

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ДВУХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ЗЕРЕН В КОМПОЗИТЕ

### Введение

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов.

В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется распределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работе [3] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [4] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно-неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение

стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статье [5] для прогнозирования прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных связанных краевых задач микромеханики композитов, учитывающих стадию структурного накопления микроповреждений, когда поля структурных микроповреждений являются локально-эргодическими. В целях описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов существенно расширяется база определяющих соотношений: вводится новый материальный носитель – тензор повреждаемости четвертого ранга. Построены новые функционалы связанной стохастической краевой задачи, позволяющие наряду с прогнозированием упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

В работе [6] методом теории аналитических функций исследуется осесимметричное напряженное состояние упругого сфероида и пространства со сфероидальной полостью.

В статьях [7–9] методом Фурье определяются компоненты тензора напряжений в упругом пространстве в окрестности сфероидальной полости или включения.

В статье [10] предложен подход к анализу напряженного состояния упругого пространства со сфероидальными включениями и к определению эффективных упругих модулей зернистого композита.

В работах [11–13] обобщенным методом Фурье исследуются распределения напряжений в окрестности сфероидальных полостей и включений в случае их осесимметричного расположения.

В данной работе приведено решение задачи об одноосном и двуосном растяжении упругого пространства с двумя сфероидальными включениями. Полученные результаты могут быть применены при моделировании напряженно-деформированного состояния зернистого композита в области между двумя соседними зернами.

#### Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство  $\Omega$  с двумя непересекающимися сфероидальными включениями  $\Omega_j$ , сдвинутыми относительно друг друга на  $a$  вдоль оси  $\rho$ , как показано на рис. 1. Будем использо-

вать одинаково ориентированные цилиндрические  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  и вытянутые сфероидальные системы координат  $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$ , начала которых отнесены к центрам включений  $O_j$ ,  $j = 1, 2$ . Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия  $\sigma_z^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$  (одноосное растяжение) или  $\sigma_\rho^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$  (двухосное растяжение), а на границах включений выполняются условия идеального контакта.

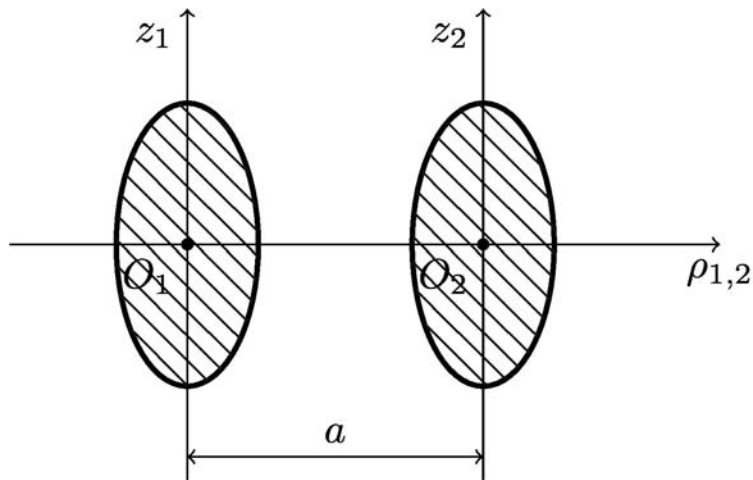


Рисунок 1 — Схематическое представление задачи

Уравнения поверхностей включений  $\Gamma_j$  в цилиндрических координатах имеют вид

$$\Gamma_j : \frac{z^2}{d_{1j}^2} + \frac{\rho_j^2}{d_{2j}^2} = 1, \quad (1)$$

где  $d_{1j}$  и  $d_{2j}$  — большая и малая полуоси сфероидов соответственно,  $\rho_1 = \rho_2 + a$ . В сфероидальных координатах уравнения поверхностей полостей имеют простой вид  $\xi = \xi_{0j}$ . Координаты в двух сфероидальных системах координат связаны между собой следующим образом:

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta_1 = a + c_2 \operatorname{sh} \xi_2 \sin \eta_2; \\ c_1 \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta_1 = c_2 \operatorname{ch} \xi_2 \cos \eta_2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $z_j = c_j \operatorname{ch} \xi_j \cos \eta_j$ ;  $\rho_j = c_j \operatorname{sh} \xi_j \sin \eta_j$ ;  $c_j$  — параметры сфероидальных систем координат.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с условиями сопряжения на границе раздела сред

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}; \quad (2)$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j} \quad (3)$$

и указанными выше условиями на бесконечности. Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор перемещений;  $\mathbf{F}\mathbf{U}$  — отвечающий  $\mathbf{U}$  вектор усилий на соответствующей граничной поверхности;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

### Решение задачи

Решение задачи в области  $\Omega / \bigcup_j \Omega_j$  ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j),$$

а в области  $\Omega_j$

$$\mathbf{U}_j = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} B_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (5)$$

где  $A_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $B_{s,n,m}^{(j)}$  — неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение  $\mathbf{U}_0$  соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (7)$$

где  $T$  — усилие на бесконечности;  $G$  — модуль сдвига;  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  — орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для вытянутого сфероида [14]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[ u_{n-1,m}^{\pm(5)} - u_{n+1,m}^{\pm(5)} \right], \quad s = 1, 3; \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)} - cq_0^2 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{D}_1 = \nabla$ ;  $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$  (здесь  $i$  – мнимая единица);  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $q = ch\xi$ ,  $q_0 = ch\xi_0$ ,  $u_{n,m}^{\pm(5)}$  – полный набор частных решений уравнения Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах.

В развернутой координатной форме формулы (8), (9) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)}\mathbf{e}_0; \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - \\ & - \left[ qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + c(q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $u_{n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m}^{\pm} S_n^m$ ;  $u_{n,m}^+ = Q_n^{-m}(q)$ ;  $u_{n,m}^- = P_n^{-m}(q)$ ;

$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm} S_n^m$ ,  $u_{1,n,m}^+ = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)$ ,

$u_{1,n,m}^- = -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)$ ,  $S_n^m = P_n^m(\cos \eta)e^{im\varphi}$ ,  $P_n^m$  и  $Q_n^m$  – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Базис  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$  связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}; \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}; \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z.$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (13)$$

Применив к формулам (10) – (12) оператор (13), на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  получим

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left\{ \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm(5)}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm(5)}) - 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \\ & \left. - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm(5)}) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q}{\bar{q}} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \quad (16)$$

где  $u_{2,n,m}^{+(5)} = \omega^- Q_n^{-m}(q) S_n^{m-1}; \quad u_{3,n,m}^{+(5)} = Q_n^{-m}(q) S_n^{m+1};$   
 $u_{3,n,m}^{-(5)} = P_n^{-m}(q) S_n^{m+1}; \quad u_{2,n,m}^{-(5)} = \omega^- P_n^{-m}(q) S_n^{m-1};$

$$\omega^- = (n+m)(n-m+1), \quad h = (q^2 - p^2)^{-1/2}, \quad \bar{q} = sh\xi.$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфероидов. Справедливы следующие теоремы сложения [14]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_i, \eta_i, \varphi_i) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m}^{t,k,l} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (17)$$

где  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

$$T_{s,n,m}^{t,k,l} = \left\{ \delta_{st} - \delta_{t1} \delta_{s2} \left[ q_{10}^2 \left( c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} - n - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_{20}^2 \left( c_2 \frac{\partial}{\partial c_2} - k \right) + z_{12} \frac{\partial}{\partial z_{12}} \right] \right\} f_{1,n,m}^{\pm(55)k,l}; \quad (18)$$

$$f_{1,n,m}^{+(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pk} \left( \frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rn} \left( \frac{c_1}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}); \quad (19)$$

$$f_{1,n,m}^{-(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_2}{c_1} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pn} \left( \frac{c_2}{2} \right)^p \times \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rk} \left( \frac{c_1}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}); \quad (20)$$

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} \left[ \Gamma \left( \frac{i-j}{2} + 1 \right) \Gamma \left( \frac{i+j}{2} + \frac{3}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (21)$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта-символ Кронекера,  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера;  $\varepsilon_{ij} = 1$ , если  $i$  и  $j$  одной четности, и  $\varepsilon_{ij} = 0$  — в противном случае;  $(r, \theta, \varphi)$  —

сферические координаты;  $u_{n,m}^{+(4)} = (n-m)! r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$  – внешнее базисное частное решение уравнения Лапласа для сферы. Для расположения полостей представленного на рис. 1,  $z_{12} = 0$ ,  $\theta_{12} = \pi/2$ ,  $r_{12} = a$  и для сдвига вдоль оси  $X$   $\varphi_{12} = 0$ . В формуле (17) берем  $f_{1,n,m}^{+(55)k,l}$  при переходе от  $O_1$  к  $O_2$ , т.е. для  $i = 1$  и  $j = 2$ , а при обратном переходе ( $i = 2$  и  $j = 1$ ) берем  $f_{1,n,m}^{-(55)k,l}$ .

### Разрешающая система уравнений

Относительно перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  получаем краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями  $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j} + \mathbf{F}\mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_j} = -\mathbf{U}_0|_{\Gamma_j} + \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}$ . Применив оператор (13) к формулам (6), (7), на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  для одноосного и двухосного растяжения получим соответственно

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Thsh\xi \cos\eta \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Thch\xi \sin\eta \mathbf{e}_\rho.$$

Используя теоремы сложения (17), представим вектор перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  в системе координат с началом в точке  $O_1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(1)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) + \\ & + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(2)} T_{s,n,m}^{t,k,l} \end{aligned} \quad (22)$$

и с началом в точке  $O_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(2)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + \\ & + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(1)} T_{s,n,m}^{t,k,l}. \end{aligned} \quad (23)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,n,m}^{(j)}$ ,  $B_{s,n,m}^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(1)} F_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_1, \sigma) + F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_1, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(2)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + F_{0,n,m}^{(r)} = \\ = \frac{G_1}{G} \sum_{s=1}^3 B_{s,n,m}^{(1)} F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_1, \sigma_1); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(2)} F_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_2, \sigma) + F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_2, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(1)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + F_{0,n,m}^{(r)} = \\ = \frac{G_2}{G} \sum_{s=1}^3 B_{s,n,m}^{(2)} F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_2, \sigma_2); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(1)} E_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_1, \sigma) + E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_1, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(2)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + E_{0,n,m}^{(r)} = \\ = \sum_{s=1}^3 B_{s,n,m}^{(1)} E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_1, \sigma_1); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(2)} E_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_2, \sigma) + E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_2, \sigma) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(1)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + E_{0,n,m}^{(r)} = \\ = \sum_{s=1}^3 B_{s,n,m}^{(2)} E_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_2, \sigma_2), \end{aligned} \quad (27)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1,$$

где  $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_{2i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ ,  $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$  (для одноосного растяжения) и  $F_{0,n,m}^{(0)} = 0$ ,  $F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_{1i}}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ ,  $F_{0,n,m}^{(1)} = -\frac{Td_{1i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$  (для двухосного растяжения).

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)}(\xi, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)}(\xi, \sigma) = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm};$$

$$F_{1,n,m}^{\pm(0)}(\xi, \sigma) = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}, \quad F_{2,n,m}^{\pm(-1)}(\xi, \sigma) = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm};$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(1)}(\xi, \sigma) = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm}) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm};$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)}(\xi, \sigma) = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm}) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm};$$



$$E_{1,n,m}^{\pm(-1)}(\xi, \sigma) = u_{n,m-1}^{\pm}(\xi); \quad E_{1,n,m}^{\pm(1)}(\xi, \sigma) = -u_{n,m+1}^{\pm}(\xi);$$

$$E_{1,n,m}^{\pm(0)}(\xi, \sigma) = -u_{n,m}^{\pm}(\xi); \quad E_{2,n,m}^{\pm(-1)}(\xi, \sigma) = qu_{1,n,m-1}^{\pm}(\xi);$$

$$E_{2,n,m}^{\pm(1)}(\xi, \sigma) = -qu_{1,n,m+1}^{\pm}(\xi); \quad E_{2,n,m}^{\pm(0)}(\xi, \sigma) = -qu_{1,n,m}^{\pm}(\xi) - \chi u_{n,m}^{\pm}(\xi);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(-1)}(\xi, \sigma) = -u_{n,m-1}^{\pm}(\xi); \quad E_{3,n,m}^{\pm(1)}(\xi, \sigma) = -u_{n,m+1}^{\pm}(\xi); \quad E_{3,n,m}^{\pm(0)}(\xi, \sigma) = 0;$$

$$\chi = 3 - 4\sigma.$$

Оператор системы уравнений (24) – (27) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [15].

### Анализ результатов

Численный анализ решения задачи проведен для двух одинаковых сфероидальных включений, коэффициент Пуассона материала матрицы  $\sigma = 0.38$ , материала включений  $\sigma_j = 0.21$ . Под относительным показателем близости включений понимаем величину  $a / d_1$ . Система уравнений решена методом редукции. Анализ сходимости метода редукции показал, что высокая точность достигается уже при  $N = 6$ , т.е. в бесконечных суммах по  $n$  и  $k$  удерживаем семь слагаемых.

На рис. 2 – 4 приведены графики относительных напряжений  $\sigma_x / T$ ,  $\sigma_y / T$  и  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства. Следует отметить, что напряжения  $\sigma_x / T$  и  $\sigma_y / T$  при одноосном растяжении пространства являются отрицательными, причем при удалении включений друг от друга в средней точке на линии между ними стремятся к нулю. Напротив, напряжения  $\sigma_z / T$  в этой точке стремятся к единице, что соответствует напряженному состоянию «невозмущенного» пространства. При двуосном растяжении пространства определяющими являются относительные напряжения  $\sigma_x / T$ . При удалении включений друг от друга напряжения  $\sigma_x / T$  и  $\sigma_y / T$  стремятся к единице в средней точке на линии, соединяющей центры включений, а напряжения  $\sigma_z / T$  в этой точке стремятся к нулю.

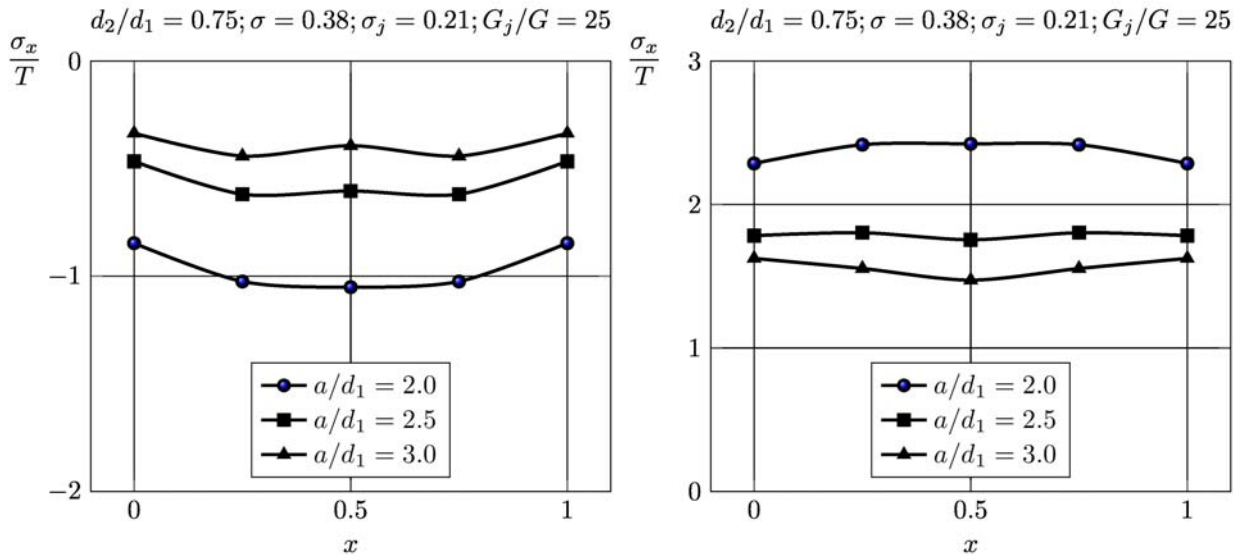


Рисунок 2 — Напряжения  $\sigma_x / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

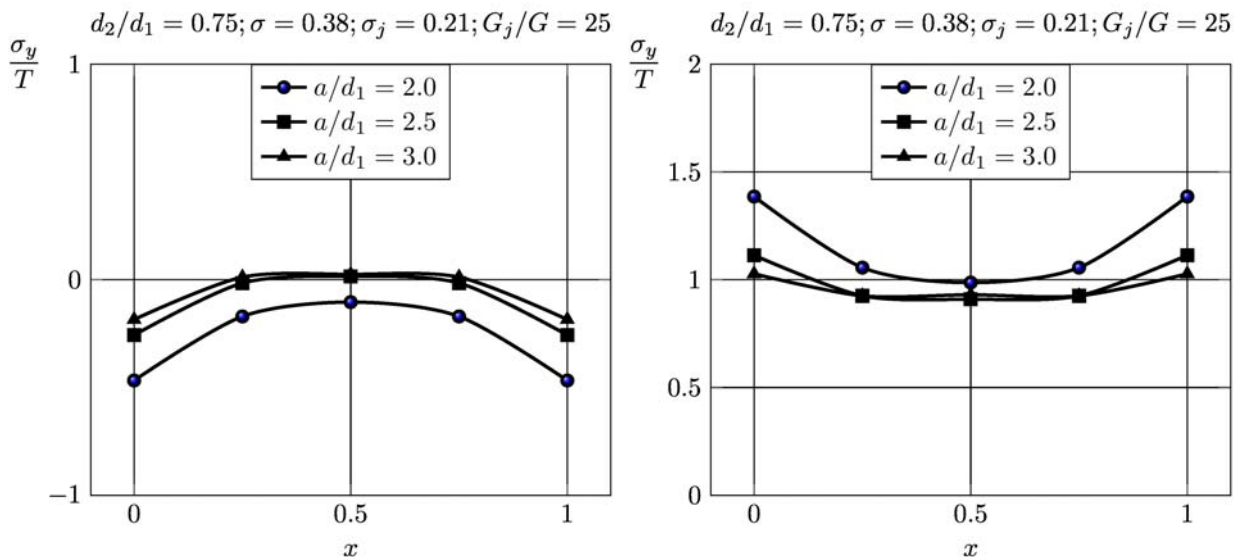


Рисунок 3 — Напряжения  $\sigma_y / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

На рис. 5 — 7 приведены графики относительных напряжений  $\sigma_x / T$ ,  $\sigma_y / T$  и  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства.

В данной статье приведены результаты для так называемых низко модульных волокон с соотношением  $G_j / G = 25$ . Результаты вычислений показали, что напряженное состояние для высоко модульных во-

локон с  $G_j / G = 100$  не отличается существенным образом от приведенных здесь графиков. В целом такое увеличение жесткости включений приводит к отличию не более 10% в величинах относительных нормальных напряжений.

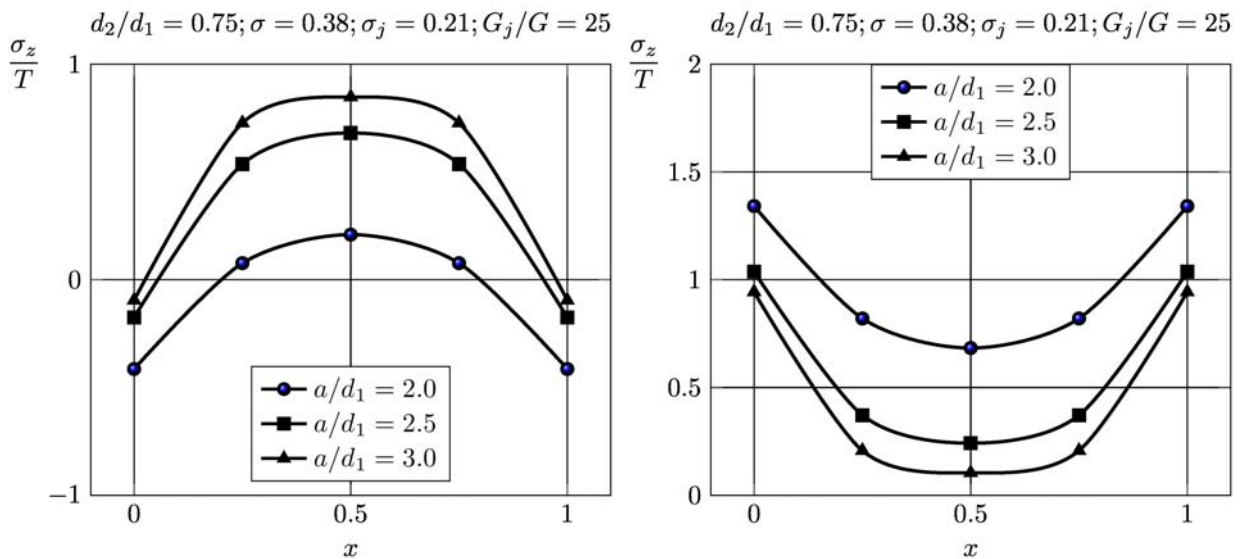


Рисунок 4 — Напряжения  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от относительного расстояния между ними при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

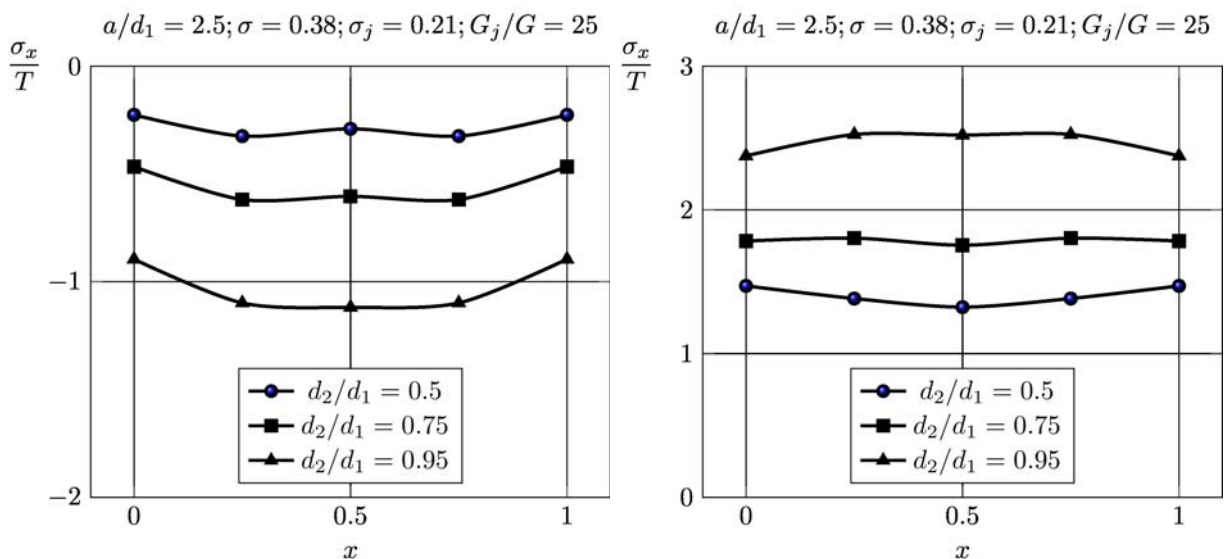


Рисунок 5 — Напряжения  $\sigma_x / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

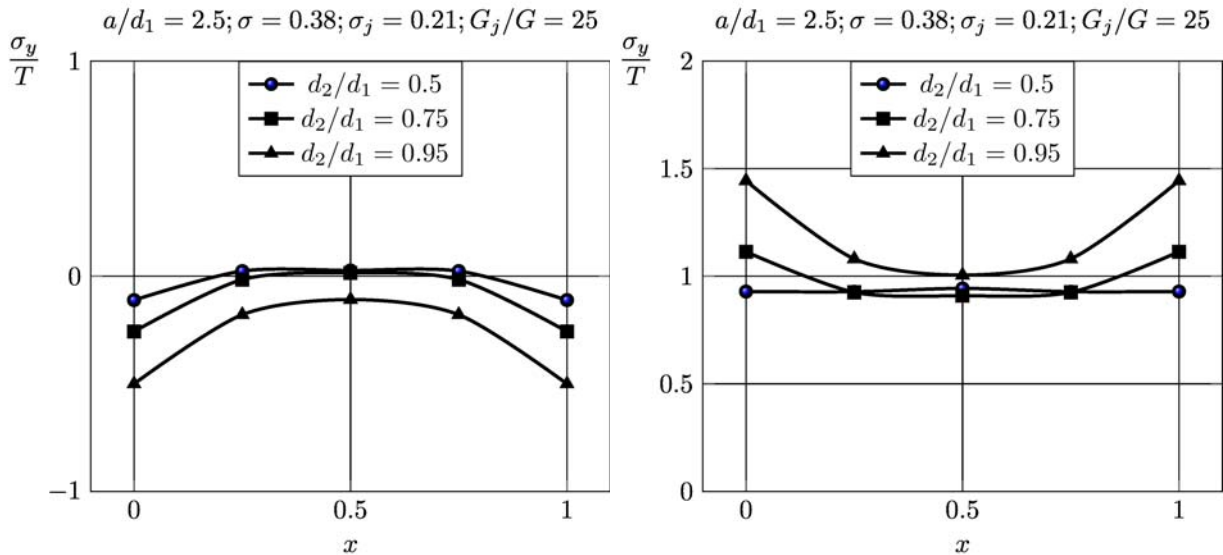


Рисунок 6 — Напряжения  $\sigma_y / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

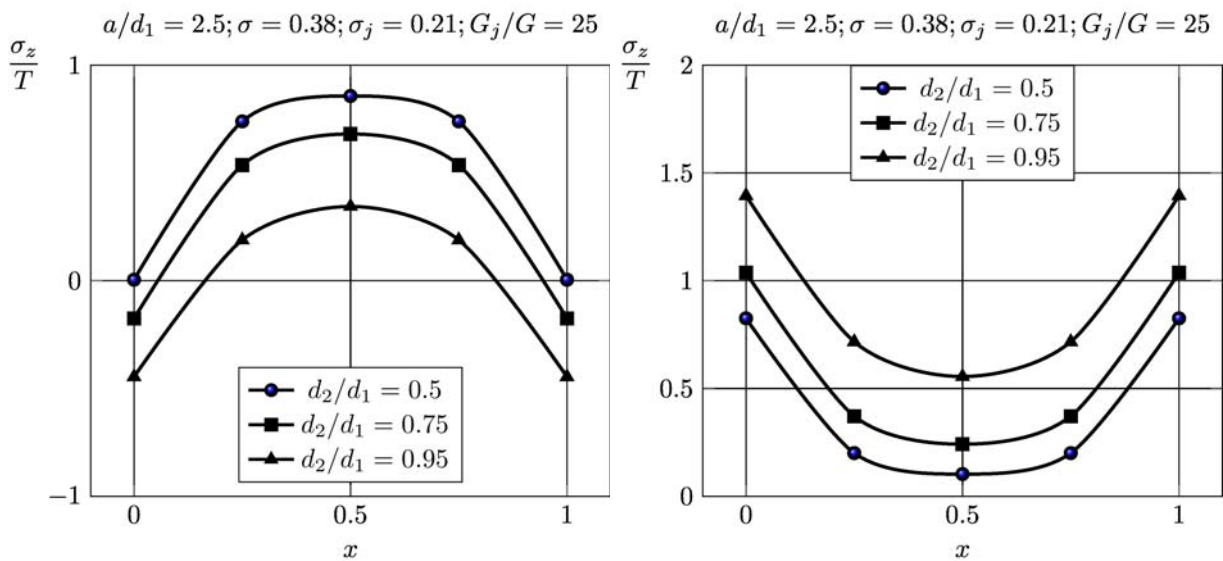


Рисунок 7 — Напряжения  $\sigma_z / T$  на линии, соединяющей центры включений, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

## Выводы

Исследовано напряженно-деформированное состояние неосесимметричного упругого тела. В отличие от сугубо численных моделей предложенный в настоящей работе подход позволяет строить приближенные аналитические модели, степень точности которых можно существенно улучшать. Приведенные выше результаты позволяют судить о его высокой эффективности.

Разработанная в настоящей работе локальная модель напряженно-деформированного состояния зернистого композита может использоваться для определения интегральных упругих модулей композиционных материалов со сферическими зернистыми неоднородностями. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры материала.

#### Список использованных источников

1. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка. – 1985. – 304 с.
2. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.
3. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. – М.: ИПМ РАН. – Т. 16, № 1. – 2010. – С. 106-116.
4. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10.— P. 1284–1316.
5. Макарова, Е. Ю. Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов [Текст] / Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 395 – 405.
6. Вольперт, В. С. Пространственная задача теории упругости для эллипсоида вращения и эллипсоидальной полости [Текст] / В. С. Вольперт // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – №3. – С. 118–124.
7. Подильчук, Ю. Н. Деформация упругого сфероида [Текст] / Ю. Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3, № 12. – С. 34–42.
8. Tsuchida E. Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-round tension [Text] / E. Tsuchida, Y. Saito, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1982. – V. 25, №202. – P. 493 – 500.
9. Zureick A.H. Transversely isotropic medium with a rigid spheroidal inclusion under an axial pull [Text] / A.H. Zureick // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – V. 55, №2. – P. 495 – 497.
10. Куш, В. И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, армированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Куш // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 32-39.

11. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». — 2009. — Т. 2 (58). — С. 48–58.

12. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — 1(98). — С. 14–18.

13. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.

14. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 — Ук 93.

15. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доповіді НАН України. — 1998. — Т. 2. — С. 78–83.

*Поступила в редакцию 21.03.2014.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я. С. Карпов,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*