

УДК 531.8

А.В. Бетин, д-р техн. наук,
Д.А. Бетин, канд. техн. наук,
А.А. Дунаев

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНКИ ДОСТОВЕРНОСТИ ПРОЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Массово-инерционные параметры (МИП) летательного аппарата (ЛА) определяют динамические характеристики изделия в эксплуатации. Поэтому для разработчиков ЛА необходимо знать величины МИП с максимально возможной точностью.

Расчеты МИП ЛА выполняют на всех этапах проектирования (предварительного, эскизного и рабочего), используя методы и формулы соответствующих приближений. Результаты расчетов проверяют при изготовлении, испытаниях и доводке, эксплуатации и ремонте ЛА. При проектировании эти процедуры имеют первостепенное значение, так как от правильности полученных результатов и принятия последующих решений зависит успех в создании ЛА.

При расчете МИП ЛА образуются и накапливаются соответствующие погрешности определения (вычисления) массы, осевых и центробежных моментов инерции проектируемых изделий. Применение вычислительной техники и соответствующего программного обеспечения позволяет сократить время расчетов МИП ЛА и избавиться от многих, но не всех возможных погрешностей измерений и вычислений. Однако даже использование современных вычислительных средств не исключает необходимости рассмотрения вопросов, связанных с точностью и достоверностью получаемых результатов.

Имеющиеся в настоящее время теоретические разработки не позволяют дать гарантированного заключения о достоверности результатов расчетов МИП ЛА в целом и осевых моментов инерции в частности. Существующая потребность в проведении исследований по указанной проблеме и определила цель данной работы.

Рассматриваемая проблема непосредственно связана с точностью вычислительного эксперимента по определению значений осевых моментов инерции проектируемых ЛА. Мерой точности вычислений является их погрешность. Поэтому кроме найденного приближенного значения искомой величины необходимо найти погрешность ее определения, т.е. отклонение результата расчета от истинного значения величины [1, 2].

Погрешности определения осевых моментов инерции по характеру их происхождения следует разделить на три типа [3]:

а) промахи, связанные с грубыми ошибками из-за недостаточной внимательности проектировщиков, программистов или операторов при

вводе исходных данных по геометрии конструкции изделия, характеристикам плотности применяемых материалов, координатам, массе и собственным моментам инерции комплектующих изделий;

б) систематические погрешности, к которым относят погрешности, остающиеся постоянными или закономерно изменяющимися при повторном вычислении одной и той же величины, например:

1) погрешности метода расчета (или теоретические погрешности);

2) погрешности использования приближенных моделей проектируемого изделия;

3) погрешности, связанные с предыдущими измерениями и расчетами масс, координат центров масс и собственных моментов инерции комплектующих изделий;

4) погрешности, определяемые неточными (или имеющими разброс) физико-механическими характеристиками применяемых конструкционных материалов;

5) погрешности, определяемые неизбежными технологическими допусками на размеры сортамента или деталей;

6) погрешности, связанные с округлением величин;

в) случайные погрешности, проявляющиеся в разбросе отсчетов при повторных расчетах, проведенных с использованием одних и тех же вычислительных средств. Эти погрешности являются неопределенными по своей величине и природе и обусловлены причинами, зависящими, как правило, от вычислительного устройства (например, сбои в работе). Уменьшение их влияния достигается повторными расчетами.

Различают абсолютную и относительную погрешности. Если $x^{ист}$ обозначает истинное, а $x^{выч}$ – вычисленное приближенное значение величины X , то разность $x^{ист} - x^{выч}$ называется истинной абсолютной погрешностью, а $(x^{ист} - x^{выч}) / x^{выч}$ – истинной относительной погрешностью определения величины X при вычислении [1, 2].

К сожалению, истинное значение величины X неизвестно. Поэтому истинные абсолютная и относительная погрешности также неизвестны. Напротив, можно указать граничную величину истинной абсолютной погрешности, т.е. положительное число $\Delta x^{выч}$, для которого выполняется неравенство [1, 2]

$$|x^{ист} - x^{выч}| \leq \Delta x^{выч} \quad (1)$$

или

$$x^{выч} - \Delta x^{выч} \leq x^{ист} \leq x^{выч} + \Delta x^{выч} \quad (2)$$

Величину $\Delta x^{выч}$ называют пределом погрешности, или предельной абсолютной погрешностью определения величины X при

вычислении, а $\delta x^{\text{выч}} = \Delta x^{\text{выч}} / |x^{\text{выч}}|$ – предельной относительной погрешностью определения величины X при вычислении (которую в большинстве случаев указывают в процентах).

Следовательно, нельзя с уверенностью сказать, что полученные в результате расчетов значения величины X являются истинными. Можно лишь указать значения предельных абсолютных погрешностей определения величины X , т.е. "зону нечувствительности" к результатам расчетов.

Рассмотрим особенности применения представленных выше положений элементарной теории ошибок к оценке достоверности вычисленных значений осевых моментов инерции проектируемых ЛА.

Если тело условно разбить на N материальных точек с массой m_i , одинаковой для любой из них, то выражения для определения осевых моментов инерции тела в прямоугольной системе координат $OXYZ$ будут иметь следующий вид [4]:

$$I_x = m_i \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 + \sum_{i=1}^N z_i^2 \right); \quad I_y = m_i \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i=1}^N z_i^2 \right);$$

$$I_z = m_i \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 \right),$$
(3)

где I_x, I_y, I_z – осевые моменты инерции тела относительно осей OX, OY и OZ соответственно; x_i, y_i, z_i – координаты i -й материальной точки тела относительно осей системы координат $OXYZ$.

Судя по выражениям (3), как истинные, так и вычисленные значения осевых моментов инерции тела произвольной формы не могут быть меньше нуля, т.е.

$$I_x^{\text{ист}} \geq 0; \quad I_y^{\text{ист}} \geq 0; \quad I_z^{\text{ист}} \geq 0$$
(4)

и

$$I_x^{\text{выч}} \geq 0; \quad I_y^{\text{выч}} \geq 0; \quad I_z^{\text{выч}} \geq 0.$$
(5)

С другой стороны, согласно интервальному неравенству (2)

$$I_x^{\text{выч}} - \Delta I_x^{\text{выч}} \leq I_x^{\text{ист}} \leq I_x^{\text{выч}} + \Delta I_x^{\text{выч}};$$

$$I_y^{\text{выч}} - \Delta I_y^{\text{выч}} \leq I_y^{\text{ист}} \leq I_y^{\text{выч}} + \Delta I_y^{\text{выч}};$$

$$I_z^{\text{выч}} - \Delta I_z^{\text{выч}} \leq I_z^{\text{ист}} \leq I_z^{\text{выч}} + \Delta I_z^{\text{выч}},$$
(6)

где $I_x^{\text{ист}}, I_y^{\text{ист}}, I_z^{\text{ист}}, I_x^{\text{выч}}, I_y^{\text{выч}}, I_z^{\text{выч}}$ – истинные и вычисленные значе-

ния осевых моментов инерции тела; $\Delta I_x^{выч}$, $\Delta I_y^{выч}$, $\Delta I_z^{выч}$ – предельные абсолютные погрешности вычислений осевых моментов инерции I_x , I_y , I_z .

Согласно (4) даже предельные значения в неравенствах (6) не могут быть меньше нуля, поэтому, используя их, получим следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} I_x^{выч} - \Delta I_x^{выч} \geq 0; \\ I_x^{выч} + \Delta I_x^{выч} \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} I_y^{выч} - \Delta I_y^{выч} \geq 0; \\ I_y^{выч} + \Delta I_y^{выч} \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} I_z^{выч} - \Delta I_z^{выч} \geq 0; \\ I_z^{выч} + \Delta I_z^{выч} \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

разрешая которые относительно $I_x^{выч}$, $I_y^{выч}$ и $I_z^{выч}$, окончательно получим

$$I_x^{выч} \geq \Delta I_x^{выч}; \quad I_y^{выч} \geq \Delta I_y^{выч}; \quad I_z^{выч} \geq \Delta I_z^{выч}, \quad (8)$$

т.е. вычисленные значения осевых моментов инерции тела не должны быть меньше предельных абсолютных погрешностей их вычислений.

Приближение вычисленных значений $I_x^{выч}$, $I_y^{выч}$, $I_z^{выч}$ осевых моментов инерции к нулю ведет к неопределенности в решении вопроса о достоверности результатов численного эксперимента. С уверенностью говорить о достоверности вычисленных значений осевых моментов инерции возможно лишь в том случае, если вычисленные значения осевых моментов инерции проектируемого изделия больше соответствующих значений предельных абсолютных погрешностей их вычислений.

Кроме того, основанием своеобразной проверки правильности вычисления осевых и центробежных моментов инерции может служить то обстоятельство, что для тела произвольной формы моменты инерции относительно осей прямоугольной системы координат $OXYZ$ с произвольно выбранным положением начала координат связаны определенной системой нестрогих неравенств [4].

Действительно, используя выражения (3), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} I_x + I_y &= I_z + 2m_i \sum_{i=1}^N z_i^2; \\ I_x + I_z &= I_y + 2m_i \sum_{i=1}^N y_i^2; \\ I_y + I_z &= I_x + 2m_i \sum_{i=1}^N x_i^2, \end{aligned} \quad (9)$$

а, следовательно,

$$I_x + I_y \geq I_z; \quad I_x + I_z \geq I_y; \quad I_y + I_z \geq I_x. \quad (10)$$

Неравенства (10) не содержат членов, связанных с точностью вычислительного эксперимента по определению осевых моментов инерции I_x, I_y, I_z , поэтому их запись в наиболее корректной форме

$$I_x^{уст} + I_y^{уст} \geq I_z^{уст}; \quad I_x^{уст} + I_z^{уст} \geq I_y^{уст}; \quad I_y^{уст} + I_z^{уст} \geq I_x^{уст} \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} I_x^{уст} + I_y^{уст} - I_z^{уст} &\geq 0; \\ I_x^{уст} + I_z^{уст} - I_y^{уст} &\geq 0; \\ I_y^{уст} + I_z^{уст} - I_x^{уст} &\geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для тела произвольной формы сумма истинных значений любых двух осевых моментов инерции не меньше истинного значения третьего осевого момента инерции относительно осей любой прямоугольной системы координат. Жаль только, что истинные значения осевых моментов инерции неизвестны и неравенства (11) или (12) напрямую использовать невозможно.

С другой стороны, выполнив совместные преобразования неравенств (6) к форме левых частей неравенств (12), получим

$$\begin{aligned} I_x^{выч} + I_y^{выч} - I_z^{выч} + \Delta I^{выч} &\geq I_x^{уст} + I_y^{уст} - I_z^{уст} \geq \\ &\geq I_x^{выч} + I_y^{выч} - I_z^{выч} - \Delta I^{выч}; \\ I_x^{выч} + I_z^{выч} - I_y^{выч} + \Delta I^{выч} &\geq I_x^{уст} + I_z^{уст} - I_y^{уст} \geq \\ &\geq I_x^{выч} + I_z^{выч} - I_y^{выч} - \Delta I^{выч}; \\ I_y^{выч} + I_z^{выч} - I_x^{выч} + \Delta I^{выч} &\geq I_y^{уст} + I_z^{уст} - I_x^{уст} \geq \\ &\geq I_y^{выч} + I_z^{выч} - I_x^{выч} - \Delta I^{выч}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta I^{выч} = \Delta I_x^{выч} + \Delta I_y^{выч} + \Delta I_z^{выч}$.

По определению предельные абсолютные погрешности вычислений осевых моментов инерции $\Delta I_x^{выч} \geq 0$, $\Delta I_y^{выч} \geq 0$, $\Delta I_z^{выч} \geq 0$ и, следовательно, $\Delta I^{выч} = \Delta I_x^{выч} + \Delta I_y^{выч} + \Delta I_z^{выч} \geq 0$. Тогда при близких значениях $I_x^{выч} + I_y^{выч}$ и $I_z^{выч}$, $I_x^{выч} + I_z^{выч}$ и $I_y^{выч}$ или $I_y^{выч} + I_z^{выч}$ и $I_x^{выч}$ трудно с уверенностью назвать знак правых частей неравенств (13), т.е. эти части неравенств невозможно использовать в качестве гарантированных проверочных соотношений, касающихся правильности определения осевых моментов инерции I_x, I_y, I_z .

Однако для левых и центральных частей неравенств (13) с учетом (12) можно записать, что

$$\begin{aligned} I_x^{\text{выч}} + I_y^{\text{выч}} - I_z^{\text{выч}} + \Delta I^{\text{выч}} &\geq I_x^{\text{уст}} + I_y^{\text{уст}} - I_z^{\text{уст}} \geq 0; \\ I_x^{\text{выч}} + I_z^{\text{выч}} - I_y^{\text{выч}} + \Delta I^{\text{выч}} &\geq I_x^{\text{уст}} + I_z^{\text{уст}} - I_y^{\text{уст}} \geq 0; \\ I_y^{\text{выч}} + I_z^{\text{выч}} - I_x^{\text{выч}} + \Delta I^{\text{выч}} &\geq I_y^{\text{уст}} + I_z^{\text{уст}} - I_x^{\text{уст}} \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} I_x^{\text{выч}} + I_y^{\text{выч}} - I_z^{\text{выч}} &\geq -\Delta I^{\text{выч}}; \\ I_x^{\text{выч}} + I_z^{\text{выч}} - I_y^{\text{выч}} &\geq -\Delta I^{\text{выч}}; \\ I_y^{\text{выч}} + I_z^{\text{выч}} - I_x^{\text{выч}} &\geq -\Delta I^{\text{выч}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Неравенства (15) как раз и являются искомыми гарантированными проверочными соотношениями при расчетном определении осевых моментов инерции I_x , I_y , I_z на всех этапах проектирования ЛА.

В частности, на этапе предварительного проектирования в первом приближении расчетов (с индексом “I”) осевых моментов инерции используют формулы [5]:

$$I_x^I = \frac{m_0^I \ell_{кр}^2}{12} \phi_x; \quad I_y^I = \frac{m_0^I}{12} (\ell_{кр}^2 + \ell_{\phi}^2) \phi_y; \quad I_z^I = \frac{m_0^I \ell_{\phi}^2}{12} \phi_z, \quad (16)$$

где m_0^I – взлетная масса ЛА в первом приближении расчетов; $\ell_{кр}$, ℓ_{ϕ} – размах крыла и длина фюзеляжа ЛА; ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z – статистические коэффициенты, зависящие от m_0^I , аэродинамической схемы и назначения ЛА.

Учитывая, что в данном приближении $I_x^{\text{выч}} = I_x^I$, $I_y^{\text{выч}} = I_y^I$, $I_z^{\text{выч}} = I_z^I$, $\Delta I_x^{\text{выч}} = \Delta I_x^I$, $\Delta I_y^{\text{выч}} = \Delta I_y^I$, $\Delta I_z^{\text{выч}} = \Delta I_z^I$ и, следовательно, $\Delta I^{\text{выч}} = \Delta I^I = \Delta I_x^I + \Delta I_y^I + \Delta I_z^I$, соотношения (15) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{m_0^I \ell_{кр}^2}{12} \phi_x + \frac{m_0^I}{12} (\ell_{кр}^2 + \ell_{\phi}^2) \phi_y - \frac{m_0^I \ell_{\phi}^2}{12} \phi_z &\geq -\Delta I^I; \\ \frac{m_0^I \ell_{кр}^2}{12} \phi_x - \frac{m_0^I}{12} (\ell_{кр}^2 + \ell_{\phi}^2) \phi_y + \frac{m_0^I \ell_{\phi}^2}{12} \phi_z &\geq -\Delta I^I; \\ -\frac{m_0^I \ell_{кр}^2}{12} \phi_x + \frac{m_0^I}{12} (\ell_{кр}^2 + \ell_{\phi}^2) \phi_y + \frac{m_0^I \ell_{\phi}^2}{12} \phi_z &\geq -\Delta I^I, \end{aligned} \quad (17)$$

а после сокращения на $\frac{m_0^l \ell_{кр}^2}{12}$ при $\bar{\ell} = \frac{\ell_{\phi}}{\ell_{кр}}$

$$\begin{aligned}\phi_x + (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y - \bar{\ell}^2\phi_z &\geq -\frac{12\Delta I'}{m_0^l \ell_{кр}^2}; \\ \phi_x - (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y + \bar{\ell}^2\phi_z &\geq -\frac{12\Delta I'}{m_0^l \ell_{кр}^2}; \\ -\phi_x + (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y + \bar{\ell}^2\phi_z &\geq -\frac{12\Delta I'}{m_0^l \ell_{кр}^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Величина $\Delta I'$ зависит от m_0^l , $\ell_{кр}$, ℓ_{ϕ} , ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z , предельных абсолютных погрешностей Δm_0^l , $\Delta \ell_{кр}$, $\Delta \ell_{\phi}$, $\Delta \phi_x$, $\Delta \phi_y$, $\Delta \phi_z$, а их определение и расчет опираются на данные статистики с использованием формул теории ошибок [2, 6].

Из-за недостатка исходных данных, дефицита времени на проведение предварительных расчетов или других соображений погрешностями вычислений осевых моментов инерции могут и пренебречь. Рассмотрим эту ситуацию с точки зрения доверия к результатам расчетов осевых моментов инерции I_x , I_y , I_z на этапе предварительного проектирования в первом приближении. Для этого в проверочных соотношениях (18) факт пренебрежения погрешностями вычислений осевых моментов инерции отразим в виде нулевых значений правых частей, после чего соотношения (18) примут вид

$$\begin{aligned}\phi_x + (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y - \bar{\ell}^2\phi_z &\geq 0; \\ \phi_x - (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y + \bar{\ell}^2\phi_z &\geq 0; \\ -\phi_x + (1 + \bar{\ell}^2)\phi_y + \bar{\ell}^2\phi_z &\geq 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Выполнив преобразования второго из соотношений (19), получим условие

$$\phi_x \geq \bar{\ell}^2(\phi_y - \phi_z) + \phi_y.\quad (20)$$

Согласно (20) при $\phi_y = \phi_z$ необходимо, чтобы $\phi_x \geq \phi_y$.

Предлагаемые в работе [5] графики зависимости коэффициентов ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z от m_0^l для расчета осевых моментов инерции обычных самолетов в первом приближении находятся в противоречии с условием (20), если $m_0^l < 180$ тонн (рис. 1).

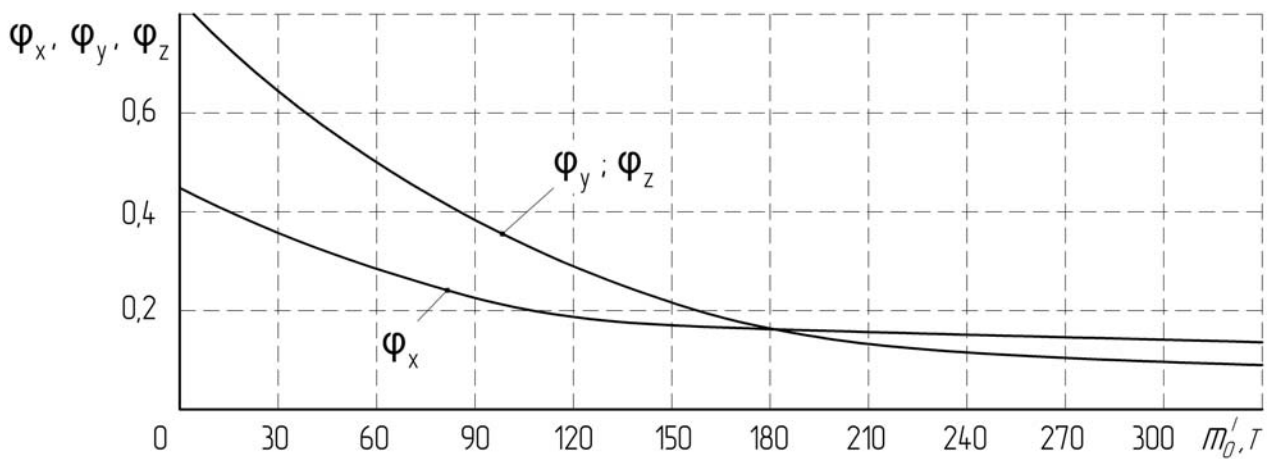


Рисунок 1 – Графики зависимости коэффициентов φ_x , φ_y , φ_z от m_0^I, T для расчета осевых моментов инерции обычных самолетов

Естественно, что такое противоречие не повышает степени доверия к полученным расчетным результатам и требует дополнительных исследований с использованием всех доступных данных, в частности относящихся к погрешностям определения осевых моментов инерции проектируемого ЛА.

Список использованных источников

1. Турчак, Л.И. Основы вычислительных методов [Текст] / Л.И. Турчак. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М. : Наука, 1980. – 976 с.
3. Шейнин, В.М. Весовое проектирование и эффективность пассажирских самолетов [Текст]: справ. / В.М. Шейнин, В.И. Козловский. – М. : Машиностроение, 1984. – Ч. 2. – 552 с.
4. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики [Текст] / Н.Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1969. – 332 с.
5. Проектирование самолетов [Текст] : учебник для вузов / С.М. Егер, В.Ф. Мишин, Н.К. Лисейцев и др. – М. : Машиностроение, 1983. – 616 с.
6. Бетин, Д.А. Определение погрешностей вычислений моментов инерции свободнолетающей модели самолета в первом приближении [Текст] / Д.А. Бетин // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1(52). – Х., 2008. – С. 108-122.

Поступила в редакцию 09.06.2014.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Рыженко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.