УДК 669.018 - 419.8(035)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПРЕДЕЛАМИ ПРОЧНОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЖАТИИ, РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

На начальных этапах проектирования конструкций из полимерных композитов, как правило, имеют место ограниченные сведения об их физико-механических характеристиках (ФМХ) и прочностных свойствах. Чаще всего это связано с желанием проектировщика с опережением оценить перспективность нового материала при его использовании в той или иной конструкции еще до того, как будут сделаны материальные или временные затраты на получение всего комплекса ФМХ и прочностных свойств этого материала.

Как правило, в ранних публикациях материаловедов о разрабатываемых или новых материалах содержатся сведения о пределе прочности при изгибе σ_{euse} и соответствующем ему модуле упругости E_{use} . Эти характеристики получают на сравнительно простых стандартных образцах, испытуемых по трехточечной схеме, фиксируя разрушающий изгибающий момент, а затем вычисляя предел прочности по известной формуле, строго справедливой для однородного материала [1, 2]:

$$\sigma_{guse} = \frac{M_{usep}}{W} = \frac{6M_{usep}}{bh^2}, \qquad (1)$$

где W – момент сопротивления сечения образца шириной b и высотой h. Одновременно вычисляется модуль упругости E_{use} .

Полученные характеристики в целом позволяют сравнивать по ним испытанный материал с другими, но не дают возможности исследовать напряженно-деформированное состояние изделия и оценить по тем или иным критериям несущую способность (предельное состояние) природного или полимерного композита.

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) являются физически однородными по макроструктуре, но не изотропными материалами и, кроме того, разномодульными, у которых модули упругости при растяжении E^{\oplus} и сжатии E^- различны [2 – 4], как и пределы прочности σ_{g}^{\oplus} и σ_{g}^- . Таким образом, для ПКМ, строго говоря, формула (1) не применима, а σ_{guse} является некоторым условным понятием и для определения напряженно-деформированного состояния конструкций из ПКМ не используются.

В силу отмеченных выше причин, связанных зачастую с отсутствием информации о σ_{e}^{-} ПКМ, но при ее наличии о σ_{e}^{\oplus} , определение кото-

рого для тонких образцов не вызывает затруднений, ниже сделана попытка установления приближенной взаимосвязи условного предела прочности ПКМ при изгибе с его реальными пределами прочности при растяжении и сжатии.

Исследуем эффективность ряда допущений, принимаемых при установлении взаимосвязи σ_{euse} , σ_e^{\oplus} и σ_e^{-} . Автор [5], исходя из того, что эпюра напряжений при поперечном изгибе образца из древесины имеет характер ломаной кривой и прочность при сжатии значительно меньше, чем при растяжении, приходит к зависимости в виде

$$\sigma_{euse} = \frac{M_{usep}}{W} = \sigma_{e}^{-} \frac{3\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{e}^{-}}{\sigma_{e}^{\oplus} + \sigma_{e}^{-}}.$$
 (2)

Кроме того, в [5] отмечается, что Т. Дзюба рассмотрел частотное распределение прочности при изгибе при заданных распределениях σ_{e}^{-} и σ_{e}^{\oplus} и установил, что σ_{euse} в большей мере зависит от σ_{e}^{\oplus} , чем от σ_{e}^{-} . Автор [5] провел количественный анализ зависимости (2), результаты которого показали, что отклонения опытных и расчетных данных для образцов из древесины лежат в пределах от -10 % до +14 %.

Ниже зависимость (2) будет нами апробирована на массиве данных, заимствованных из разных источников и собранных в [3] и [4] среди других полученных нами формул, вытекающих из различных допущений, общим для которых является предположение о линейно упругом поведении материала образца вплоть до разрушения.

Второе допущение касается предполагаемой причины разрушения.

1. Пределы прочности σ_e[−] и σ_e[⊕] достигаются одновременно в крайних волокнах изгибаемого образца. Здесь и далее принимается одноплоскостной закон распределения относительных деформаций (рис. 1)

$$\varepsilon_{\chi} = Ay + B, \qquad (3)$$

где А и В-неизвестные коэффициенты.

Для разномодульного ПКМ

$$\sigma_{\chi} = \boldsymbol{E}^{\oplus} \varepsilon_{\chi}$$
 при $\varepsilon_{\chi} > 0;$ (4)

$$\sigma_{\chi} = E^{-} \varepsilon_{\chi}$$
 при $\varepsilon_{\chi} < 0.$ (5)

Картина распределения деформаций и напряжений в образце показана на рис. 1.

Положение нейтральной оси из (3) при $\varepsilon_{\chi} = 0$ определяется ординатой

$$y_0 = -\frac{B}{A}.$$
 (6)



Рисунок 1 – Распределение деформаций и напряжений в сечении образца при изгибе

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_x^{\oplus}(h-y_0) + \sigma_x^- y_0 = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_{x}^{\oplus} \frac{(h-y_{0})^{2}}{3} - \sigma_{x}^{-} \frac{y_{0}^{2}}{3} = M_{use}.$$
 (8)

Максимальные напряжения в крайних растянутых σ_x^{\oplus} и сжатых волокнах σ_x^- при линейно-упругом деформировании равны:

$$\sigma_{X}^{\oplus} = E^{\oplus} (Ah + B);$$

$$\sigma_{X}^{-} = E^{-}B.$$
(9)

Подстановка (6) и (9) в уравнения (7) и (8) приводит к зависимостям

$$E^{\oplus}(Ah+B)^2 - E^-B^2 = 0;$$
 (10)

$$E^{\oplus}(Ah+B)^3 - E^-B^3 = 3M_{use}A^2,$$
 (11)

где *E*[⊕], *E*[−] – модули упругости при растяжении и сжатии разномодульных ПКМ.

Предполагая, что испытания образцов на растяжение проведены и E^{\oplus} и σ_{s}^{\oplus} уже известны, в момент разрушения образца из (9) имеем

$$(Ah+B) = \frac{\sigma_{\theta}^{\oplus}}{E^{\oplus}}.$$
 (12)

Из уравнения (10) с учетом (12) получим

$$E^{-}B^{2} = \frac{(\sigma_{e}^{\oplus})^{2}}{E^{\oplus}}.$$
 (13)

Тогда из (11) с учетом (12) коэффициент A определяется формулой

$$A = \frac{(\sigma_{e}^{\oplus})^{2}h}{3M_{u3e}E^{\oplus}},$$
(14)

или с учетом (1)

$$A = \frac{2(\sigma_{e}^{\oplus})^{2}}{hE^{\oplus}\sigma_{euse}}.$$
 (15)

Подставив в (12) А из (15), определим коэффициент

$$B = \frac{\sigma_{e}^{\oplus}(\sigma_{euse} - 2\sigma_{e}^{\oplus})}{E^{\oplus}\sigma_{euse}}.$$
 (16)

Модуль упругости при сжатии E^- определим из (13) с учетом (16):

$$\boldsymbol{E}^{-} = \boldsymbol{E}^{\oplus} \frac{\sigma_{\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{u} \boldsymbol{s} \boldsymbol{e}}^{2}}{\left(2\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus} - \sigma_{\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{u} \boldsymbol{s} \boldsymbol{e}}\right)^{2}}.$$
 (17)

Их второго уравнения (9) при $\sigma_x^- = \sigma_e^-$ с учетом (17) получим искомую связь между σ_e^- , σ_e^\oplus и σ_{euse} :

$$\sigma_{\mathbf{g}}^{-} = \frac{\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} \sigma_{\mathbf{g} \boldsymbol{u} \boldsymbol{z} \mathbf{z}}}{2\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} - \sigma_{\mathbf{g} \boldsymbol{u} \boldsymbol{z} \mathbf{z}}}.$$
(18)

Разрешив (18) относительно $\sigma_{в \, u 3 e}$, получим

$$\sigma_{euse} = \frac{2\sigma_{e}^{-}\sigma_{e}^{\oplus}}{\sigma_{e}^{-} + \sigma_{e}^{\oplus}}.$$
 (19)

Как видно, формула (19) является частью зависимости (2), которая превышает (19) на добавку $\frac{\sigma_{e}^{-}(\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{e}^{-})}{\sigma_{e}^{-} + \sigma_{e}^{\oplus}}$.

2. Предел прочности σ_{g}^{-} при изгибе первоначально достигается в крайнем волокне сжатой зоны и на всей ее глубине. При этом в крайнем волокне растянутой зоны напряжения достигают σ_{g}^{\oplus} и происходит разрушение образца (рис. 2).

В этом случае уравнения равновесия (7) и (8) имеют вид

$$\sigma_{\boldsymbol{\sigma}}^{-}(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{y}_{0})-\frac{\sigma_{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{y}_{0}}{2}=0; \qquad (20)$$

$$\sigma_{e}^{-} \frac{(h - y_{0})^{2}}{2} + \sigma_{e}^{\oplus} \frac{y_{0}^{2}}{3} = \frac{\sigma_{euse}h^{2}}{6}.$$
 (21)



Рисунок 2 – Разрушение образца, инициируемое в сжатой зоне ($\sigma_{e}^{-} < \sigma_{e}^{\oplus}$)

Из уравнения (20) получим положение нейтральной оси образца

$$y_{0} = \frac{2\sigma_{e}^{-}h}{\sigma_{e}^{\oplus} + 2\sigma_{e}^{-}}.$$
 (22)

Подставив (22) в (21), после преобразований определим σ_{e}^{-} :

$$\sigma_{\mathbf{g}}^{-} = \sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} \frac{\left[\sqrt{\left(3\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} - 2\sigma_{\mathbf{g}_{\boldsymbol{U}3\mathcal{B}}}\right)^{2} + 4\sigma_{\mathbf{g}_{\boldsymbol{U}3\mathcal{B}}}\left(3\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} - \sigma_{\mathbf{g}_{\boldsymbol{U}3\mathcal{B}}}\right) - \left(3\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} - 2\sigma_{\mathbf{g}_{\boldsymbol{U}3\mathcal{B}}}\right)\right]}{2\left(3\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus} - \sigma_{\mathbf{g}_{\boldsymbol{U}3\mathcal{B}}}\right)}.(23)$$

Разрешив (23) относительно $\sigma_{e\, u 3 e}$, получим

$$\sigma_{euse} = \frac{\sigma_{e}^{\oplus}\sigma_{e}^{-} \left(3\sigma_{e}^{\oplus} + 8\sigma_{e}^{-}\right)}{2\left(\sigma_{e}^{\oplus} + 2\sigma_{e}^{-}\right)^{2}}.$$
(24)

3. Предел прочности σ_{e}^{\oplus} при изгибе первоначально достигается в крайнем волокне растянутой зоны и на всей ее глубине. При этом в крайнем волокне сжатой зоны напряжения достигают σ_{e}^{-} и происходит разрушение образца (рис. 3).

В этом случае уравнения равновесия (7) и (8) имеют вид

$$\sigma_{\boldsymbol{\sigma}}^{-} \frac{(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{y}_{0})}{2} - \sigma_{\boldsymbol{\sigma}}^{\oplus} \boldsymbol{y}_{0} = 0; \qquad (25)$$

$$\sigma_{e}^{-} \frac{(h - y_{0})^{2}}{3} + \sigma_{x}^{\oplus} \frac{y_{0}^{2}}{2} = \frac{\sigma_{euse}h^{2}}{6}.$$
 (26)

Из уравнения (25) положение нейтральной оси образца определяется формулой

$$y_0 = \frac{\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\oplus} h}{2\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\oplus} + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-}}.$$
 27)



Рисунок 3 – Разрушение образца, инициируемое в растянутой зоне ($\sigma_{e}^{\oplus} < \sigma_{e}^{-}$)

Подставив (27) в (26), после преобразований определим
$$\sigma_{e}^{-}$$
:

$$\sigma_{e}^{-} = 4\sigma_{e}^{\oplus} \frac{\left[\sqrt{\left(2\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{euse}\right)^{2} + \sigma_{euse}\left(3\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{euse}\right) - \left(2\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{euse}\right)\right]}{2\left(3\sigma_{e}^{\oplus} - \sigma_{euse}\right)}.(28)$$

4. Пределы прочности σ_{e}^{\oplus} и σ_{e}^{-} при изгибе первоначально достигаются в крайних волокнах соответствующих зон и на всей их глубине (рис. 4).



Рисунок 4 – Разрушение образца, инициируемое в крайних волокнах растянутой и сжатой зон

В этом случае уравнения равновесия (7) и (8) имеют вид

$$\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-}(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{y}_{0})-\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\oplus}\boldsymbol{y}_{0}=0; \qquad (29)$$

$$\sigma_{e}^{-} \frac{(h - y_{0})^{2}}{2} + \sigma_{x}^{\oplus} \frac{y_{0}^{2}}{2} = \frac{\sigma_{euse}h^{2}}{6}.$$
 (30)

Из (29) определяется положение нейтральной оси

$$y_0 = \frac{\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus} h}{\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus} + \sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{-}}.$$
 (31)

Подставив (31) в (25), после преобразований определим σ_{e}^{-} :

$$\sigma_{\mathbf{e}}^{-} = \sigma_{\mathbf{e}}^{\oplus} \frac{\left[\sqrt{\left(3\sigma_{\mathbf{e}}^{\oplus} - 2\sigma_{\mathbf{e}\,\mathbf{u}3\mathbf{e}}\right)^{2} + 4\sigma_{\mathbf{e}\,\mathbf{u}3\mathbf{e}}\left(3\sigma_{\mathbf{e}}^{\oplus} - \sigma_{\mathbf{e}\,\mathbf{u}3\mathbf{e}}\right) - \left(3\sigma_{\mathbf{e}}^{\oplus} - 2\sigma_{\mathbf{e}\,\mathbf{u}3\mathbf{e}}\right)\right]}{2\left(3\sigma_{\mathbf{e}}^{\oplus} - \sigma_{\mathbf{e}\,\mathbf{u}3\mathbf{e}}\right)}.(32)$$

Отметим, что при реализации математических моделей, определяющих взаимосвязь σ_{e}^{\oplus} , σ_{e}^{-} и σ_{euse} , при допущениях, рассмотренных в случаях 2, 3 и 4, соответствующие им формулы (23), (28) и (32) имеют весьма громоздкий вид. Гораздо проще выглядят соответствующие зависимости взаимосвязи, разрешенные относительно σ_{euse} аналогично (2) и (19). Приведем эти зависимости:

– для случая 2, аналог (24):

$$\sigma_{euse} = \frac{\sigma_{e}^{\oplus}\sigma_{e}^{-}(3\sigma_{e}^{\oplus} + 8\sigma_{e}^{-})}{(2\sigma_{e}^{\oplus} + \sigma_{e}^{-})^{2}}; \qquad (33)$$

– для случая 3, аналог (28):

$$\sigma_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{u}\boldsymbol{3}\boldsymbol{\theta}} = \frac{\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus}\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{-} \left(8\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus} + 3\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{-}\right)}{\left(2\sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{\oplus} + \sigma_{\boldsymbol{\theta}}^{-}\right)^{2}}; \qquad (34)$$

– для случая 4, аналог (32):

$$\sigma_{euse} = \frac{3\sigma_{e}^{\oplus}\sigma_{e}^{-}}{\sigma_{e}^{\oplus} + \sigma_{e}^{-}}.$$
(35)

Для проверки достоверности допущений, принятых при реализации четырех математических моделей взаимосвязи пределов прочности ПКМ при изгибе, растяжении и сжатии (3), (18), (23), (29) и (32) или их аналогов (19), (33), (34) и (35) по данным [3 - 4], содержащим все три предела прочности, для 22 различных материалов были вычислены пределы прочности при сжатии σ_{e}^{-meop} с использованием σ_{e}^{\oplus} и σ_{euse} , содержащихся в источниках информации, а затем эти σ_{e}^{-meop} сравнены с соответствующими приведенными в источниках $\sigma_{e}^{-эксп}$. Результаты этого сравнения представлены в таблице.

Анализ таблицы показал, что первой математической модели разрушения ПКМ при изгибе, реализующей допущение об одновременном достижении σ_{e}^{\oplus} и σ_{e}^{-} в крайних волокнах изгибаемого образца, не удовлетворяет ни один из материалов.

Таблица – Сравнение экспериментальных значений $\sigma_{e}^{-эксп}$ с теоретическими, полученными по различным математическим моделям

Nº ⊓/⊓	Материал	Ис- точ- ник	Экспериментальные данные, МПа			Вычисленные σ_{e}^{-meop}			
			σ^\oplus_{6}	σ_{e}^{-}	σ _{в изг}	формула			
						(18), (19)	(23), (33)	(28), (34)	(32), (35)
1	AF-4C	[4]	645	395	607	573	296	432	295
2	S-2-1C	[4]	1010	517	750	596	339	490	332
3	АГ-4В	[4]	68	227	200	-212	303	4555	3400
4	М-5-7ДДП	[4]	192	110	182	173	89	130	89
5	П-5-5	[4]	37	136	171	-65	-450		-105
6	П-5-2	[4]	61	125	149	-337	152	370	267
7	П-5-7	[4]	74	91	197	-297	235	797	583
8	РТП-200 НС	[4]	41	110	112	-153	141	568	417
9	КМУ-1	[4]	740	300	800	871	413	609	417
10	КМУ-1у	[4]	1020	400	1150	1317	605	896	614
11	КМУ-1л	[4]	550	350	800	1466	483	747	518
12	КМУ-З	[4]	1100	450	1300	1589	700	1041	715
13	КМУ-3л	[4]	680	390	1000	14733	608	943	654
14	КМУ-Злн	[4]	700	400	1150	3220	756	1215	847
15	П-5-13 (основа)	[4]	102	164	181	803	127	211	148
16	П-5-13 (уток)	[4]	110	164	144	208,4	82	124	85
17	П-5-12	[4]	37	202	91	-198	94	233	168
18	SP-313 (0°)	[3]	1390	252	1413	1436	711	1042	712
19	SP-313 (90°)	[3]	34,5	27,6	75,1	-425	65	128	91
20	AS/3004 (0°)	[3]	1322	719	1348	1375	679	996	681
21	AS/3004 (90°)	[3]	35,3	133	91,5	-154,5	103	308	224
22	Celion 3000	[5]	1785	1221	1975	2210	1031	1522	1043

Это же заключение относится к четвертой математической модели разрушения ПКМ при изгибе, которая, по существу, повторяет первую модель, дополняя ее допущением о достижении σ_{g}^{\oplus} и σ_{g}^{-} на всей глубине соответствующих зон растяжении и сжатия в изгибаемом образце.

Разрушение подавляющего числа материалов таблицы (15 из 22) соответствует второй математической модели, реализующей допущение о том, что предел прочности $\sigma_{\mathbf{g}}$ при изгибе образца первоначально возникает в крайнем волокне сжатой зоны и достигается на всей ее глубине, когда в крайнем волокне растянутой зоны напряжения соответствуют $\sigma_{\mathbf{g}}^{\oplus}$.

При этом расхождение между экспериментальными и расчетными (теоретическими) значениями σ_{e}^{-} имеют довольно широкий диапазон, превышающий установленный автором работы [5] для образцов из древесины при реализации эмпирической математической модели (2). Следует также отметить, что модели (2) не соответствует ни один из материалов таблицы.

Пять материалов из таблицы реализуют третью математическую модель, согласно которой σ_{g}^{\oplus} при изгибе первоначально достигается в крайнем волокне растянутой зоны на всей ее глубине, а в крайнем волокне сжатой зоны напряжения достигают σ_{e}^{-} и происходит разрушение образца.

Необходимо обратить внимание, что практическое использование установленной зависимости между σ_{e}^{\oplus} , σ_{e}^{-} и σ_{euse} реализуется тогда, когда в источнике информации приводятся значения, σ_{e}^{\oplus} и σ_{euse} , по которым следует определить σ_{e}^{-} для анализа несущей способности изделия из ПКМ. Анализ таблицы позволяет установить, что для этой цели необходимо воспользоваться формулами (23) или (33), если $\sigma_{euse} > \sigma_{e}^{\oplus}$.

В трех из пяти случаев формула (28) или (34) (третья модель) соответствует условию $\sigma_{euse} < \sigma_e^{\oplus}$ (1, 2 и 4 материалы таблицы). Однако в двух случаях (для материалов 16 и 17) имеет место противоречие установленной закономерности: эффективной является третья модель при условии $\sigma_{euse} > \sigma_e^{\oplus}$ для материалов 16 и 17. Использование же второй модели для этих материалов приводит к удвоенному запасу.

Выводы

1. В результате проведенных исследований установлены приближенные зависимости между пределами прочности ПКМ при сжатии, растяжении и изгибе, позволяющие с приемлемой для начальных стадий проектирования композитных конструкций определить предел прочности материала на сжатие при известных пределах прочности при изгибе и растяжении.

2. Многообразие особенностей строения ПКМ, в значительной части связанных с технологией их изготовления, по-видимому, является основной причиной соответствия начала их разрушения при изгибе не только в сжатой зоне по математической модели 2, но и растянутой зоне по модели 3, хотя и в более редких случаях, а в исключительных случаях и по эмпирической модели (2).

3. Результаты проведенных исследований следует считать предварительными, требующими дальнейшего широкого анализа для других характеристик ПКМ, в частности модулей упругости и сдвига. Этот анализ, по-видимому, потребует и новых математических моделей, описывающих характер деформирования материала.

Список использованных источников

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

2. Композиционные материалы [Текст]: справ. / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

3. Физические и механические свойства стеклопластиков [Текст]: справ. пособие / под ред. Ю.М. Молчанова. – Рига: Зинатне, 1969. – 267 с.

4. Конструкционные материалы для летательных аппаратов [Текст]: учеб. пособие /П.Ф. Вербенец, В.Е. Гайдачук, Я.С. Карпов и др. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1984. – 109 с.

5. Соболев, Ю.С. Соотношение между пределами прочности древесины при статическом изгибе, растяжении и сжатии [Текст] / Ю.С. Соболев // сб. науч. тр. Моск. лесотехн. ин-та. – М., 1982. – Вып.140. – С. 85 – 89.

6. Кортен, Х. Разрушение армированных пластиков [Текст]: пер. с англ. / Х. Кортен; под ред. Ю.М. Тарнопольского. – М.: Химия, 1964. – 168 с.

7. Углеродные волокна [Текст]: пер. с япон. / под ред. С. Симамуры. – М.: Мир, 1987. – 304 с.

Поступила в редакцию 03.04.2013. Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.