

УДК 534.113

С.С. Куреннов, канд. техн. наук,
А.А. Кузяшева,
А.Г. Поляков

РАСЧЕТ ПОДАТЛИВОСТИ КЛЕЕВОГО СЛОЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИЙ СОЕДИНЕНИЯ

Введение. Одна из важнейших задач при создании новых материалов и контроле качества изделий – определение упругих свойств материала. Эта задача особенно актуальна при создании многофазных материалов, например композитов и сплавов, так как в этом случае упругие свойства зависят от механических характеристик отдельно взятых фаз материала, и теоретическое предсказание этой зависимости может быть затруднительным. Все существующие методы определения упругих свойств материалов можно подразделить на статические и динамические. Статические методы основаны на экспериментальном определении зависимости между нагрузкой и деформацией образца [1]. Динамические методы можно подразделить на трансмиссионно-волновые и резонансные. Трансмиссионно-волновые методы основаны на измерении скорости распространения упругих волн в образце, которая является функцией упругих свойств и плотности материала, а в общем случае также частоты волны (дисперсия) и геометрических параметров образца (геометрическая дисперсия). Существует два типа резонансных методов – импульсные и резонансные методы с непрерывным возбуждением. Импульсные методы основаны на возбуждении колебаний образца с помощью кратковременного (импульсного) воздействия, имеющего широкополосный амплитудно-частотный спектр, и регистрации отклика образца. Таким импульсом может быть, например, удар молотком по образцу [2 – 5]. Анализ спектра отклика образца позволяет идентифицировать резонансные частоты его колебаний. Эти частоты зависят от геометрических размеров и формы образца, граничных условий, а также плотности и упругих свойств материала. Как правило, используют граничные условия, близкие к свободным, и в связи с этим оптимальными являются бесконтактное возбуждение и регистрация колебаний, позволяющие исключить влияние возбудителя и приемника на колебания образца. Резонансные методы с непрерывным возбуждением основаны на возбуждении колебаний образца с помощью непрерывного воздействия с плавно изменяющейся частотой и регистрации распределения амплитуды колебаний по поверхности образца или в нескольких точках [6 – 8]. В качестве одной из разновидностей динамических методов можно рассматривать атомно-силовую акустическую микроскопию, основанную на изменении резонансной частоты кантилевера атомно-силового микроскопа при его

взаимодействии с поверхностью исследуемого образца [9]. В качестве образцов в резонансных методах определения упругости широко используют тонкие пластины или балки различной формы. При этом приходится решать обратную задачу теории колебаний, т.е. задачу определения упругих свойств материала по известным собственным частотам колебаний образца. Данная задача решается итеративными методами и сводится к решению последовательности прямых задач. На каждом шаге итерации задается приближение упругих свойств, по которому рассчитывают резонансные частоты, а также величину невязки между расчетными и экспериментальными частотами. Последовательность приближений строится таким образом, чтобы минимизировать функцию невязки, для чего можно использовать стандартные методы оптимизации, например метод градиентного спуска. Решение последовательности прямых задач можно проводить аналитическими методами, вариационными методами, например методом Рэлея – Ритца, или с помощью МКЭ.

В работе [10] было показано, что статический метод определения упругих параметров клеевого слоя обладает низкой чувствительностью. Обусловлено это тем, что влияние клеевого слоя на изгибную жесткость пакета склеенных пластинок мало. Поэтому представляется перспективным для решения поставленной задачи применить резонансный метод. Этот подход применяют для определения упругих постоянных образцов в виде пластин [11], цилиндров [12], балок [13]. Целью работы является построение алгоритма для определения модуля сдвига клея по частотам собственных колебаний соединения. При этом полагаем, что материал соединительного слоя обладает упругими свойствами.

Решение прямой задачи. Рассмотрим клеевое соединение, показанное на рисунке

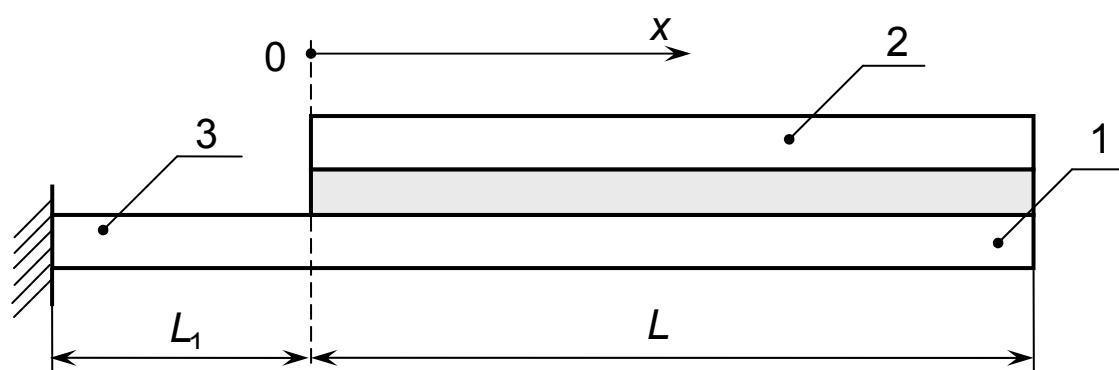


Схема образца

Полагаем, что материал и толщина третьего участка идентичны параметрам первого (нижнего) несущего слоя.

В работах [2, 3, 6] приведено решение задачи о свободных

колебаниях соединения с двумя законцовками. Согласно модели Голанда и Рейсснера уравнения движения соединяемых слоев имеют следующий вид:

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} + (-1)^k \tau = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \rho_k \delta_k; \quad \frac{\partial Q_k}{\partial x} - (-1)^k \sigma = \rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2; \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} - s_1 \tau - Q_1 = \rho_1 J_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial x} - s_2 \tau - Q_2 = \rho_2 J_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial t^2},$$

где N_k , Q_k и M_k – продольные, поперечные усилия и изгибающие моменты в k -м слое; δ_k – толщина слоя; s_k – расстояние от клеевого шва до оси инерции слоя (для симметричных слоев $s_k = 0,5 \delta_k$); ρ_k – плотность слоя; J_k – момент инерции слоя; τ и σ – касательные и нормальные напряжения в клеевом слое

Напряжения в клее

$$\tau = \frac{1}{P_c} \left(u_1 - u_2 - s_1 \frac{dw_1}{dx} - s_2 \frac{dw_2}{dx} \right); \quad \sigma = K(w_2 - w_1), \quad (2)$$

где u_i – продольное перемещение точек на нейтральной оси слоёв; P_c – податливость соединительного слоя, например в первом приближении, без учета межслойного сдвига $P_c = \delta_c G_c^{-1}$ (δ_c и G_c соответственно толщина и модуль сдвига соединительного слоя); K – коэффициент упругости соединительного слоя (в первом приближении $K = E_c \delta_c^{-1}$).

На третьем участке движение балки описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \frac{\rho_1 \delta_1}{B_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad D_1 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \rho_1 \delta_1 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} - \rho_1 J_1 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Используя закон Гука $N_k = B_k \varepsilon_k$, кинематические соотношения

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \varepsilon_k, \quad \text{уравнения изгиба балки} \quad \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = -\frac{M_k}{D_k} \quad (D_k \text{ – изгибная}$$

жесткость), уравнения (1) и (2) можно записать в виде системы

$$\mathbf{A}_4^0 \frac{\partial^4 \vec{V}}{\partial x^4} + \mathbf{A}_2^0 \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \mathbf{A}_1^0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \mathbf{A}_0^0 \vec{V} + \mathbf{A}_0^2 \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} + \mathbf{A}_2^2 \frac{\partial^4 \vec{V}}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где $\vec{V} = (w_1 \quad w_2 \quad u_1 \quad u_2)^T$, и матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_4^0 &= \begin{pmatrix} P_c D_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & P_c D_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2^0 = \begin{pmatrix} -s_1^2 & -s_1 s_2 & \cdot & \cdot \\ -s_1 s_2 & -s_2^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & B_1 P_c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & B_2 P_c \end{pmatrix}; \\
\mathbf{A}_1^0 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & s_1 & -s_1 \\ \cdot & \cdot & s_2 & -s_2 \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot \\ -s_1 & -s_2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_0^0 = \begin{pmatrix} K P_c & -K P_c & \cdot & \cdot \\ -K P_c & K P_c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{pmatrix}; \\
\mathbf{A}_0^2 &= P_c \begin{pmatrix} \rho_1 \delta_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_2 \delta_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\rho_1 \delta_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\rho_2 \delta_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2^2 = -P_c \begin{pmatrix} \rho_1 J_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_2 J_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Краевые условия однородные

$$Q_k|_{x=L} = N_k|_{x=L} = M_k|_{x=L} = 0; \quad Q_2|_{x=0} = N_2|_{x=0} = M_2|_{x=0} = 0;$$

$$Q_1|_{x=0} = Q_3|_{x=0}; \quad N_1|_{x=0} = N_3|_{x=0}; \quad M_1|_{x=0} = M_3|_{x=0};$$

$$u_1|_{x=0} = u_3|_{x=0}; \quad w_1|_{x=0} = w_3|_{x=0}; \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial w_3}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad (5)$$

$$u_3|_{x=-L_1} = w_3|_{x=-L_1} = \left. \frac{\partial w_3}{\partial x} \right|_{x=-L_1} = 0; \quad k = 1, 2;$$

Решение систем (3) и (4) ищем в виде суперпозиции гармонических колебаний

$$w_1 = X^{(1)}(x) e^{i\omega t}; \quad w_2 = X^{(2)}(x) e^{i\omega t}; \quad w_3 = X^{(3)}(x) e^{i\omega t};$$

$$u_1 = X^{(4)}(x) e^{i\omega t}; \quad u_2 = X^{(5)}(x) e^{i\omega t}; \quad u_3 = X^{(6)}(x) e^{i\omega t}.$$

Подставив в (4) и сократив временной множитель, получим

$$\mathbf{A}_4^0 \frac{d^4 \vec{X}}{dx^4} + \left(\mathbf{A}_2^0 - \omega^2 \mathbf{A}_2^2 \right) \frac{d^2 \vec{X}}{dx^2} + \mathbf{A}_1^0 \frac{d\vec{X}}{dx} + \left(\mathbf{A}_0^0 - \omega^2 \mathbf{A}_0^2 \right) \vec{X} = 0,$$

где вектор $\vec{X} = \left(X^{(1)} \quad X^{(2)} \quad X^{(4)} \quad X^{(5)} \right)^T$.

Решение данной системы линейных однородных дифференциальных уравнений ищем в виде $\vec{X} = C \vec{h} e^{\lambda x}$, где C - произвольная постоянная. Записав систему в матричном виде, получим

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}} = 0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{A} = \lambda^4 \mathbf{A}_4^0 + \left(\mathbf{A}_2^0 \lambda^2 - \omega^2 \mathbf{A}_2^2 \right) \lambda^2 + \mathbf{A}_1^0 \lambda + \left(\mathbf{A}_0^0 - \omega^2 \mathbf{A}_0^2 \right).$$

Здесь $\vec{\mathbf{h}}$ – собственный вектор матрицы \mathbf{A} .

Приравняв нулю определитель матрицы \mathbf{A} , получим дисперсионное соотношение, связывающее волновые числа λ и частоту ω . Это соотношение имеет вид многочлена 12-й степени по λ и 8-й степени по ω (только четные степени). Решение системы имеет вид

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{12} C_i \vec{\mathbf{h}}_i e^{\lambda_i x},$$

где $\vec{\mathbf{h}}_i$ – нетривиальные решения системы (6), соответствующие волновым числам $\lambda_i(\omega)$ и частоте ω . Поскольку дефект матрицы $\mathbf{A}(\lambda_i)$ равен единице, то векторы $\vec{\mathbf{h}}_i$ определяются с точностью до произвольного множителя C_i .

Решение задачи о несвязанных продольных и поперечных колебаниях балки (3) известно

$$X^{(3)} = \sum_{j=13}^{16} C_j e^{\lambda_j x}; \quad X^{(6)} = \sum_{j=17}^{18} C_j e^{\lambda_j x},$$

где $\lambda_{13, \dots, 16} = \pm \sqrt{-\frac{\omega}{2D_1} \left(J_1 \omega \pm \sqrt{(J_1 \omega)^2 + 4D_1 \rho_1 \delta_1} \right)}$, $\lambda_{17, 18} = \pm j \omega \sqrt{\frac{\rho_1 \delta_1}{B_1}}$

(здесь i – мнимая единица).

Для поиска собственных частот колебаний ω необходимо удовлетворить краевым условиям и условиям сопряжения (5), что приводит к системе из 18 линейных однородных уравнений относительно $\vec{\mathbf{C}} = (C_1, \dots, C_{18})^T$, где коэффициенты системы зависят от частоты ω :

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 0. \quad (7)$$

Система (7) имеет нетривиальное решение, если

$$\det \mathbf{B}(\omega) = 0. \quad (8)$$

В явном виде записать определитель и решить полученное уравнение затруднительно, поскольку определитель имеет 18-й порядок. Поэтому целесообразно применить численный метод решения уравнения (8). Вычисления показывают, что определитель принимает только действительные значения. Поэтому можно путем перебора ряда значений ω и вычислений $\det \mathbf{B}(\omega)$ найти интервалы, на которых

определитель изменяет знак, и потом на этих интервалах для нахождения собственных частот ω_j использовать, например, метод секущих. В итоге получаем упорядоченное множество $\{\omega_j\}$.

Решение обратной задачи. Из двух параметров соединительного слоя, используемых в модели – податливости на сдвиг (P_c) и жесткости на растяжение-сжатие (K) основное влияние на низшие частоты колебаний будет оказывать податливость на сдвиг P_c . Поэтому параметр K оправдано вычислять, используя модуль сдвига, найденный из P_c , считая клеевой слой изотропным и задавая коэффициент Пуассона.

Для решения обратной задачи вводят функцию невязки

$$F = \sum_{j=1}^N \left(\omega_j(P_c) - \omega_j^* \right)^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

где N – количество собственных частот, используемых для анализа; $\omega_j(P_c)$ – теоретически рассчитанные собственные частоты; ω_j^* – экспериментально найденные собственные частоты.

Число определяемых в ходе эксперимента собственных частот N зависит от имеющегося оборудования. В работах [2, 3, 6] экспериментальными методами исследуются колебания клеевых соединений и регистрируются первые 3 – 5 собственных частоты.

Решение обратной задачи сводится к построению последовательности приближений $P_{c,m}$, минимизирующей функцию невязки (9) (m – номер итерации). В данном случае имеет место однопараметрическая оптимизация. Минимизация выражения (9) сводится к решению уравнения

$$f(P_c) = \frac{dF}{dP_c} = \sum_{j=1}^N 2 \left(\omega_j(P_c) - \omega_j^* \right) \frac{d\omega_j(P_c)}{dP_c} = 0. \quad (10)$$

Для решения уравнения (10) целесообразно использовать метод секущих. Для этого задают два начальных значения $P_{c,1}$ и $P_{c,2}$, при этом можно пользоваться результатами статических испытаний [1]. Рекуррентное соотношение для $P_{c,m}$ имеет вид

$$P_{c,m+1} = P_{c,m} - \frac{(P_{c,m} - P_{c,m-1}) \cdot f(P_{c,m})}{f(P_{c,m}) - f(P_{c,m-1})}. \quad (11)$$

Производную, фигурирующую в функции (10), практически невозможно вычислить аналитическими методами, поэтому целесообразно вычислять ее приближенно, используя разностное

выражение

$$\frac{d\omega_j(P_{c,m})}{dP_{c,m}} \approx \frac{\omega_j(P_{c,m} + \Delta P_c) - \omega_j(P_{c,m} - \Delta P_c)}{2\Delta P_c}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

где ΔP_c – приращение податливости, при расчете модельной задачи использовалось $|\Delta P_c| = 0,01 P_{c,m}$.

Алгоритм нахождения податливости имеет вид:

1. Задать коэффициент Пуассона. Положить $m = 2$. Назначить начальные значения податливости клеевого слоя $P_{c,1}$ и $P_{c,2}$.

2. Найти модули сдвига и вычислить $E_{c,1}$ и $E_{c,2}$. Найти N собственных частот при $P_{c,1}$. Для этого необходимо найти первые N корней уравнения (8).

3. Найти N собственных частот при $P_{c,1} \pm \Delta P_c$ и вычислить производные $\frac{d\omega_j(P_{c,1})}{dP_{c,1}}$ (12).

4. Вычислить значения функции (10) при $P_{c,1}$.

5. Найти N первых собственных частот при $P_{c,m}$.

6. Найти N первых собственных частот при $P_{c,m} \pm \Delta P$ и вычислить производные (12).

7. Вычислить значения функции (10) $P_{c,m}$.

8. Найти очередное значение $P_{c,m+1}$ по формуле (11). Сравнить очередное значение податливости с предыдущим. Если необходимая точность достигнута, то останов алгоритма. Если нет, то назначить $m = m + 1$, по вычисленной податливости на сдвиг определить $E_{c,m}$ и перейти к п. 5.

Если минимальное значение функции невязки (9) недостаточно мало, то следует изменить значение коэффициента Пуассона μ_0 и повторить расчет. Коэффициент Пуассона для большинства клеев лежит в пределах 0,4 – 0,5, поэтому пространство поиска невелико.

Численный пример. Для иллюстрации предложенного подхода и сравнительного анализа резонансного метода определения податливости рассмотрим соединение со следующими параметрами: $L_1 = 1$ см; $L = 20$ см; $\delta_1 = 2$ мм; $\delta_1 = 1,5$ мм; $\delta_0 = 0,35$ мм; $\rho_1 = 2,7$ г/см³ (алюминий); $\rho_2 = 1,55$ г/см³ (углепластик); $E_1 = 72$ ГПа; $E_2 = 142,8$ ГПа; $\mu_0 = 0,48$ (коэффициент Пуассона клеевого слоя). При задании плотностей ρ_1 и ρ_2 учитывалась масса клеевого слоя,

которая распределялась поровну между несущими слоями.

Влияние модуля сдвига клеевого слоя на первые частоты собственных колебаний иллюстрирует табл. 1.

Таблица 1 – Частоты собственных колебаний

G_c	0,8 ГПа	0,9 ГПа	1 ГПа	1,1 ГПа
ω_1	348,58	349,37	350,04	350,63
ω_2	2758,65	2760,3	2761,66	2762,83
ω_3	8249,51	8260,01	8268,5	8275,4
ω_4	16486,9	16530,88	16566,5	16595,9
ω_5	27187,8	27307,8	27405,8	27487,4
ω_6	39837,6	40070,8	40261,4	40419,9
ω_7	45864,8	45969,4	46059,0	46136,8
ω_8	54676,5	55131,9	55512,3	55835,0

Примем частоты собственных колебаний при $G_c = 0,8$ ГПа в качестве базовых ($\bar{\omega}_j$), и рассмотрим отклонения частот в процентах при изменении G_c . Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Процентное изменение частоты

$\frac{\omega_j - \bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_j} \cdot 100\%$	G_c , [ГПа]		
	0,9	1	1,1
$j = 1$	0,23	0,42	0,59
$j = 2$	0,06	0,11	0,15
$j = 3$	0,13	0,23	0,31
$j = 4$	0,27	0,48	0,66
$j = 5$	0,44	0,80	1,10
$j = 6$	0,59	1,06	1,46
$j = 7$	0,23	0,42	0,59
$j = 8$	0,83	1,53	2,12

Для сравнения приведем в табл. 3 величины максимального прогиба W_{\max} данного образца под действием силы 3 кг, приложенной в середине балки и при шарнирных опорах по ее краям [10]. Длину

соединения назначим также $L = 20$ см, расстояние от краев до шаровых опор – 1 см. Ширину образца назначим 5 см.

Таблица 3 – Максимальные прогибы

G_c , [ГПа]	0,8	0,9	1	1,1
W_{\max} , [мм]	0,29612	0,29598	0,29583	0,29569
$\frac{\bar{W}_{\max} - W_{\max}(G)}{\bar{W}_{\max}} 100\%$		0,04728	0,09793	0,14521

Во второй строке таблицы показано процентное изменение W_{\max} относительно прогиба при $G_c = 0,8$ ГПа (\bar{W}_{\max}) при изменении G_c . По результатам, представленным в табл. 2 и 3, видно, что относительное изменение частот ω_j при увеличении модуля сдвига G_c на порядок больше, чем изменение W_{\max} .

Экспериментальное определение собственных частот колебаний склеенных балок проводят с точностью до сотых долей Гц [3, 6]. Это говорит о потенциально высокой точности предложенного метода.

Проверку описанного алгоритма проводили следующим образом: для некоторого значения \bar{G}_c вычисляли частоты собственных колебаний, которые принимали в качестве $\bar{\omega}_j$ (10). Итерации начинались с других значений G_c , отличающихся приблизительно в 1,5 раза от заданного. Расчеты показали, что за три-четыре итерации процесс сходится к \bar{G}_c .

Выводы. Предложена методика определения податливости соединительного слоя (модуля сдвига клея) по собственным частотам колебаний образца. На примере модельной задачи показано, что данный метод обладает более высокой точностью по сравнению со статическим методом испытаний.

Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. – 359 с.
2. Vaziri A., Nayeb-Hashemi H., Hamidzadeh H.R. Experimental and Analytical Investigations of the Dynamic Response of Adhesively Bonded Single Lap Joints // J. of Vibration and Acoustics. 2004, V.126 (1), P.84–91.
3. Ingole S.B., Chatterjee A. Vibration analysis of single lap adhesive joint: Experimental and analytical investigation // Journal of Vibration and

Control. 2011 V.17, P. 1547–1556.

4. Backstrom D., Nilsson A.C. Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters // J. of Sound And Vibration. 2007, V. 300, P. 589–611.

5. Sokolinsky V.S., Von Bremen H.F., Lavoie J.A., Nutt S.R. Analytical and Experimental Study of Free Vibration Response of Soft-core Sandwich Beams // J. of Sandwich Structures and Materials. 2004, Vol. 6, P. 239–261.

6. Li W., Gu J., Hu P., Wu K. Vibration analysis of single lap adhesive joint with non-uniform adhesive thickness: Experimental and analytical investigation // Advanced Materials Research. 2012., Vols. 418–420., pp 1312–1319.

7. Акимов, В.В. Применение ультразвукового резонансного метода для определения упругих и пластических характеристик сплавов TiC–TiNi [Текст] / В.В. Акимов, Н.А. Иванов // Прикл. мех. и техн. физ. – 2002. – Т. 43, № 2. – С. 203–207.

8. Sisemore C.L., Darvennes C.M. Transverse Vibration of Elastic–Viscoelastic–Elastic Sandwich Beams: Compression – Experimental and analytical Study // J. of Sound and Vibration, 2002. V.252(1), P.155–167.

9. Иванова, Е.А. К вопросу об определении параметров жесткости нанообъектов [Текст] / Е.А.Иванова, Д.А.Индейцев, Н.Ф. Морозов // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76, Вып. 10. – С. 74–80.

10. Куреннов, С.С. Уточненная методика экспериментального определения податливости соединительного слоя в односрезном клеевом соединении [Текст] / С.С. Куреннов // Вопр. проектирования и пр-ва конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2012. – Вып. 3 (71). – С.89–96.

11. Минченя, В.Т. Расчет упругих постоянных материала по собственным частотам колебаний круглой пластины [Текст] / В.Т. Минченя, Д.А. Степаненко, Е.Н. Юрчик // Вест. Белорус. нац. техн. ун-та: научн.-техн. журнал. – 2009. – N 6. – С. 37–42.

12. Мелешко, В.В. Резонансный метод определения упругих постоянных конечных изотропных цилиндров [Текст] / В.В. Мелешко, Н.С. Якименко, А.Ф. Улитко // Акустичний вісник. – 2008. – Т. 11, N 3. – С. 65–75.

13. Игнатьков, Д.А. Определение характеристик упругости неоднородных материалов динамическим методом [Текст] / Д.А. Игнатьков // Электронная обработка материалов. – 2011. – Вып. 47(1), – С. 53–62.

Поступила в редакцию 15.03.2013.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*