УДК 624.072 С.С. Куреннов, канд. техн. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. УЧЕТ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТА

Актуальность обобщения теории нахлесточных соединений Голанда и Рейсснера на произвольное число слоев обусловлено двумя причинами. С одной стороны, увеличение числа поверхностей склеивания в разы уменьшает нагрузку на клеевой шов и, следовательно, снижает напряжения в клее, повышая тем самым прочность соединения. С другой стороны, изучение напряженного состояния соединений слоистых композиционных материалов требует создания моделей соединений, которые учитывали бы многослойное строение композитов. Об этом говорят результаты экспериментов [1] и опыт эксплуатации, согласно которым одним из механизмов разрушения соединения является расслоение композита вдоль соединительного слоя и отрыв ближайших к клеевой прослойке слоев.

Недостаток численных подходов, основанных на дискретизации конструкции [2], состоит в том, что композиционный материал моделируется системой параллельных стержней, работающих только на растяжение-сжатие и разделенных податливыми слоями. При этом не учитываются нормальные напряжения между стержнями. В близкой по постановке модели многослойного стержня А.Р. Ржаницына [3] несущие слои рассматриваются как балки Бернулли, однако поперечные связи между ними полагаются идеально жесткими и нормальные напряжения между слоями также отсутствуют.

В работе [4] для расчета соединений предложена континуальная модель композита, согласно которой поперечные перемещения точек слоя полагаются равными нулю, т.е. слои смещаются только в продольном направлении. Задача сведена к уравнению в частных производных относительно касательных напряжений в композитном слое, которое решено с помощью метода разделения переменных. Решение имеет вид ряда Фурье по поперечной координате, а его коэффициенты представляют собой суперпозицию синуса и косинуса гиперболических от продольной координаты. Данная модель является континуальным аналогом модели соединения Фолькерсена. Недостаток этого подхода состоит в том, что вследствие равенства нулю поперечных перемещений нормальные напряжения в поперечном направлении также равны нулю, а это приводит к тому, что не выполняется закон парности касательных напряжений. Нарушение же симметрии тензора напряжений обуславливает сингулярность решения в угловых точках, т.е. расходимость решения на концах соединения, что было позже отмечено самими авторами [5]. Следовательно, касательные напряжения в клее на концах соединения по этой методике не могут быть определены.

Модель соединения В.Ф. Кутьинова [6] занимает промежуточное положение между моделью соединения Ю.П. Артюхина [7] и моделью Фолькерсена. Согласно подходу [6] продольные элементы в соединении, как и в модели Фолькерсена, работают только на растяжение-сжатие. Причем полагается, что распределение усилий в продольных силовых элементах по длине соединения описывается одной функцией от продольной координаты для всех продольных элементов, а по толщине соединения – полагается линейная зависимость (по гипотезе плоских сечений). Распределение же нормальных напряжений в поперечном направлении в соединительных слоях, расположенных между продольными силовыми элементами, описывается линейной функцией от поперечной координаты, как и в модели [6]. Как и в модели Фолькерсена, касательные напряжения в соединительных слоях пропорциональны производным от усилий в продольных силовых элементах. Для поиска неизвестной функции распределения продольных усилий по длине соединения используется условие минимума потенциальной энергии деформации.

Целью данной работы является обобщение модели клеевого соединения Голанда и Рейсснера на произвольное число слоев, что позволит учитывать эффекты, обусловленные изгибом и поперечным перемещением несущих слоев. Данная модель строится на основе классической теории балок и упругого основания Винклера и лишена противоречий, которые присущи моделям [4, 6].

Постановка задачи. Рассмотрим многослойный стержень, состоящий из m отдельных стержней, рассматриваемых как балки Бернулли. Балки связаны соединительными слоями, работающими только на сдвиг и растяжение-сжатие в транверсальном направлении.

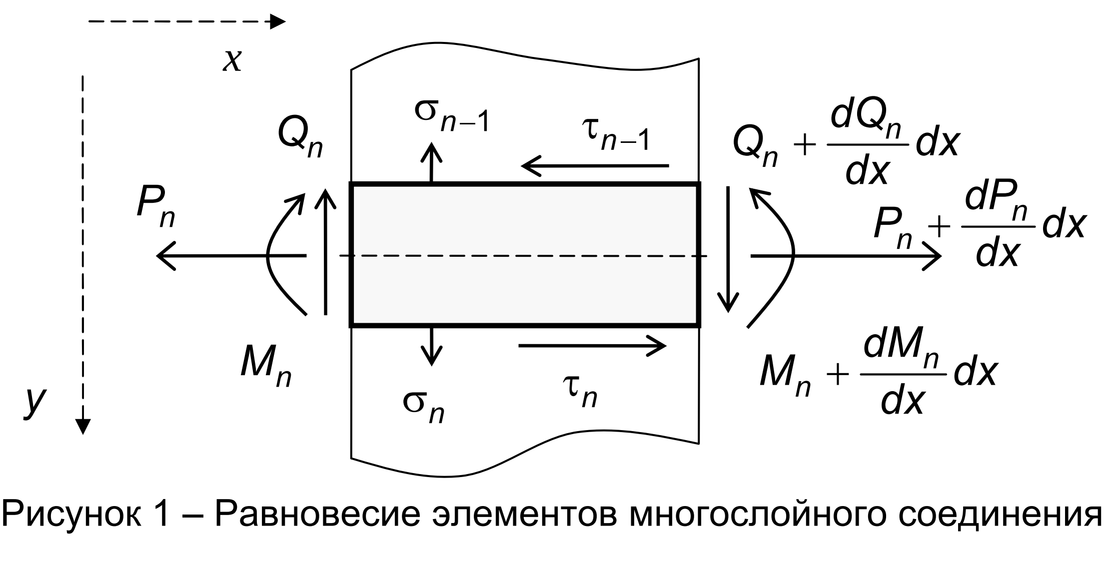

Рисунок 1 – Равновесие элементов многослойного соединения

Внешние границы стержней с номерами 1 и m полагаются свободными от распределенных нагрузок. Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{dN_1}{dx}+\tau_1=0;\ \frac{dN_n}{dx}-\tau_{n-1}+\tau_n=0;\ \frac{dN_m}{dx}-\tau_{m-1}=0;$$
$$\frac{dQ_1}{dx}+\sigma_1=0;\ \frac{dQ_n}{dx}-\sigma_{n-1}+\sigma_n=0;\ \frac{dQ_m}{dx}-\sigma_{m-1}=0;$$
$$\frac{dM_1}{dx}+s_1\tau_1-Q_1=0;\ \frac{dM_m}{dx}+s_m\tau_{m-1}-Q_m=0; \tag{1}$$
$$\frac{dM_n}{dx}+s_n\tau_{n-1}+s_n\tau_n-Q_n=0,$$

где $n=2,3,\ldots,m-1$; N_n, Q_n, M_n – соответственно продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в стержне; n; τ_n, σ_n – касательные и нормальные напряжения, действующие в соединительном слое n; s_n – половина толщины стержня n.

Касательные напряжения в соединительных слоях

$$\tau_n=\frac{1}{P_n}\left(u_{n+1}-u_n+s_n\frac{dw_n}{dx}+s_{n+1}\frac{dw_{n+1}}{dx}\right), \tag{2}$$

где P_n – податливость соединительно слоя на сдвиг, $P_n=\delta_n G_n^{-1}$; G_n – модуль сдвига соответствующего соединительного слоя; u_n, w_n – продольные и поперечные перемещения n-го стержня.

Нормальные напряжения в соединительных слоях

$$\sigma_n=K_n\left(w_{n+1}-w_n\right), \tag{3}$$

где K_n – жесткость соединительного слоя на растяжение-сжатие, $K_n=E_n^{(g)}\delta_n^{-1}$; $E_n^{(g)}$ – модуль упругости соединительного слоя; δ_n – толщина соответствующего соединительного слоя.

Уравнения механики балок

$$N_n=B_n\frac{du_n}{dx};\ M_n=-D_n\frac{d^2w_n}{dx^2};\ (n=1,2,\ldots,m). \tag{4}$$

Здесь B_n и D_n соответственно жесткости стержня на растяжение-сжатие и на изгиб, $B_n=2s_nE_n$, $D_n=\frac{\left(2s_n\right)^3}{12}E_n$; E_n – модуль упругости стержня в продольном направлении.

Система уравнений (1) - (4) может быть сведена к системе уравнений относительно перемещений, которая имеет вид

$$\mathbf{A}^{(4)}\frac{d^4\vec{\mathbf{X}}}{dx^4}+\mathbf{A}^{(2)}\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dx^2}+\mathbf{A}^{(1)}\frac{d\vec{\mathbf{X}}}{dx}+\mathbf{A}^{(0)}\vec{\mathbf{X}}=0, \qquad (5)$$

где $\vec{\mathbf{X}}=\left(u_1,w_1,u_2,w_2,...,u_m,w_m\right)^T$; $\mathbf{A}^{(4)},\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{A}^{(0)}$ – симметричные диагональные ($\mathbf{A}^{(4)}$) и трехдиагональные матрицы размерностью $2m\times 2m$.

$$\mathbf{A}^{(k)}=\begin{pmatrix}\mathbf{W}_{k,1} & \mathbf{V}_{k,1} & \cdot & \dots & \cdot\\ \mathbf{V}_{k,1}^T & \mathbf{W}_{k,2} & \mathbf{V}_{k,2} & \dots & \cdot\\ \cdot & \mathbf{V}_{k,2}^T & \mathbf{W}_{k,3} & \dots & \cdot\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{V}_{k,m-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{V}_{k,m-1}^T & \mathbf{W}_{k,m}\end{pmatrix};\quad \mathbf{W}_{4,n}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D_n\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{4,n}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \mathbf{W}_{2,n}=\begin{pmatrix}B_n & 0\\ 0 & -\frac{s_n^2}{P_n}-\frac{s_n^2}{P_{n-1}}\end{pmatrix};\ \mathbf{V}_{2,n}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\frac{s_n s_{n+1}}{P_n}\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{1,n}=\begin{pmatrix}0 & \frac{s_n}{P_n}-\frac{s_n}{P_{n-1}}\\ \frac{s_n}{P_n}-\frac{s_n}{P_{n-1}} & 0\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{1,n}=\begin{pmatrix}0 & \frac{s_{n+1}}{P_n}\\ -\frac{s_n}{P_n} & 0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{0,n}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{P_n}-\frac{1}{P_{n-1}} & 0\\ 0 & K_n+K_{n-1}\end{pmatrix};\quad \mathbf{V}_{0,n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{P_n} & 0\\ 0 & -K_n\end{pmatrix}.$$

Поскольку слои с номерами 0 и $m+1$ отсутствуют, то $P_0=P_{m+1}=\infty$, $K_0=K_{m+1}=0$.

Частное решение системы (5) ищем в виде $\vec{\mathbf{X}}=e^{\lambda x}\vec{\mathbf{h}}$, где $\vec{\mathbf{h}}$ – некоторый вектор. Подставив частное решение в (5), получим

$$\left(\mathbf{A}^{(4)}\lambda^4+\mathbf{A}^{(2)}\lambda^2+\mathbf{A}^{(1)}\lambda+\mathbf{A}^{(0)}\right)\vec{\mathbf{h}}=0. \qquad (6)$$

Откуда следует характеристическое уравнение

$$\det\mathbf{A}(\lambda)=0, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}(\lambda)=\mathbf{A}^{(4)}\lambda^4+\mathbf{A}^{(2)}\lambda^2+\mathbf{A}^{(1)}\lambda+\mathbf{A}^{(0)}$.

Уравнение (7) имеет корень $\lambda = 0$ шестой кратности. Общее число ненулевых корней уравнения (9) составляет $6(m-1)$. Следовательно, общее решение системы (5) имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \dots \\ u_m \\ w_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{6(m-1)} C_k \vec{\mathbf{h}}_k \, e^{\lambda_k x} + \sum_{n=0}^{3} x^n \vec{\mathbf{H}}_n \,. \qquad (8)$$

Векторы $\vec{\mathbf{h}}_k$ представляют собой нетривиальные решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}(\lambda_k)\vec{\mathbf{h}}_k = 0.$$

Вектор $\vec{\mathbf{h}}_k$ определяется с точностью до произвольного множителя C_k, поскольку дефект матрицы $\mathbf{A}(\lambda_k)$ при всех корнях $\lambda_k \neq 0$ равен единице. Векторы $\vec{\mathbf{H}}_n$ содержат шесть констант интегрирования $S_1, \dots, S_6$ и могут быть представлены, например, в следующей форме:

$$\vec{\mathbf{H}}_3 = S_1\vec{\mathbf{I}}_1,\ \vec{\mathbf{H}}_2 = S_2\vec{\mathbf{I}}_1 + 3S_1\vec{\mathbf{v}}_2,\ \vec{\mathbf{H}}_1 = S_3\vec{\mathbf{I}}_2 + S_4\vec{\mathbf{I}}_1 - 2S_2\vec{\mathbf{v}}_1,$$
$$\vec{\mathbf{H}}_0 = S_5\vec{\mathbf{I}}_2 + S_6\vec{\mathbf{I}}_1 - 6S_1\vec{\mathbf{v}}_0 - S_4\vec{\mathbf{v}}_1,$$

где соответственно

$$\vec{\mathbf{I}}_1 = (0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1)^T;\ \vec{\mathbf{I}}_2 = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0)^T;$$

$$R_{i,j} = -s_i - s_j + 2\sum_{k=j}^{i} s_k,\ (i > j),\ \ \varphi_{i,j} = \begin{cases} R_{i,j}B_j, & i > j; \\ -R_{j-1,i}B_{j-1}, & i \le j; \end{cases}$$

$$\xi_i = \sum_{k=2}^{m} \varphi_{i,k},\quad \psi_i = \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{m} R_{k,j}B_kB_j;\quad \theta_i = \sum_{k=1}^{i} P_k\psi_k;\quad \beta = \sum_{k=1}^{m} B_k;$$

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\beta}(\xi_1\ \ 0,\ \ \xi_2\ \ 0,\ \ \dots,\ \ \xi_m,\ \ 0)^T;$$

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = (0,\ \ 0,\ \ R_{1,2},\ \ 0,\ \ R_{1,3},\ \ 0,\ \ \dots,\ \ R_{1,m},\ \ 0)^T;$$

$$\vec{\mathbf{v}}_0 = \frac{1}{\beta}(0,\ \ 0,\ \ \theta_1,\ \ 0,\ \ \theta_2,\ \ 0,\ \ \dots,\ \ \theta_{m-1},\ \ 0)^T.$$

Константы C_k $(k = 1,2,\dots,6(m-1))$ и $S_1, S_2, \dots, S_6$ определяются из $6m$ краевых условий. На каждом из двух концов отдельного стержня заданы три краевых условия: продольное перемещение или продольное усилие; поперечное перемещение, угол поворота, изгибающий момент или поперечная сила. Удовлетворение краевым условиям приводит к системе линейных уравнений относительно перечисленных констант.

Частным случаем данной модели является обобщенная модель Фолькерсена, согласно которой продольные силовые элементы работают только на растяжение-сжатие и поперечные перемещения отсутствуют, т.е. $w_n = 0$. Следовательно, в субматрицах $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$ необходимо положить $s_n = D_n = K_n = 0$. В результате $\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{A}^{(1)} = 0$, а из матриц $\mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(0)}$ исключаются четные строки. Тогда

$$\mathbf{A}^{(2)} \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}^{(0)} \vec{\mathbf{X}} = 0, \tag{9}$$

где $\vec{\mathbf{X}} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$; $\mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{A}^{(0)}$ – симметричные матрицы размерностью $m \times m$;

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} -g_1 & g_1 & 0 & ... & 0 \\ g & -g_1 - g_2 & g_2 & ... & 0 \\ 0 & g_2 & -g_2 - g_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -g_m \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{A}^{(2)} = \mathrm{diag}\{B_1, .., B_m\}; \\ g_n = P_n^{-1}, \end{matrix}$$

где $g_0 = g_{m+1} = 0$. Частное решение системы (9) ищем в виде $\vec{\mathbf{X}} = e^{\lambda x} \vec{\mathbf{h}}$, где $\vec{\mathbf{h}}$ – некоторый вектор. В результате получим

$$\left(\mathbf{A}^{(2)} \lambda^2 + \mathbf{A}^{(0)} \right) \vec{\mathbf{h}} = 0. \tag{10}$$

Откуда следует характеристическое уравнение

$$\det \mathbf{A}(\lambda) = 0, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}^{(2)} \lambda^2 + \mathbf{A}^{(0)}$.

Уравнение (11) имеет корень $\lambda = 0$ второй кратности. Общее число ненулевых корней уравнения (11) составляет $2(m-1)$. Следовательно, общее решение системы (9) имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}} = (u_1, \quad u_2, \quad ..., \quad u_m)^T = \sum_{k=1}^{2(m-1)} C_k \vec{\mathbf{h}}_k \, e^{\lambda_k x} + \sum_{n=0}^{1} x^n \vec{\mathbf{H}}_n. \tag{12}$$

Векторы $\vec{\mathbf{h}}_k$ представляют собой нетривиальные решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}(\lambda_k) \vec{\mathbf{h}}_k = 0.$$

Вектор $\vec{\mathbf{h}}_k$ определяется с точностью до произвольного множителя C_k, поскольку дефект матрицы $\mathbf{A}(\lambda_k)$ при всех корнях $\lambda_k \neq 0$ равен единице.

Векторы $\vec{\mathbf{H}}_n$ содержат две константы интегрирования S_1, S_2:

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = S_0 \vec{\mathbf{I}}, \; \vec{\mathbf{H}}_1 = S_1 \vec{\mathbf{I}}, \quad \text{где } \vec{\mathbf{I}}_1 = (1, 1, 1, ..., 1)^T;$$

Константы C_k, $k = 1, 2, ..., 2(m-1)$ и S_0, S_2 определяются из $2m$ краевых условий: продольное перемещение или продольное усилие на концах стержня. Удовлетворение краевым условиям приводит к системе линейных уравнений относительно перечисленных констант.

Численный пример. Рассмотрим клеевое соединение многослойного композита с металлической законцовкой. Многослойный композит будем рассматривать согласно изложенной выше модели, а законцовку – как однородную балку. Металл имеет относительно высокий модуль межслойного сдвига, и модель однородной балки хорошо описывает напряженное состояние металлической законцовки. Для определенности будем считать, что композитный стержень, выполненный из углепластика, состоит из шести монослоев, а законцовка изготовлена из алюминия. Схема соединения изображена на рис. 2. Начало координат поместим на границе области склейки.

Очевидно, что если длина L_1 намного превышает толщину многослойного стержня, то различия в краевых условиях отдельных стержней на конце $x = L_1$ не оказывают влияния на напряженное состояние соединения, поскольку локальные неоднородности напряженного состояния быстро (экспоненциально) убывают при удалении от конца стержня.

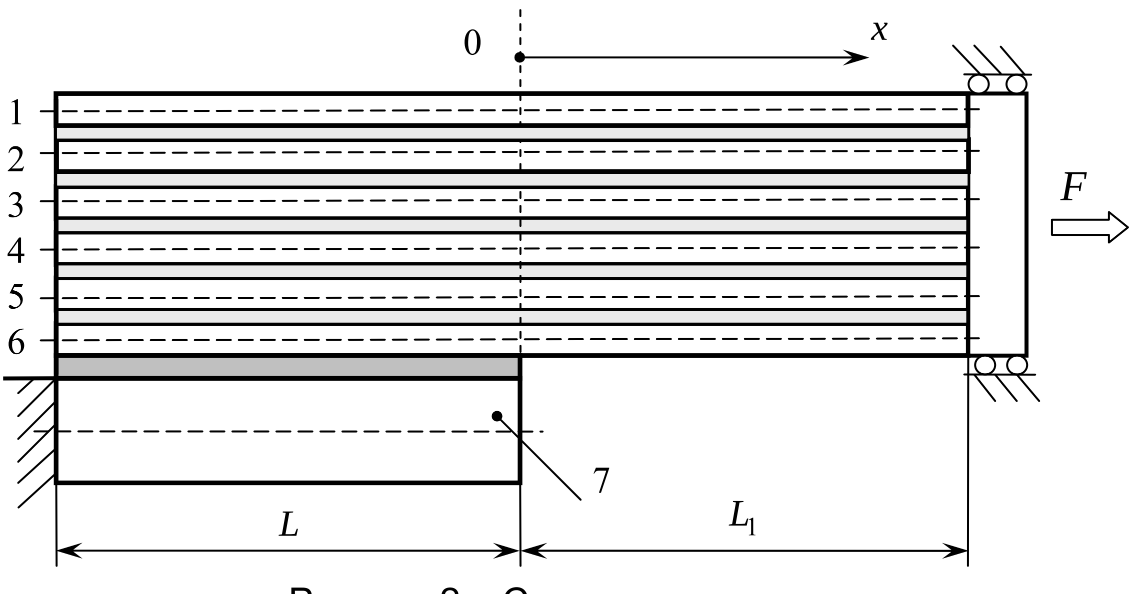

Рисунок 2 – Схема соединения

На участке $x \in (0, L_1)$ задача решается для 6 слоев, а на участке склейки – для 7 слоев.

Перемещения и усилия в монослоях композита за пределами склейки ($x \in [0; L_1]$) обозначим u_n, w_n, N_n, Q_n, M_n, ($n = 1,...,6$), а внутри области склейки ($x \in [-L; 0]$) – $\bar{u}_n$, $\bar{w}_n$ $\bar{N}_n$, $\bar{Q}_n$, $\bar{M}_n$ ($n = 1, ...,6$) и для законцовки – $\bar{u}_7$, $\bar{w}_7$ $\bar{N}_7$, $\bar{Q}_7$, $\bar{M}_7$. Краевые условия имеют вид

$$\bar{N}_n(-L) = \bar{M}_n(-L) = \bar{Q}_n(-L) = 0;$$

$$\bar{u}_7(-L) = \bar{w}_7(-L) = \left.\frac{d\bar{w}_7}{dx}\right|_{x=-L} = 0;\ \bar{N}_7(0) = \bar{M}_7(0) = \bar{Q}_7(0) = 0;$$

$$\bar{u}_n(0) = u_n(0);\ \ \bar{w}_n(0) = w_n(0);\ \ \bar{N}_n(0) = N_n(0);\ N_n(L_1) = F_n;$$

$$\bar{M}_n(0) = M_n(0);\ \bar{Q}_n(0) = Q_n(0);\ \ w_n(L_1) = \left.\frac{dw_n}{dx}\right|_{x=L_1} = 0.$$

Длины участков $L = 25$ мм и $L_1 = 100$ мм. Параметры всех элементов соединения приведены в таблице.

Таблица – Параметры элементов соединения

n	s_n, [мм]	E_n,[ГПа]	δ_n, [мм]	G_n, [ГПа]	$E_n^{(g)}$, [ГПа]
1	0,125	210	0,1	1,5	4,35
2	0,125	210	0,1	1,5	4,35
3	0,125	210	0,1	1,5	4,35
4	0,125	210	0,1	1,5	4,35
5	0,125	210	0,1	1,5	4,35
6	0,125	210	0, 25	0,9	2,65
7	1,5	72	–	–	–

Будем считать, что соединение нагружено продольным растягивающим усилием $F = 1$ Н/м. Следовательно, к каждому монослою композита приложено продольное усилие $F_n = \dfrac{1}{6}$ Н/м.

Касательные напряжения в соединительных слоях композита в окрестности соединения и в клеевом слое показаны на рис. 3.

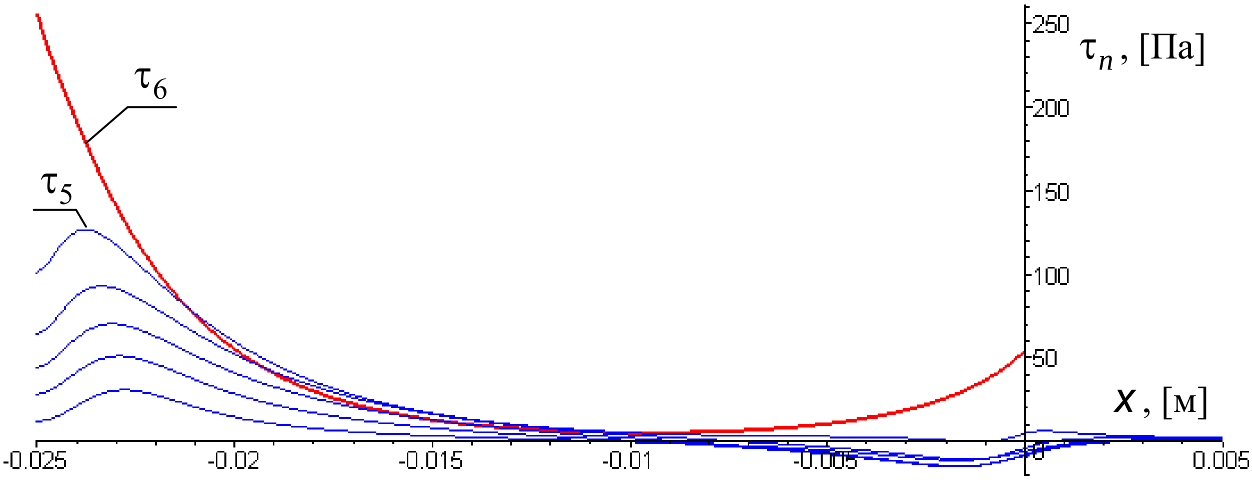

Рисунок 3 – Касательные напряжения в соединительных слоях

Из приведенного графика видно, что касательные напряжения максимальны у левого края соединения, в окрестности заделки. Более подробно распределение касательных напряжений в этой области иллюстрирует рис. 4.

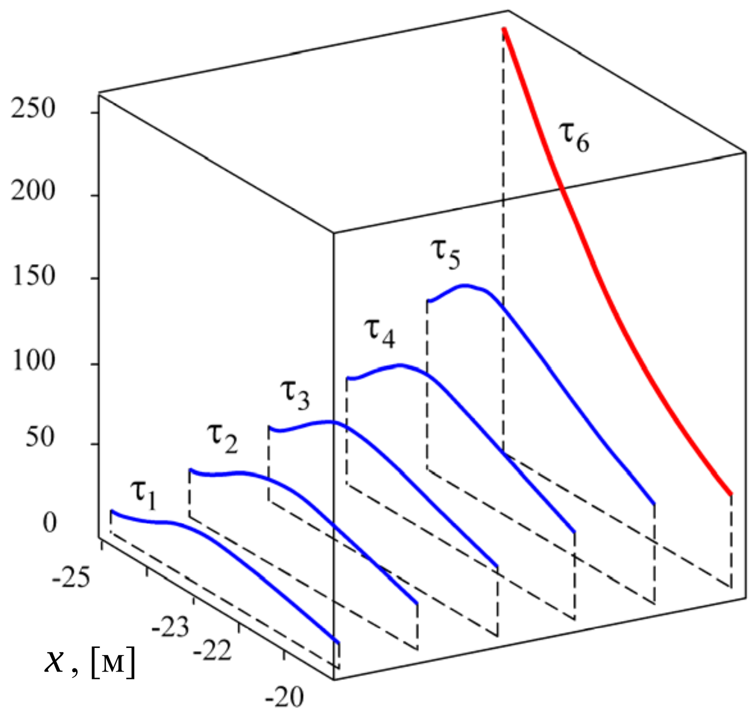

Рисунок 4 – Касательные напряжения в окрестности заделки

Из графиков видно, что в области, расположенной приблизительно в пределах $x \in \left(-0{,}02; -0{,}01\right)$, касательные напряжения в глубине слоя композита (τ_5) превосходят по величине напряжения в клее, что согласуется с результатами работы [4]. Однако у концов соединения касательные напряжения в клее, как и следует этого ожидать, превосходят напряжения внутри композитного слоя.

Нормальные напряжения в трансверсальном направлении в соединительных слоях также имеют максимумы в окрестности концов соединения, тогда как на большей части соединения данные напряжения близки к нулю. Графики нормальных напряжений в окрестности заделки показаны на рис. 5. Именно в этой области напряжения достигают максимума и в несколько раз превосходят напряжения у другого конца соединения.

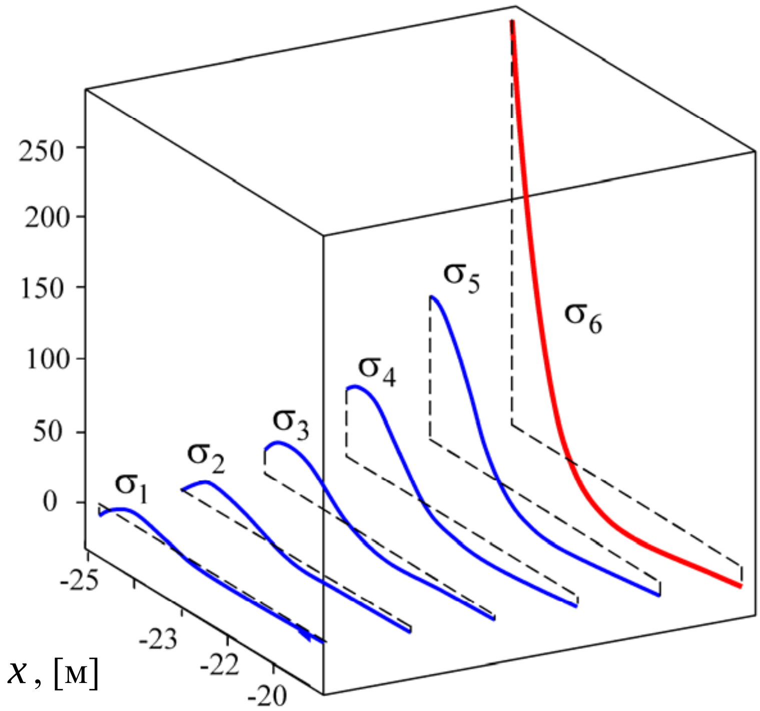

Рисунок 5 – Нормальные напряжения в окрестности заделки

Из графиков видно, что напряжения в ближайшем к клеевому слою соединительном слое многослойного стержня (τ_5 и σ_5) хоть и уступают по величине напряжениям в клее, однако относительно велики. Поэтому в случае низкой межслойной прочности многослойного композита разрушение соединения может произойти в форме расслоения композита по данному соединительному слою.

Верификацию предложенной методики можно провести, сравнив результаты счета с расчетом напряженного состояния соединения по классической модели Голанда и Рейснера. В этом случае композитный стержень полагается однородным, а его модуль упругости вычисляется по правилу смесей с использованием данных табл. 1. Вычисления показали, что напряжения в клеевом слое, рассчитанные по предложенному подходу, отличаются от рассчитанных по классической модели Голанда и Рейсснера всего на несколько процентов. Распределение касательных напряжений по толщине соединяемых деталей в однородном стержне имеет квадратичную зависимость [8, 9] (обобщение формулы Журавского), весьма близкую к линейной, и заметно отличается от результатов, представленных на рис. 5. Однако распределение по толщине нормальных напряжений в трансверсальном направлении, если полагать композитный стержень однородным, не может быть определено в силу гипотез, лежащих в основе теории балок.

Чтобы оценить влияние прогиба на напряженное состояние соединения, проведем расчет напряженного состояния соединения, используя модель Фолькерсена (9) - (12) и указанные выше параметры модельной задачи. На рис. 6 показаны графики касательных напряжений в соединительных слоях

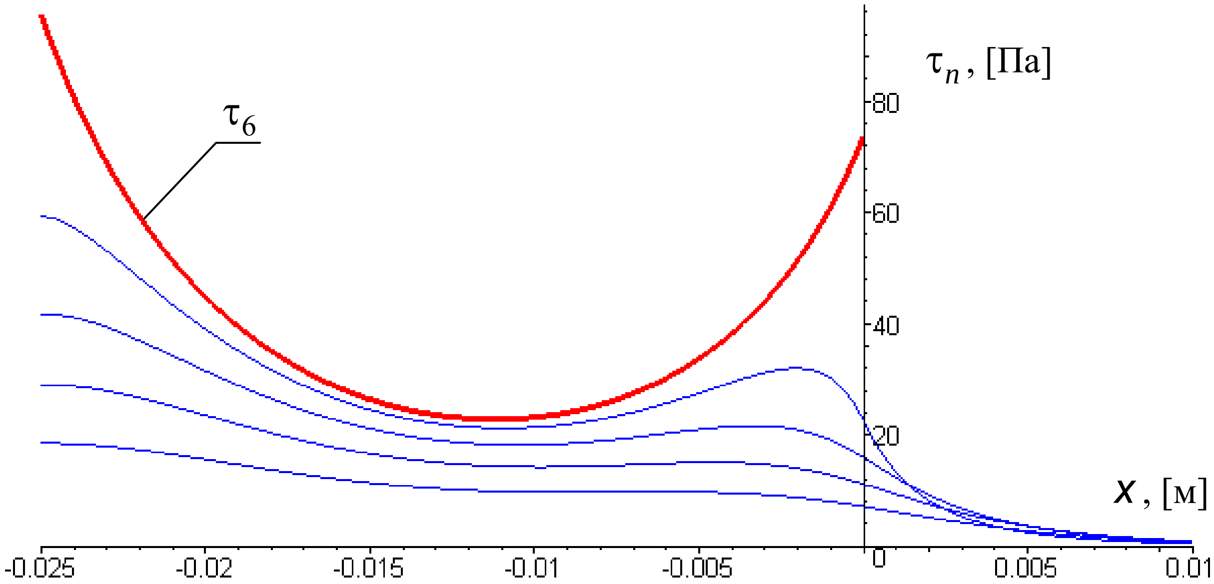

Рисунок 6 – Касательные напряжения в соединительных слоях

Сравнение рис. 3 и 6 показывает, что влияние прогиба на напряженное состояние соединения в данном случае весьма велико и максимальные напряжения, рассчитанные по обеим методикам, отличаются более чем в два раза.

Выводы. Модель клеевого соединения Голанда и Рейсснера обобщена на произвольное число соединяемых слоев. Полученная методика использована для анализа напряженного состояния соединения, состоящего из стержня, выполненного из слоистого композиционного материала и металлической законцовки. Отмечено, что разрушение соединения может происходить в форме расслоения композиционного материала по соединительным слоям, ближайшим к клеевому слою.

Предложенный подход не чувствителен к отношению толщины пакета к длине соединения, в отличие от классической балочной теории.

Данный подход может быть использован для расчета соединений элементов конструкций из слоистых композитов со ступенчатым изменением толщины соединения, соединений с продольными силовыми элементами и для расчета многосрезных соединений с произвольным числом клеевых слоев. В модель могут быть также включены температурные напряжения.

Список использованных источников

1. Galliot, C. Drop weight tensile impact testing of adhesively bonded carbon/epoxy laminate joints [Текст] / C.Galliot, J.Rousseau, G.Verchery // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2012, V.35, pp.68–75.

2. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. – 359 с.

3. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластины [Текст] / А.Р. Ржаницын – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

4. Васильев, В.В. Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом [Текст] / В.В. Васильев, Ю.В. Боков / Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 4 –10.

5. Васильев, В.В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости [Текст] // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 62-72.

6. Кутьинов, В.Ф. Расчет клеевых соединений [Текст] / В.Ф. Кутьинов // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. - Вып. 7. – С. 14 – 30.

7. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голанда-Рейсснера склеенных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 11, Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975, – С. 136–148.

8. Zhao, B.A Two-Dimensional Approach of Single-Lap Adhesive Bonded Joints [Текст] / B. Zhao, Z-H. Lu // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2009, V.16, Pp. 130–159.

9. Zhao, B., Lu Z-H., Lu Y-N, Closed-form solutions for elastic stress–strain analysis in unbalanced adhesive single-lap joints considering adherend deformations and bond thickness // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2011, V. 31, Pp. 434–445.

Поступила в редакцию 28.02.2014.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.