УДК 629.7.028 + 624.078.43

А.А. Ветлугин,
П.М. Гагауз, канд. техн. наук,
Я.С. Карпов, д-р техн. наук

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХСТОРОННЕГО АДГЕЗИОННОГО СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Двухсторонние клеевые соединения применяются в целях повышения несущей способности и уменьшения длины соединения, особенно при необходимости склеивания толстых деталей (более 3 мм). Если конструкция симметрична относительно срединной поверхности (рис. 1), то возможно рассмотрение половины соединения, как это сделано в работе [1]. Достоверность такого решения определяется симметрией геометрии и нагрузок, что на практике встречается довольно редко. Если же речь идет о конструкциях из слоистых композитов, то такое решение можно применять только в случае симметрии еще и в упругих свойствах по толщине соединения. В связи с этим актуальна разработка методики определения напряженно-деформированного состояния (НДС) двухстороннего адгезионного соединения.

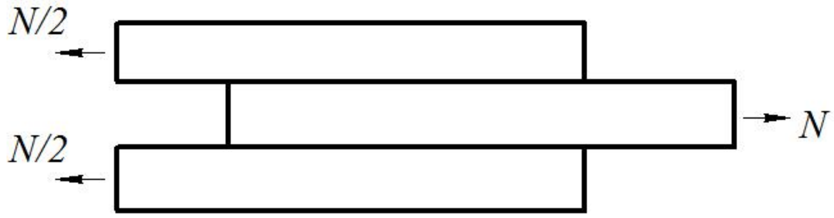

Рисунок 1 – Двухстороннее адгезионное соединение

Рассмотрим конструкцию соединения деталей постоянной жесткости по длине при произвольном осевом нагружении общего вида (рис. 2). Неизвестными (искомыми) величинами в данной задаче являются осевые напряжения в деталях σ_{1x}, σ_{2x} и σ_{3x} и касательные напряжения в клеевых слоях τ_{1x} и τ_{2x} (см. рис. 2). Выделим элементарный участок соединения длиной dx и после декомпозиции составим уравнения равновесия деталей единичной ширины [2, 3]:

$$\begin{aligned} &\delta_1 \frac{\partial \sigma_{1x}}{\partial x} + \tau_{1x} = 0; \\ &\delta_2 \frac{\partial \sigma_{2x}}{\partial x} + \tau_{2x} - \tau_{1x} = 0; \\ &\delta_3 \frac{\partial \sigma_{3x}}{\partial x} - \tau_{2x} = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

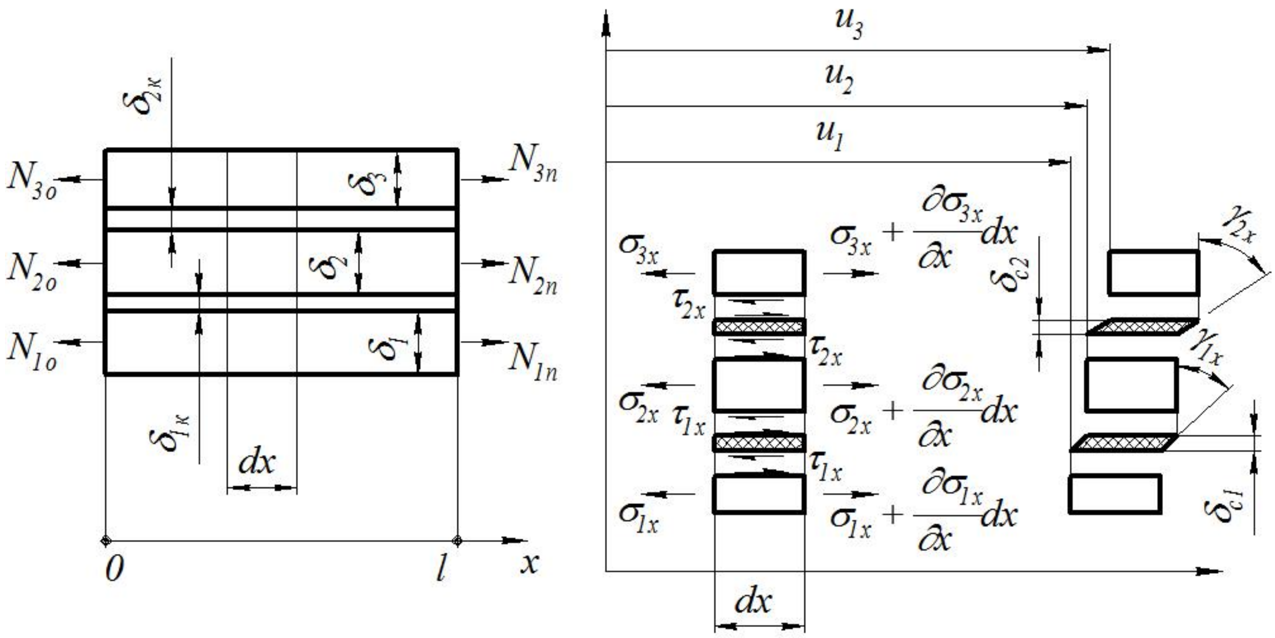

Рисунок 2 – Схема НДС соединения

Эти три уравнения равновесия содержат пять неизвестных, т.е. задача является статически неопределимой. Для формирования полной разрешающей системы уравнений необходимо дополнительно привлечь условия совместности деформаций, которые в соответствии со схемой деформирования (см. рис. 2) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\delta_{c1} tg\gamma_{1x} = u_2 - u_1 \approx \delta_{c1}\gamma_{1x} = \delta_{c1}\frac{\tau_{1x}}{G_{c1}};\\ &\delta_{c2} tg\gamma_{2x} = u_3 - u_2 \approx \delta_{c2}\gamma_{2x} = \delta_{c2}\frac{\tau_{2x}}{G_{c2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

В этих зависимостях δ_{c1} и δ_{c2} – толщина соединительных слоев:

- по модели 1 (классическая модель соединительного слоя) [2, 3]:

$$\delta_{c1} = \delta_{1кл};\ \ \delta_{c2} = \delta_{2кл};$$

- по модели 2 (модель Фолькерсена) [2, 3]: (3)

$$\delta_{c1} = \delta_{1кл} + \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2};\ \ \delta_{c2} = \delta_{2кл} + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{2}.$$

Для этих же двух моделей соединительного слоя [2, 3] приведенные значения моделей сдвига G_{c1} и G_{c2}:

- по модели 1 (классическая модель соединительного слоя) [2, 3]:

$$G_{c1} = G_{1кл};\ \ G_{c2} = G_{2кл};$$

- по модели 2 (модель Фолькерсена) [2, 3]: (4)

$$G_{c1} = \delta_{c1}\left(\frac{\delta_1}{2G_1} + \frac{\delta_2}{2G_2} + \frac{\delta_{1кл}}{G_{1кл}}\right)^{-1};\ \ G_{c2} = \delta_{c2}\left(\frac{\delta_2}{2G_2} + \frac{\delta_3}{2G_3} + \frac{\delta_{2кл}}{G_{2кл}}\right)^{-1},$$

где G_i, $i = 1, 2, 3$ – модули сдвига материала деталей в плоскости xz;

$G_{1кл}$, $G_{2кл}$ – модуль сдвига материала клеевых слоев.

Введем обозначения:

$$П_{c1} = \frac{\delta_{c1}}{G_{c1}}; \quad П_{c2} = \frac{\delta_{c2}}{G_{c2}}. \tag{5}$$

Тогда уравнения совместности деформаций (2) примут вид

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \tau_{1x} П_{c1}; \\ u_3 - u_2 &= \tau_{2x} П_{c2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Продифференцируем эти значения и с учетом соотношений Коши получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2x} - \varepsilon_{1x} &= П_{c1} \frac{\partial \tau_{1x}}{\partial x}; \\ \varepsilon_{3x} - \varepsilon_{2x} &= П_{c2} \frac{\partial \tau_{2x}}{\partial x}. \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно физическому закону с учетом гипотезы Дюамеля – Неймана деформации деталей определяют по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1x} &= \frac{\sigma_{1x}}{E_{1x}} + \alpha_{1x} \Delta T; \\ \varepsilon_{2x} &= \frac{\sigma_{2x}}{E_{2x}} + \alpha_{2x} \Delta T; \\ \varepsilon_{3x} &= \frac{\sigma_{3x}}{E_{3x}} + \alpha_{3x} \Delta T, \end{aligned} \tag{8}$$

где E_{ix}, α_{ix}, $i = 1, 2, 3$ – модули упругости и коэффициенты линейного температурного расширения деталей по оси x.

После подстановки этих выражений в зависимости (7) получим два дополнительных уравнения:

$$\begin{aligned} \Pi_{c1} \frac{\partial \tau_{1x}}{\partial x} &= \frac{\sigma_{2x}}{E_{2x}} - \frac{\sigma_{1x}}{E_{1x}} + \Delta T \left(\alpha_{2x} - \alpha_{1x} \right); \\ \Pi_{c2} \frac{\partial \tau_{2x}}{\partial x} &= \frac{\sigma_{3x}}{E_{3x}} - \frac{\sigma_{3x}}{E_{2x}} + \Delta T \left(\alpha_{3x} - \alpha_{2x} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (1) и (9) составляют полную систему для определения неизвестных функций σ_{1x}, σ_{2x} и σ_{3x}, τ_{1x} и τ_{2x}.

В уравнения равновесия (1) входят производные от осевых напряжений, поэтому, чтобы исключить некоторые неизвестные, продифференцируем (9) по x:

$$\Pi_{c1}\frac{\partial^2\tau_{1x}}{\partial x^2}=\frac{1}{E_{2x}}\frac{\partial\sigma_{2x}}{\partial x}-\frac{1}{E_{1x}}\frac{\partial\sigma_{1x}}{\partial x};$$
$$\Pi_{c2}\frac{\partial^2\tau_{2x}}{\partial x^2}=\frac{1}{E_{3x}}\frac{\partial\sigma_{3x}}{\partial x}-\frac{1}{E_{2x}}\frac{\partial\sigma_{2x}}{\partial x}. \qquad (10)$$

Введем обозначения для податливости деталей:

$$\Pi_{1x}=\frac{1}{\delta_1 E_{1x}};\quad \Pi_{2x}=\frac{1}{\delta_2 E_{2x}};\quad \Pi_{3x}=\frac{1}{\delta_3 E_{3x}}$$

и преобразуем (10) с учетом уравнений равновесия (1):

$$\Pi_{c1}\frac{\partial^2\tau_{1x}}{\partial x^2}-\tau_{1x}\left(\Pi_{1x}+\Pi_{2x}\right)+\tau_{2x}\Pi_{2x}=0;$$
$$\Pi_{c2}\frac{\partial^2\tau_{2x}}{\partial x^2}-\tau_{2x}\left(\Pi_{2x}+\Pi_{3x}\right)+\tau_{1x}\Pi_{2x}=0. \qquad (11)$$

Постоянные интегрирования этих дифференциальных уравнений определяют из граничных условий:

а) $x=0$

$$\sigma_{1x}=\frac{N_{10}}{\delta_1};\quad \sigma_{2x}=\frac{N_{20}}{\delta_2};\quad \sigma_{3x}=\frac{N_{30}}{\delta_3};$$

б) $x=\ell$

$$\sigma_{1x}=\frac{N_{1n}}{\delta_1};\quad \sigma_{2x}=\frac{N_{2n}}{\delta_2};\quad \sigma_{3x}=\frac{N_{3n}}{\delta_3}.$$

Переформулируем систему уравнений (11):

$$\frac{\partial^2\tau_{1x}}{\partial x^2}-a_1\tau_{1x}+b_1\tau_{2x}=0;$$
$$\frac{\partial^2\tau_{2x}}{\partial x^2}-a_2\tau_{2x}+b_2\tau_{1x}=0, \qquad (12)$$

где

$$a_1=\frac{\Pi_{1x}+\Pi_{2x}}{\Pi_{c1}};\quad a_2=\frac{\Pi_{2x}+\Pi_{3x}}{\Pi_{c2}};$$
$$b_1=\frac{\Pi_{2x}}{\Pi_{c1}};\quad b_2=\frac{\Pi_{2x}}{\Pi_{c2}}. \qquad (13)$$

Выразим из первого уравнения (12) τ_{2x} и подставим полученный результат во второе уравнение (12). В конечном итоге получим одно-родное дифференциальное уравнение 4-го порядка:

$$\frac{\partial^4\tau_{1x}}{\partial x^4}-\left(a_1+a_2\right)\frac{\partial^2\tau_{1x}}{\partial x^2}-\left(b_1b_2-a_1a_2\right)\tau_{1x}=0. \qquad (14)$$

Характеристическое уравнение имеет четыре решения:

$$\lambda_{1,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[(a_1 + a_2) + \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + 4(b_1 b_2 - a_1 a_2)}\right]};$$
$$\lambda_{2,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[(a_1 + a_2) - \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + 4(b_1 b_2 - a_1 a_2)}\right]}. \quad (15)$$

Анализ подкоренных выражений в формулах (15) показывает, что величины λ являются вещественными числами. Тогда решение дифференциального уравнения (14) можно представить в таком виде:

$$\tau_{1x} = c_1 ch\lambda_1 x + c_2 ch\lambda_2 x + c_3 ch\lambda_1 (x - \ell) + c_4 ch\lambda_2 (x - \ell). \quad (16)$$

Решение для τ_{2x} можно получить из первого уравнения (12):

$$\tau_{2x} = \frac{a_1 - \lambda_1^2}{b_1}\left[c_1 ch\lambda_1 x + c_3 ch\lambda_1 (x - \ell)\right] +$$
$$+\frac{a_1 - \lambda_2^2}{b_1}\left[c_2 ch\lambda_2 x + c_4 ch\lambda_2 (x - \ell)\right]. \quad (17)$$

Для определения постоянных интегрирования подставим (16) и (17) в уравнения (9):

$$\Pi_{c1}\left[\lambda_1 \xi_1(x) + \lambda_2 \xi_2(x)\right] = \frac{\sigma_{2x}}{E_{2x}} - \frac{\sigma_{1x}}{E_{1x}} + \Delta T(\alpha_{2x} - \alpha_{1x});$$
$$\frac{\Pi_{c2}}{b_1}\left[\lambda_1\left(a_1 - \lambda_1^2\right)\xi_1(x) + \lambda_2\left(a_1 - \lambda_2^2\right)\xi_2(x)\right] = \quad (18)$$
$$= \frac{\sigma_{3x}}{E_{3x}} - \frac{\sigma_{2x}}{E_{2x}} + \Delta T(\alpha_{3x} - \alpha_{2x}),$$

где $\xi_1(x) = c_1 sh\lambda_1 x + c_3 sh\lambda_1 (x - \ell)$;

$$\xi_2(x) = c_2 sh\lambda_2 x + c_4 sh\lambda_2 (x - \ell). \quad (19)$$

В эту систему из двух уравнений входят три неизвестных. Для получения недостающего уравнения рассмотрим равновесие частей соединения в некотором сечении (рис. 3):

$$N_{1x} + N_{2x} + N_{3x} = N_{10} + N_{20} + N_{30} = N_{1n} + N_{2n} + N_{3n}. \quad (20)$$

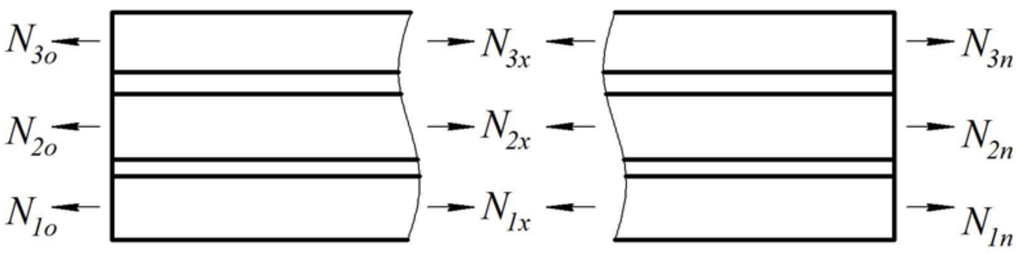

Рисунок 3 – К определению постоянных интегрирования

Формально эти соотношения следуют из дифференциальных уравнений равновесия (1), которые после сложения и интегрирования принимают вид

$$\delta_1\sigma_{1x} + \delta_2\sigma_{2x} + \delta_3\sigma_{3x} = N_{1x} + N_{2x} + N_{3x} = c,$$

т.е. если выполняются уравнения равновесия соединения в целом

$$N_{10} + N_{20} + N_{30} = N_{1n} + N_{2n} + N_{3n},$$

то

$$c = N_{10} + N_{20} + N_{30} = N_{1n} + N_{2n} + N_{3n}. \tag{21}$$

В результате неизвестные σ_{1x}, σ_{2x} и σ_{3x} (или N_{1x}, N_{2x} и N_{3x}) определяются системой уравнений (18) и (20). Решив ее, найдем

$$\begin{gathered}
N_{1x}\frac{\Pi_{1x}}{\Pi_\Sigma} = C_L - \Delta T\frac{\alpha_{1x}}{\Pi_\Sigma} - \frac{\lambda_1\xi_1(x)}{\Pi_{3x}}\left(\Pi_{1c}\frac{a_2}{b_2} + \Pi_{2c}\frac{a_1-\lambda_1^2}{b_1}\right) - \\
-\frac{\lambda_2\xi_2(x)}{\Pi_{3x}}\left(\Pi_{1c}\frac{a_2}{b_2} + \Pi_{2c}\frac{a_1-\lambda_2^2}{b_1}\right); \\
N_{2x}\frac{\Pi_{2x}}{\Pi_\Sigma} = C_L - \Delta T\frac{\alpha_{2x}}{\Pi_\Sigma} + \lambda_1\xi_1(x)\left(\frac{\Pi_{1c}}{\Pi_{1x}} - \frac{\Pi_{2c}}{\Pi_{3x}}\frac{a_1-\lambda_1^2}{b_1}\right) + \\
+\lambda_2\xi_2(x)\left(\frac{\Pi_{1c}}{\Pi_{1x}} - \frac{\Pi_{2c}}{\Pi_{3x}}\frac{a_1-\lambda_2^2}{b_1}\right); \\
N_{3x}\frac{\Pi_{3x}}{\Pi_\Sigma} = C_L - \Delta T\frac{\alpha_{3x}}{\Pi_\Sigma} + \frac{\lambda_1\xi_1(x)}{\Pi_{1x}}\left(\Pi_{1c} + \Pi_{2c}\frac{a_1}{b_1}\frac{a_1-\lambda_1^2}{b_1}\right) + \\
+\frac{\lambda_2\xi_2(x)}{\Pi_{1x}}\left(\Pi_{1c} + \Pi_{2c}\frac{a_1}{b_1}\frac{a_1-\lambda_2^2}{b_1}\right),
\end{gathered} \tag{22}$$

где $$\Pi_\Sigma = \frac{1}{\delta_1 E_{1x} + \delta_2 E_{2x} + \delta_3 E_{3x}} = \left(\frac{1}{\Pi_{1x}} + \frac{1}{\Pi_{2x}} + \frac{1}{\Pi_{3x}}\right)^{-1};$$

$$C_L = N_{10} + N_{20} + N_{30} + \Delta T\left(\frac{\alpha_{1x}}{\Pi_{1x}} + \frac{\alpha_{2x}}{\Pi_{2x}} + \frac{\alpha_{3x}}{\Pi_{3x}}\right). \tag{23}$$

Для вычисления констант c_1, c_2, c_3 и c_4, определяющих искомые неизвестные τ_{1x}, τ_{2x} согласно (16), (17) и N_{1x}, N_{2x}, N_{3x} согласно (22), (19), достаточно составить четыре уравнения. Например,

при $x = 0$ $\quad N_{1x} = N_{10}$, $N_{2x} = N_{20}$;

при $x = \ell$ $\quad N_{1x} = N_{1n}$, $N_{2x} = N_{2n}$.

Тогда из (22) следует две системы уравнений относительно констант c_1, c_2, c_3 и c_4:

$$\left.\begin{aligned} D_{10} &= c_3 A_{11}\lambda_1 sh\lambda_1\ell + c_4 A_{12}\lambda_2 sh\lambda_2\ell; \\ D_{20} &= -c_3 A_{21}\lambda_1 sh\lambda_1\ell - c_4 A_{22}\lambda_2 sh\lambda_2\ell; \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} D_{1n} &= -c_1 A_{11}\lambda_1 sh\lambda_1\ell - c_2 A_{12}\lambda_2 sh\lambda_2\ell; \\ D_{2n} &= c_1 A_{21}\lambda_1 sh\lambda_1\ell + c_2 A_{22}\lambda_2 sh\lambda_2\ell, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

где

$$D_{10} = \frac{N_{10}\Pi_{1x} + \alpha_{1x}\Delta T}{\Pi_\Sigma} - C_L; \quad D_{20} = \frac{N_{20}\Pi_{2x} + \alpha_{2x}\Delta T}{\Pi_\Sigma} - C_L;$$

$$D_{1n} = \frac{N_{1n}\Pi_{1x} + \alpha_{1x}\Delta T}{\Pi_\Sigma} - C_L; \quad D_{2n} = \frac{N_{2n}\Pi_{2x} + \alpha_{2x}\Delta T}{\Pi_\Sigma} - C_L;$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Pi_{3x}}\left(\Pi_{1c}\frac{a_2}{b_2} + \Pi_{2c}\frac{a_1 - \lambda_1^2}{b_1}\right); \quad A_{21} = \frac{\Pi_{1c}}{\Pi_{1x}} - \frac{\Pi_{2c}}{\Pi_{3x}}\frac{a_1 - \lambda_1^2}{b_1}; \qquad (26)$$

$$A_{12} = \frac{1}{\Pi_{3x}}\left(\Pi_{1c}\frac{a_2}{b_2} + \Pi_{2c}\frac{a_1 - \lambda_2^2}{b_1}\right); \quad A_{22} = \frac{\Pi_{1c}}{\Pi_{1x}} - \frac{\Pi_{2c}}{\Pi_{3x}}\frac{a_1 - \lambda_2^2}{b_1}.$$

Решением (24) и (25) являются:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\lambda_1 sh\lambda_1\ell}\frac{D_{1n}A_{22} + D_{2n}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ c_2 &= \frac{1}{\lambda_2 sh\lambda_2\ell}\frac{D_{1n}A_{21} + D_{2n}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ c_3 &= \frac{1}{\lambda_1 sh\lambda_1\ell}\frac{D_{10}A_{22} + D_{20}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}; \\ c_4 &= -\frac{1}{\lambda_2 sh\lambda_2\ell}\frac{D_{10}A_{21} + D_{20}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Соотношения (16), (17), (22) и (27) служат для расчета касательных напряжений τ_{1x}, τ_{2x} в клеевых слоях рассматриваемого соединения и нормальных (осевых) усилий N_{1x}, N_{2x}, N_{3x} в соединяемых деталях.

Для примера рассмотрим два варианта конструкции соединения, идентичных по массе и передаваемой нагрузке: двухстороннее и одностороннее соединения (см. рис. 4).

При известных исходных расчетных параметрах:

$\delta_1 = 2$ мм; $\delta_2 = 2$ мм; $\delta_3 = 1$ мм; $\delta_{кл} = 0{,}1$ мм; $\ell = 60$ мм;

$E_{1x} = E_{3x} = 25$ ГПа; $E_{2x} = 70$ ГПа; $G_{кл} = 5$ ГПа;

$N = 100$ Н/мм; $\Delta T = 0$ –

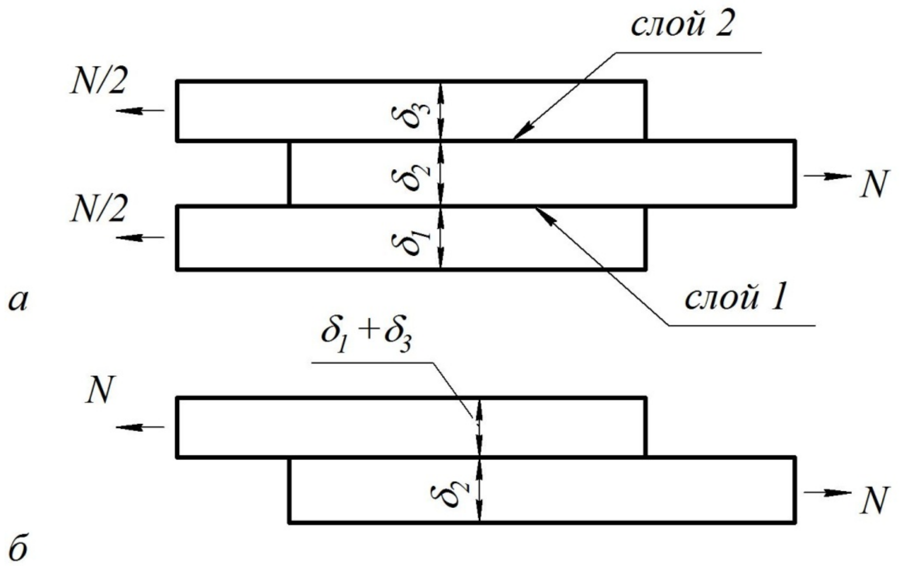

Рисунок 4 – Два варианта конструкции соединения

получим следующие значения касательных напряжений в клее (согласно классической модели):

– для двухстороннего соединения (рис. 4, а):

в слое 1 $\tau_{1x}\big|_{x=0} = 36$ МПа; $\tau_{1x}\big|_{x=\ell} = 28{,}5$ МПа;

в слое 2 $\tau_{2x}\big|_{x=0} = -62{,}2$ МПа; $\tau_{1x}\big|_{x=\ell} = -20{,}9$ МПа;

– для одностороннего соединения (рис. 4, б):

$$\tau_{x}\big|_{x=0} = 65{,}9 \text{ МПа}; \qquad \tau_{x}\big|_{x=\ell} = 35{,}3 \text{ МПа}.$$

Видно, что применение двухстороннего соединения позволяет немного снизить максимальные напряжения в клеевой прослойке.

Список использованных источников

1. Кутьинов, В.Ф. Расчет клеевых соединений [Текст] / В.Ф. Кутьинов // Тр. ЦАГИ. Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – 1979. – Вып. 7. – С. 14 – 30.

2. Карпов, Я.С. Соединения деталей агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.

3. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.

Поступила в редакцию 28.05.2014.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.