УДК 519.6 О.А. Иванова

НОВЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Введение

В современной технике широкое применение нашли многослойные материалы. Подобные конструкции из многослойных композитов широко используются в авиакосмической области, судостроении и других отраслях. Применение на практике новых композиционных материалов требует совершенствования процедуры идентификации их свойств.

По причине сложности прямых экспериментальных оценок механических свойств материалов со сложной реологией необходима разработка иных методов идентификации неоднородных характеристик, основанных на различных моделях вязкоупругости. Одним из методов воздействия является акустическое зондирование, при специальной обработке результатов которого для упругих тел удается восстанавливать неизвестные функции по информации об амплитудно-частотных характеристиках, измеренных в некоторых точках исследуемого объекта. Исследование установившихся колебаний тел в рамках линейной вязкоупругости для модели стандартного вязкоупругого тела приводит к краевым задачам с переменными характеристиками для диссипативных операторов.

В случаях исследования более сложных моделей, учитывающих неоднородную структуру материалов, ситуация значительно усложняется и требуется более глубокий анализ проблемы, основанный на исследовании решений общих краевых задач с переменными коэффициентами и изучение зависимости решений от коэффициентов.

Обратная задача об определении характеристик материалов является линейной и сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка или к интегральному уравнению Фредгольма первого рода.

Для решения таких уравнений применяются методы граничных интегральных уравнений, методы последовательных приближений, метод квадратур, метод замены ядра вырожденным и др. Этому вопросу было посвящено ряд работ, например [1-9]. Обычно при решении интегральных уравнений методом замены ядра на вырожденное применяют разложение ядра в ряд Тейлора по одной из переменных.

В настоящей работе предложен метод нахождения ядра интегрального уравнения Фредгольма первого рода с использованием атомарного обобщенного ряда Тейлора, предложенного в [9-10] В.А. Рвачевым и исследованного в работах [11-13].

Атомарный обобщенный ряд Тейлора (АОРТ) разложения функции f имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in N_n} f^{(n)}(x_{n,k})baf_{n,k}(x),$$

где

$N_0=\{-1,0,1\}$;

$N_n=\{-2^{n-1},-2^{n-1}+1,\dots,2^{n-1}-1,2^{n-1}\}$, $n\neq 0$;

$x_{n,k}=\dfrac{k}{2^{n-1}}$, $n\neq 0$, $k\in N_n$, $x_{0,k}=k$, $k\in N_0$;

$baf_{n,k}(x)\in H_1$- базисные функции АОРТ.

Ранее этот метод предлагался авторами в работе [14] для решения интегральных уравнений электродинамики и теории антенн.

В настоящее время атомарные функции так же широко применяются в таких областях как теория аппроксимации, цифровая обработка сигналов, вейвлет-анализ, численный анализ и других областях.

1 Постановка задачи исследования

Целью данной статья является нахождение наиболее точного разложения ядра $K(t,x,\varepsilon)$ интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-1}^{1} K(t,x,\varepsilon)y(t)dt=f(x),$$

где $\varepsilon>0$ и $x\in[-1;1]$.

Рассмотрим случай, когда ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(t,x,\varepsilon)=\frac{x-t}{(x-t)^2+\varepsilon^2}.$$

Разложив ядро $K(t,x,\varepsilon)$ интегрального уравнения в ряд Тейлора и в атомарный обобщенный ряд Тейлора, проанализируем точность полученных результатов, варьируя значения ε. И таким образом найдем оптимальное разложение ядра интегрального уравнения среди выше предложенных методов.

2 Разложение ядра интегрального уравнения

Для того чтобы функцию $K(t,x,\varepsilon)$ разложить в атомарный обобщенный ряд Тейлора (в дальнейшем АОРТ), необходимо знать формулы нахождения базисных функций (в дальнейшем БАФ) атомарного обобщенного ряда Тейлора. В данной работе мы будем использовать БАФ вплоть до четвертого порядка на [-1;1]. Поскольку в работе приведены формулы, наивысшая производная которых равна единице. То все формулы из работы [16] для БАФ, кроме нулевого порядка, необходимо разделить на 2^{n-1}, где n – порядок базисной функции. В данной работе впервые приведены формулы для решения БАФ четвертого порядка. Поскольку БАФ на [0;1] можно выразить через БАФ на [-1;0], покажем лишь формулы вычисления БАФ на [-1;0]:

$$baf_{4,0}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1024}up\left(x-\frac{15}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x-\frac{7}{8}\right)+\frac{13}{73728}up\left(x-\frac{3}{4}\right)-\\ \frac{17}{294912}up\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{38657}{2123366400}up(x),-1\le x\le 0;\\ \frac{1}{1024}up\left(x+\frac{15}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x+\frac{7}{8}\right)+\frac{13}{73728}up\left(x+\frac{3}{4}\right)-\\ \frac{17}{294912}up\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{38657}{2123366400}up(x),0\le x\le 1;\\ 0,x\notin[-1;1];\end{cases}$$

$$baf_{4,-\frac{1}{4}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1024}up\left(x-\frac{11}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x-\frac{5}{8}\right)+\frac{1}{16384}up\left(x-\frac{1}{2}\right),\\ -\frac{1}{2}\le x\le -\frac{1}{4};\\ \frac{1}{16384}up(x+1)-\frac{1}{2048}up\left(x+\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{1024}up\left(x+\frac{19}{16}\right),\\ -\frac{1}{4}\le x\le 0;\\ 0,x\notin[-1;0];\end{cases}$$

$$baf_{4,-\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1024}up\left(x-\frac{7}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x-\frac{3}{8}\right)+\frac{13}{73728}up\left(x-\frac{1}{4}\right)-\\ \frac{17}{294912}up(x),-1< x\le -\frac{1}{2};\\ \frac{1}{1024}up\left(x+\frac{23}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x+\frac{11}{8}\right)+\frac{13}{73728}up\left(x+\frac{5}{4}\right)-\\ \frac{17}{294912}up(x+1),-\frac{1}{2}\le x< 0;\\ 0,x\notin[-1;0];\end{cases}$$

$$baf_{4,-1}(x)=baf_{4,0}(x);$$

$$baf_{4,-\frac{3}{4}}(x)=baf_{4,-\frac{1}{4}}(-x-1);$$

$$baf_{4,-\frac{3}{8}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1024}up\left(x-\frac{9}{16}\right)-\frac{7}{16384}up\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{65536}up(x),-1\le x\le -\frac{3}{8};\\ \frac{3}{65536}up(x+1)-\frac{1}{2048}up\left(x+\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{1024}up\left(x+\frac{21}{16}\right),-\frac{3}{8}\le x\le 0;\\ 0,x\notin[-1;0];\end{cases}$$

$$baf_{4,-\frac{1}{8}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1024}up\left(x-\frac{13}{16}\right)-\frac{1}{2048}up\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{16384}up\left(x-\frac{1}{2}\right)-\\ \frac{1}{65536}up(x),-1<x\le -\frac{1}{8};\\ \frac{1}{1024}up\left(x+\frac{17}{16}\right)-\frac{27}{65536}up(x+1),-\frac{1}{8}\le x<0;\\ 0,x\notin[-1;0];\end{cases}$$

$$baf_{4,-\frac{5}{8}}(x)=baf_{4,-\frac{3}{8}}(-x-1);$$

$$baf_{4,-\frac{7}{8}}(x)=baf_{4,-\frac{1}{8}}(-x-1);$$

Разложение ядра интегрального уравнения в АОРТ имеет вид:

$$K(t,x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{4}\sum_{k}c_{n,k}baf_{n,k}(t)=c_{0,-1}baf_{0,-1}(t)+c_{0,0}baf_{0,0}(t)+c_{0,1}baf_{0,1}(t)+$$
$$+c_{1,-1}baf_{1,-1}(t)+c_{1,0}baf_{1,0}(t)+c_{1,1}baf_{1,1}(t)++c_{2,-1}baf_{2,-1}(t)+c_{2,-\frac{1}{2}}baf_{2,-\frac{1}{2}}(t)+$$
$$+c_{2,0}baf_{2,0}(t)+c_{2,\frac{1}{2}}baf_{2,\frac{1}{2}}(t)+c_{2,1}baf_{2,1}(t)+c_{3,-1}baf_{3,-1}(t)+...+c_{4,1}baf_{4,1}(t),$$

где коэффициенты $c_{n,k}=K^{n}(k,x,\varepsilon)$.

Чтобы разложения были равносильными, а исследования – справедливыми, необходимо чтобы количество слагаемых в разложениях ядра интегрального уравнения в ряды Тейлора было одинаковым. Поэтому разложение ядра в ряд Тейлора в точке *t=0* имеет вид:

$$K(t,x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{37}\frac{K^{k}(0,x,\varepsilon)}{k!}(t-0)^{k}.$$

Все вычисления проводились в математическом пакете Mathematica, была исследована относительная погрешность полученных результатов разложений.

Результаты исследований показали, что при разных значениях числа ε выигрывают разные разложения ряда Тейлора. Были проведены исследования при $\varepsilon=0.1$, $\varepsilon=0.5$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=1.5$.

При малых значениях ε, выгоднее применять разложения ядра в АОРТ поскольку его относительная точность вычисления во много раз превышает точность разложения ядра в ряд Тейлора, поскольку последний в расходится при малых значениях ε.

При больших же значениях ε разложение в ряд Тейлора точнее, чем АОРТ. Например, в точке $x = 0.5$ при $\varepsilon = 2$ максимальная относительная погрешность АОРТ равна 10^{-7}, а ряда Тейлора - 10^{-12}.

Выводы

Предложен новый способ вычисления ядра интегрального уравнения путем разложения его в атомарный обобщенный ряд Тейлора. Базисные функции атомарного обобщенного ряда Тейлора были построены на основе атомарной функции $up(x)$.

Были проведены исследования разложения ядра $K(t,x,\varepsilon) = \dfrac{x-t}{(x-t)^2+\varepsilon^2}$ в ряд Тейлора и в атомарный обобщенный ряд Тейлора. Исследования показали, что чем меньше значение ε, тем выгоднее применять разложение ядра в атомарный обобщенный ряд Тейлора, которое дает хорошую точность, нежели разложение в ряд Тейлора.

При больших значениях ε выигрывает разложение ядра интегрального уравнения в ряд Тейлора, по сравнению с атомарным обобщенным рядом Тейлора.

Список использованных источников

1. Kuznetsov, S.V. Normal quasi-solutions of the integral equations of the theory of elasticity [Текст] /S.V. Kuznetsov // Journal of Soviet Mathematics. – 1993. – V 63. – pp. 313-315.

2. Gomilko, A.M. Iintegral equations in the linear theory of elasticity in semiinfinite domains [Текст] /A.M. Gomilko// Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V 50. – № 5. – pp. 697-708.

3. Marin Marin On some singular integral equtions in asymmetric elasticity [Текст] /Marin Marin// Reports. – 2012. – 14(64). – pp. 149–160.

4. Youn-Sha, C. Integral equations with hypersingular kernels—theory and applications to fracture mechanics [Текст] /Youn-Sha Chan, Albert C. Fannjiang, Glaucio H. Paulino// International Journal of Engineering Science. – 2003. – 41. – pp. 683–720.

5. Klaseboer, E Non-singular boundary integral methods for fluid mechanics applications [Текст] /Evert Klaseboer, Qiang Sun, Derek Y. C. Chan// J. Fluid Mech. – 2012. – vol. 696. – pp. 468-478.
c Cambridge University Press 2012

6. Jafarian, A A Numerical Method for Solving Nonlinear Integral Equations in the Urysohn Form [Текст] /A. Jafarian, Z. Esmailzadeh, L. Khoshbakhti// Applied Mathematical Sciences. – 2013. – vol. 7. – no. 28. – pp. 1375 – 1385

7. Youn-Sha, C. Finite Part Integrals and Hypersingular Kernels [Текст]

/Youn-Sha Chan, Albert C., Fannjiang, Glaucio H. Paulino, Bao-Feng Feng// DCDIS A Supplement, Advances in Dynamical Systems. – 2007. – vol. 14(S2). – pp. 264-269.

8. Абиров, Р.А. Существование и единственность граничного интегрального уравнения в теории пластичности [Текст] /Р.А. Абиров // Севастопіль: Вісник СевНТУ. – Вип. 106. – 2010 – С. 40-42.

9. Рвачев, В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций [Текст] / В.А. Рвачев // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – 6. – С. 99–102.

10. Рвачев, В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение [Текст] / В.А. Рвачев // Успехи мат наук. – 1990. – 1(271). – С. 77–103.

11. Рвачова, Т.В. Про зв'язок між коефіцієнтами і сумами узагальненого ряду Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачова // Доповіді НАН України. – 2002. – 7. – С. 26–30.

12. Рвачева, Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2002. – 602. – С. 94–104.

13. Рвачева, Т.В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2010. – 931. – С. 93–98.

14. Рвачев, В.А. Применение атомарных обобщенных рядов Тейлора к решению интегральных уравнений электродинамики и теории антенн [Текст] /В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева, Е.П. Томилова // Х.: ХАІ «Радіоелектронні і комп'ютерні системи» – 2013. –№ 1(60). – С. 7–14.

15. Рвачев, В.А. Об Эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций [Текст] /В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева // Х.: ХАІ «Радіоелектронні і комп'ютерні системи». – 2010. –№ 4(45). – С. 100–104.

16. Gotovac, H. An improved collocation method for solving the Henry problem [Текст] / H. Gotovac, R. Andricevic, B. Gotovac, V. Kozulic, M. Vranjes // Journal of Contaminant Hydrology. – 2003. – 64. – p. 129-149.

17. Рвачев, В.А. Об Эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций [Текст] /В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева // Х.: ХАІ «Радіоелектронні і комп'ютерні системи». – 2010. –№ 4(45). – С. 100–104.

18. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций [Текст] / И.П. Натансон. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с

19. Партон, В.З. Интегральные уравнения теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин // М.: Наука, 1977. – 312 с.

Поступила в редакцию 4.11.2013.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.