій, що дорівнювала 36. При цьому кількість вузлів інтегрування в квадратурних формулах Гаусса становила 144. Для інтегрування за товщиною пластини використовувалися 6-точкові формули Гаусса. Для методу Рунге – Кутта – Мерсона задавалася похибка $\xi = 0,001$. Усі розрахунки виконано на програмному комплексі, розробленому автором, мовою програмування C++.

Відзначимо, що, змінюючи параметри b_1, b_2, b_3, b_4, a та h за допомогою одного і того ж алгоритму, можна розраховувати найрізноманітніші трапецієподібні консольні пластини, включаючи і граничні випадки – прямокутні й трикутні.

Висновки

Установлено нові залежності напружено-деформівного стану консольних пластин в умовах повзкості від величин зовнішньої навантаги та часу. Отримані результати є корисними в оцінюваннях терміну служби деяких деталей машин, таких як крила літаків, лопаті турбін, компресорів, насосів і вентиляторів тощо.

Список використаних джерел

1. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы [Текст] / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа, Н.Г. Склепус, Л.Б. Учишвили. – К. : Наук. думка, 1973. – 123 с.
2. Склепус, М.Г. До розрахунку консольних пластин [Текст] / М.Г. Склепус // Доповіді академії наук УРСР. – 1970. – С. 935 – 939.
3. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
4. Склепус, О.М. Повзкість пластинчастих елементів металевих конструкцій машин [Текст] / О.М. Склепус. – Х. : Акад. ВВ МВС України, 2009. – 152 с.

Поступила в редакцію 30.01.2013.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*