

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Введение

В объектах аэрокосмической техники есть множество деталей типа цилиндрических стержней (например тонкие валы, рычаги, торсионы), работающих на кручение. В процессе эксплуатации внутри таких деталей могут появляться концентраторы напряжений типа круговых трещин. При определенных условиях эксплуатации (например низкой температуре) может наступать хрупкое разрушение таких деталей. Таким образом, изучение напряженного состояния цилиндрического стержня с круговой трещиной является актуальной прикладной задачей.

Впервые проблему хрупкого разрушения упругого материала с круговой трещиной поставил и решил А. А. Гриффитс [1]. В статьях [2, 3] рассматривается задача о распределении напряжений в цилиндре с круговой трещиной.

В статье [4] получено выражение для эффективных характеристик (податливостей) при кручении неоднородного стержня через функцию Грина задачи кручения.

В монографии [6] Г. Нейбером были рассмотрены инженерные подходы к решению задачи о кручении тела вращения, содержащего внешнюю выточку. Задача кручения для цилиндра с внешней круговой выточкой была решена полностью в цилиндрической системе координат в работе [5].

В данной работе предложено аналитическое асимптотически точное решение задачи о кручении бесконечного цилиндрического стержня с дисковой трещиной обобщенным методом Фурье.

Постановка задачи

Рассматривается бесконечный стержень радиусом R с центрально расположенной круговой трещиной радиусом \tilde{c} ($\tilde{c} < R$). Будем считать, что боковая поверхность стержня и берега трещины свободны от усилий. К торцам стержня на бесконечности приложены силы, статически эквивалентные крутящим моментам M (рис. 1).

Введем одинаково направленные цилиндрическую (ρ, z, φ) и сжатую сфероидальную $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varphi)$ системы координат с общим началом, рас-

положенным в центре диска. Координаты этих систем связаны формулами

$$\rho = \tilde{c} \operatorname{ch} \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta}; \quad z = \tilde{c} \operatorname{sh} \tilde{\xi} \cos \tilde{\eta},$$

где $\tilde{\xi} \in [0; \infty)$; $\tilde{\eta} \in [0; \pi]$; \tilde{c} — параметр сжатой сфероидальной системы координат.

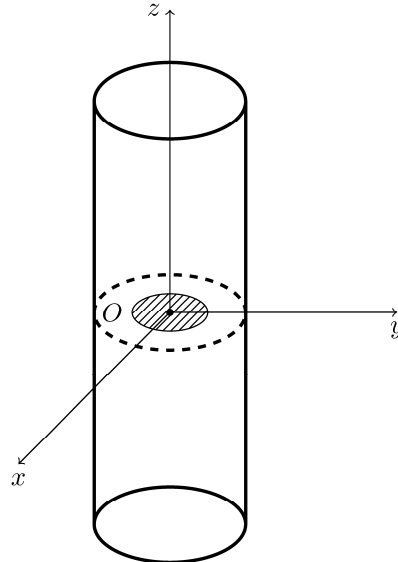


Рисунок 1 — Схематическое представление задачи

В этих координатах границы цилиндра и трещины задаются уравнениями $\rho = R$ и $\tilde{\xi} = 0$.

Ввиду осевой симметрии рассматриваемого тела единственной отличной от нуля компонентой вектора перемещений является угловое перемещение $\vartheta(\rho, z)$.

Для определения ϑ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - \frac{\vartheta}{\rho^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0; \quad (1)$$

$$\tau_{\rho\varphi}|_{\rho=R} = 0; \quad \tau_{\varphi z}|_{\tilde{\xi}=0} = 0. \quad (2)$$

Для формулировки условий на бесконечности будем считать, что на торцах цилиндра касательные напряжения $\tau_{\varphi z}$ распределены по линейному закону.

Вспомогательное напряженное состояние, отвечающее условиям на бесконечности, можно определить с помощью функции

$$\vartheta_0 = A\rho z,$$

где постоянная A определяется из условия равенства крутящего момента на бесконечности величине M . Напряжения, отвечающие перемещению ϑ_0 , вычисляются по формулам

$$\tau_{\rho\varphi}^0 = G \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial \rho} - \frac{\vartheta_0}{\rho} \right) = 0; \quad \tau_{\varphi z}^0 = G \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = GA\rho. \quad (3)$$

Для определения постоянной A получаем соотношение

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau_{\varphi z}^0 \rho^2 d\rho d\varphi, \quad (4)$$

откуда $A = \frac{4M}{\pi G} R^{-4}$.

Используя центральную симметрию поля перемещений $\vartheta(\rho, z)$, общее решение задачи можем искать в виде

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(1)}(i sh \tilde{\xi}) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) + \int_0^{\infty} A(\lambda) I_1(\lambda \rho) \sin \lambda z d\lambda + \vartheta_0, \quad (5)$$

где $P_n^{(1)}(z)$, $Q_n^{(1)}(z)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода; $I_1(\lambda \rho)$ — модифицированная функция Бесселя; a_n и $A(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты и функция.

Теоремы сложения

Справедливы следующие теоремы сложения частных решений уравнения (1) в цилиндрических и сжатых сфероидальных координатах [8]

$$Q_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) = \frac{2}{\pi} i \tilde{c} \int_0^{\infty} i_{2n}(\lambda \tilde{c}) K_1(\lambda \rho) \sin \lambda z d\lambda, \quad \rho > \tilde{c}; \quad (6)$$

$$I_1(\lambda \rho) \sin \lambda z = \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right) i_{2k}(\lambda \tilde{c}) P_{2k}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) P_{2k}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}), \quad (7)$$

где $i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x)$, $K_1(x)$ — функция Макдональда.

С помощью формул (6) и (7) общее решение (5) можно преобразовать отдельно к одной из введенных систем координат

$$\begin{aligned} \vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(4n + \frac{1}{2} \right) P_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \times \\ \times \int_0^{\infty} A(\lambda) i_{2n}(\lambda \tilde{c}) d\lambda + \vartheta_0, \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\vartheta = \int_0^{\infty} A(\lambda) I_1(\lambda \rho) \sin \lambda z d\lambda + \frac{2}{\pi} i \tilde{c} \int_0^{\infty} K_1(\lambda \rho) \sin \lambda z \sum_{k=0}^{\infty} a_k i_{2k}(\lambda \tilde{c}) d\lambda + \vartheta_0. \quad (9)$$

Заметим, что граничные условия (2) в терминах функции перемещения могут быть записаны следующим образом:

$$G\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\mathfrak{G}}{\rho} \right) \Big|_{\rho=R} = 0; \quad G \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} \Big|_{\tilde{\xi}=0} = 0. \quad (10)$$

Учитывая, что справедливы формулы

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{I_1(\lambda \rho)}{\rho} \right) = \lambda I_2(\lambda \rho); \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{K_1(\lambda \rho)}{\rho} \right) = -\lambda K_2(\lambda \rho); \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\tilde{\xi}=0} = \frac{1}{\tilde{c} \cos \tilde{\eta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \Big|_{\tilde{\xi}=0}, \quad (13)$$

после удовлетворения условий (10) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{d\tilde{\xi}} \left[Q_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) \right] \Big|_{\tilde{\xi}=0} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(4n + \frac{1}{2} \right) \frac{d}{d\tilde{\xi}} \left[P_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) \right] \Big|_{\tilde{\xi}=0} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \int_0^{\infty} A(\lambda) i_{2n}(\lambda \tilde{c}) d\lambda + \\ & + \frac{4M}{\pi G} R^{-4} \tilde{c}^2 \sin \tilde{\eta} \cos \tilde{\eta} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) \lambda I_2(\lambda R) \sin \lambda z d\lambda - \frac{2}{\pi} i \tilde{c} \int_0^{\infty} \lambda K_2(\lambda R) \sin \lambda z \sum_{k=0}^{\infty} a_k i_{2k}(\lambda \tilde{c}) d\lambda = 0. \quad (15)$$

Представим последнее слагаемое в формуле (14) рядом по функциям Лежандра $P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta})$. В результате получаем

$$\frac{4M}{\pi G} R^{-4} \tilde{c}^2 \sin \tilde{\eta} \cos \tilde{\eta} = -\frac{4M}{3\pi G} R^{-4} \tilde{c}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n1} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}), \quad (16)$$

где δ_{n1} — дельта-символ Кронекера.

Используя единственность разложения в ряд по функциям Лежандра и единственность интегрального преобразования Фурье, получаем относительно неизвестных коэффициентов a_n и функции $A(\lambda)$ линейную систему

$$a_n s_n^+ + \left(4n + \frac{1}{2} \right) s_n^- \int_0^{\infty} A(\lambda) i_{2n}(\lambda \tilde{c}) d\lambda = \frac{4M}{3\pi G} R^{-4} \tilde{c}^2 \delta_{n1}; \quad (17)$$

$$A(\lambda) I_2(\lambda R) - \frac{2}{\pi} i \tilde{c} K_2(\lambda R) \sum_{k=0}^{\infty} a_k i_{2k}(\lambda \tilde{c}) = 0, \quad a_0 = 0; \quad (18)$$

$$s_n^+ = \frac{d}{d\tilde{\xi}} \left[Q_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) \right] \Big|_{\tilde{\xi}=0}; \quad s_n^- = \frac{d}{d\tilde{\xi}} \left[P_{2n}^{(-1)}(i sh \tilde{\xi}) \right] \Big|_{\tilde{\xi}=0}. \quad (19)$$

Систему (17) – (19) можно представить в виде

$$a_0 = 0; \quad A(\lambda) = \frac{2}{\pi} i\tilde{c} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k i_{2k}(\lambda \tilde{c}); \quad (20)$$

$$\tilde{a}_n - \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk} \tilde{a}_k = \frac{4}{3\pi} \delta_{n1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $\tilde{a}_n = a_n s_n^+ \frac{G R^4}{M \tilde{c}^2}$;

$$T_{nk} = \frac{2}{\pi} \tilde{c} \left(4n + \frac{1}{2} \right) \frac{s_n^-}{s_k^+} \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2n}(\lambda \tilde{c}) i_{2k}(\lambda \tilde{c}) d\lambda. \quad (22)$$

Анализ разрешающей системы уравнений

Теорема. При условии $\tilde{c} < R$ оператор системы (21) является фредгольмовым оператором в пространстве l_2 .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |T_{nk}|^2 < \infty. \quad (23)$$

Используя неравенство Коши, из формулы (22) можно получить

$$|T_{nk}|^2 \leq \frac{4}{\pi} \tilde{c}^2 \left(4n + \frac{1}{2} \right) \frac{|s_n^-|^2}{|s_k^+|^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2n}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2k}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda, \quad (24)$$

откуда

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} |T_{nk}|^2 \leq \frac{4}{\pi} \tilde{c}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(4n + \frac{1}{2} \right) |s_n^-|^2 \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2n}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|s_k^+|^2} \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2k}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda. \quad (25)$$

Докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(4n + \frac{1}{2} \right)^2 |s_n^-|^2 \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2n}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda \quad (26)$$

при выполнении условия теоремы. Для этого рассмотрим тождество (7), обе части которого продифференцируем по $\tilde{\xi}$, после чего подставим $\tilde{\xi} = 0$. В результате

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} [I_1(\lambda \rho) \sin \lambda z] \right|_{\tilde{\xi}=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right) i_{2k}(\lambda \tilde{c}) \left. \frac{d}{d\tilde{\xi}} [P_{2k}^{(-1)}(\tilde{\xi})] \right|_{\tilde{\xi}=0} P_{2k}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right) i_{2k}(\lambda \tilde{c}) s_k^- \left\| P_{2k}^{(1)} \right\| \frac{P_{2k}^{(1)}(\cos \tilde{\eta})}{\left\| P_{2k}^{(1)} \right\|}. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенство (27) можно интерпретировать как разложение функции, входящей в его левую часть, по полной ортонормированной системе

функций $\left\{ \frac{P_k^{(1)}(\cos \tilde{\eta})}{\|P_k^{(1)}\|} \right\}_{k=0}^{\infty}$ на промежутке $[0, \pi]$. Тогда для этого разложе-

ния справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} [I_1(\lambda \rho) \sin \lambda z] \Big|_{\tilde{\xi}=0} \right\}^2 \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right)^2 i_{2k}^2(\lambda \tilde{c}) |s_k^-|^2 \|P_{2k}^{(1)}\|^2. \quad (28)$$

Выполняя дифференцирование в левой части (28), получаем

$$\int_0^{\pi} \lambda^2 I_1^2(\lambda \tilde{c} \sin \tilde{\eta}) \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right)^2 i_{2k}^2(\lambda \tilde{c}) |s_k^-|^2 \frac{(2k+1)2k}{4k + \frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Из последней формулы следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin \tilde{\eta} \int_0^{\pi} \lambda^2 \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} I_1^2(\lambda \tilde{c} \sin \tilde{\eta}) d\lambda d\tilde{\eta} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left(4k + \frac{1}{2} \right) (2k+1)2k |s_k^-|^2 \int_0^{\infty} \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} i_{2k}^2(\lambda \tilde{c}) d\lambda. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда ряд в правой части равенства (30) сходится одновременно с несобственным интегралом в его левой части. Из асимптотического поведения функций $K_m(x)$, $I_m(x)$ при $x \rightarrow \infty$ следует, что условием такой сходимости является $\tilde{c} < R$. Аналогично доказывается сходимость второго множителя в виде ряда в оценке (25).

Таким образом, теорема доказана.

Численно решив систему (21), можно восстановить поле угловых перемещений, через которое выражаются компоненты тензора напряжений. Найдем напряжение $\tau_{\varphi z}$ в плоскости трещины вне ее берегов.

Так как

$$\tau_{\varphi z} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tilde{c} < \rho < R}} = G \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tilde{c} < \rho < R}} = - \frac{G}{\tilde{c} \operatorname{sh} \tilde{\xi}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tilde{\eta}} \Big|_{\tilde{\eta}=\frac{\pi}{2}}, \quad (31)$$

то из формулы (8) получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z} \Big|_{\substack{z=0 \\ \tilde{c} < \rho < R}} &= - \frac{G}{\tilde{c} \operatorname{sh} \tilde{\xi}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i \operatorname{sh} \tilde{\xi}) \frac{d}{d\tilde{\eta}} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \Big|_{\tilde{\eta}=\frac{\pi}{2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(4n + \frac{1}{2} \right) P_{2n}^{(-1)}(i \operatorname{sh} \tilde{\xi}) \frac{d}{d\tilde{\eta}} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \Big|_{\tilde{\eta}=\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} A(\lambda) i_{2n}(\lambda \tilde{c}) d\lambda - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{4M}{\pi G} R^{-4} \tilde{c}^2 \operatorname{sh} \tilde{\xi} \operatorname{ch} \tilde{\xi} \right\}. \quad (32)$$

Интересно проанализировать поведение напряжения $\tau_{\varphi z}|_{z=0, \tilde{c} < \rho < R}$ при $\rho \rightarrow \tilde{c} + 0$. Из формулы (32) при $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ следует асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}|_{z=0, \tilde{c} < \rho < R} &\underset{\rho \rightarrow \tilde{c} + 0}{\sim} \frac{G}{\sqrt{\rho^2 - \tilde{c}^2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) \frac{d}{dx} P_{2n}^{(1)}(0) + \frac{4}{\pi} MR^{-4} \rho = \\ &= \frac{G}{\sqrt{\rho^2 - \tilde{c}^2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{4}{\pi} MR^{-4} \rho = \\ &= \frac{\tilde{c}^2 M}{R^4 \sqrt{\rho^2 - \tilde{c}^2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tilde{a}_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} + \frac{4}{\pi} MR^{-4} \rho. \end{aligned} \quad (33)$$

Анализ численных результатов

Под относительными размерами трещины будем понимать величину $r = R / \tilde{c}$, где R — радиус цилиндрического стержня; \tilde{c} — радиус дисковой трещины. На рис. 2 приведен сравнительный график относительных величин напряжений $\tau_{\varphi z}$.

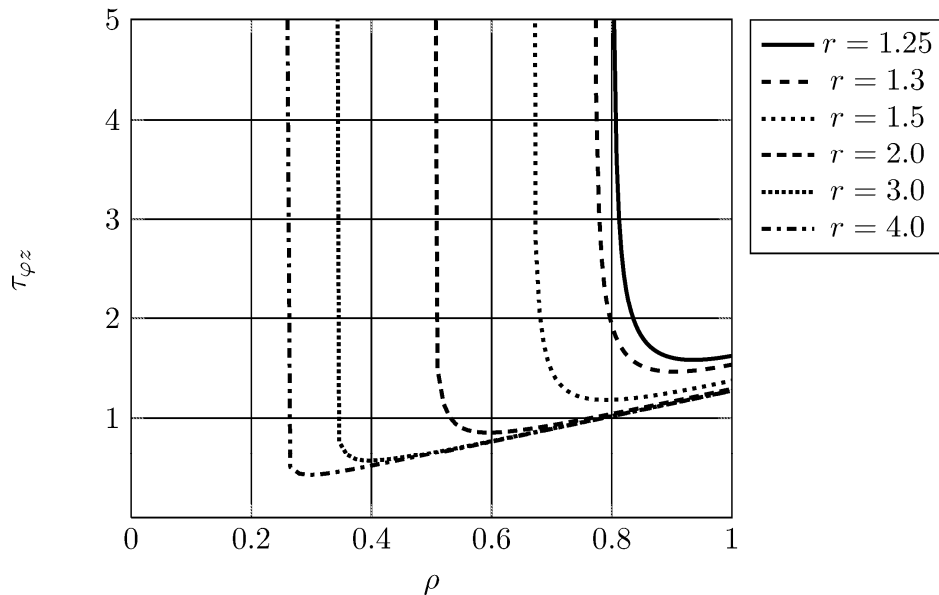


Рисунок 2 — Напряжения $\tau_{\varphi z}$ в зависимости от относительных размеров трещины

Из формулы (33) следует выражение для коэффициента интенсивности напряжений (КИН) вблизи края трещины (продольно-сдвиговая (III) мода деформации)

$$k_{III} = \lim_{\rho \rightarrow \tilde{c}+0} \sqrt{2\pi(\rho - \tilde{c})} \tau_{\varphi z} = \frac{\tilde{c}^2 M}{R^4} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tilde{a}_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}. \quad (34)$$

Таблица 1 — Значения КИНа в зависимости от относительных размеров трещины

$r = R / \tilde{c}$	1.25	1.3	1.5	2.0	3.0	4.0
$\frac{k_{III} R^4}{M \tilde{c}^{3/2}}$	1.41455	1.04114	0.990592	0.96388	0.958503	0.958027

Полученное в результате численной реализации значение $\frac{k_{III} R^4}{M \tilde{c}^{3/2}}$ согласуется с известным значением этой величины для упругого пространства с круговой трещиной $\left(\frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}} \approx 0.957798 \right)$.

Формула (33) показывает характерную корневую особенность напряжений при переходе к краю трещины.

Согласно теории Гриффитса [1] необходимое условие для увеличения трещины заключается в стационарности значения свободной энергии в зависимости от радиуса трещины

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{c}} = 0, \quad (35)$$

где $F = U - W$. Здесь U — поверхностная энергия трещины; W — величина, на которую понижается потенциальная энергия стержня при наличии в нем трещины. Значения U и W могут быть определены по формулам

$$U = 2\pi\tilde{c}^2\gamma; \quad (36)$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \tau_{\varphi z}^{\infty} \left(\vartheta^+ - \vartheta^- \right) \Big|_{\xi=0} dS, \quad (37)$$

где γ — удельная поверхностная энергия трещины; ϑ^+ , ϑ^- — перемещения на верхней и нижней гранях трещины; S — область, занимаемая трещиной.

Из формулы (12) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\vartheta^+ - \vartheta^- \right) \Big|_{\xi=0, 0 \leq \tilde{\eta} \leq \frac{\pi}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) P_{2n}^{(1)}(-\cos \tilde{\eta}) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}). \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая, что элемент площади плоской области в сжатых сфероидальных координатах равен

$$dS = \tilde{c}^2 \sin \tilde{\eta} \cos \tilde{\eta} d\tilde{\eta} d\varphi, \quad (39)$$

а напряжение $\tau_{\varphi z}^{\infty}$ определяется формулой (3), можно записать выражение для W в виде

$$W = GA \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tilde{c}^3 \sin^2 \tilde{\eta} \cos \tilde{\eta} P_{2n}^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} d\varphi =$$

$$= GA \cdot 2\pi \tilde{c}^3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_{2n}^{(-1)}(i0) \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} P_{2n}^{(1)}(x) dx. \quad (40)$$

Интеграл в формуле (40) может быть вычислен непосредственно:

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} P_{2n}^{(1)}(x) dx = -\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{8(2n-1)!\Gamma(2-n)\Gamma(n+5/2)}. \quad (41)$$

Правая часть в (41) обращается в нуль при $n > 1$. Поэтому в сумме (40) останется только первое слагаемое

$$W = -\frac{2}{5} \cdot 2\pi \tilde{c}^3 GA Q_2^{(-1)}(i0) a_1 = -\frac{4\pi M \tilde{c}^5}{5 R^4} A \frac{Q_2^{(-1)}(i0)}{s_1^+} \tilde{a}_1. \quad (42)$$

Подставим в формулу (42) значения A , $Q_2^{(-1)}(i0)$ и s_1^+ . В результате окончательно получаем выражение для дополнительной потенциальной энергии

$$W = \frac{64}{15\pi} \frac{M^2 \tilde{c}^5}{G R^8} \tilde{a}_1. \quad (43)$$

Заметим, что коэффициент \tilde{a}_1 определяется из системы (21) и является безразмерной величиной. Теперь из формулы (35) находим критическое значение скручивающего момента, которое приводит к росту трещины

$$M_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \sqrt{\gamma G} \left(\frac{R^8}{\tilde{c}^3 \tilde{a}_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

Таблица 2 — Критическое значение скручивающего момента

$r = R / \tilde{c}$	1.25	1.3	1.5	2.0	3.0	4.0
$\frac{M_{кр}}{\sqrt{\gamma G}} \frac{\tilde{c}^{3/2}}{R^4}$	2.003	2.010	2.055	2.082	2.0875	2.088

В случае, когда граница стержня достаточно удалена от трещины, справедлива асимптотическая формула

$$\tilde{a}_1 = \frac{4}{3\pi} + O(\varepsilon^4), \quad (45)$$

где $\varepsilon = \frac{\tilde{c}}{R}$. Тогда

$$M_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \sqrt{\gamma G} \frac{\sqrt{3} \sqrt{\pi}}{2} \frac{R^4}{\tilde{c}^{3/2}} + O(\varepsilon^4) = \frac{3\pi\sqrt{\pi}}{8} \sqrt{\gamma G} \frac{R^4}{\tilde{c}^{3/2}} + O(\varepsilon^4). \quad (46)$$

Интересно заметить, что критическое значение крутящего момента соответствует следующему значению коэффициента интенсивности напряжений на границе трещины:

$$k_{III}^{кр} = 2\sqrt{\gamma G}. \quad (47)$$

Последняя формула согласуется с силовым критерием Ирвина – Орована хрупкого разрушения тела [7].

Список использованных источников

1. Griffith, A.A. The phenomenon of rupture and flows in solids [Text] / A.A. Griffith // Philos. Trans. Roy. Soc. — 1920. — A. 221. — P. 163 – 198.
2. Sneddon, I.N. The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder [Text] / I.N. Sneddon, R.J. Tait // Int. J. Eng. Sci. — 1963, V. 1, No 3. — P. 391 – 409.
3. Sneddon, I.N. A note on the distribution of stress in a cylinder containing a penny-shaped crack [Text] / I.N. Sneddon, J.T. Welch // Int. J. Eng. Sci. — 1963, V. 1, No 3. — P. 411 – 419.
4. Горбачев, В.И. Эффективные свойства неоднородного стержня при кручении [Текст] / В.И. Горбачев, Л.В. Олехова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2007. № 5. — С. 41 – 48.
5. Кудрявцев, Б.А. Кручение и растяжение цилиндра с внешним кольцевым разрезом [Текст] / Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон // ПММ. — 1973. Т. 37, № 2. — С. 316 – 325.
6. Нейбер, Г. Концентрация напряжений [Текст]: пер. с нем / Г. Нейбер; под ред. А.И. Лурье. — М.: Гостехиздат, 1947. — 204 с.
7. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения [Текст] / В.З. Партон, Е.М. Морозов // Глав. ред. физ.-мат. лит. — М.: Наука, 1985. — 504 с.
8. Проценко, В.С. Формулы переразложения для решений уравнения Лапласа в цилиндрических и вытянутых сфероидальных координатах [Текст] / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1983. № 7. — С. 19 – 21.

Поступила в редакцию 13.04.2013.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.