УДК 534.113 С.С. Куреннов, канд. техн. наук

УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. УЧЕТ НЕРАВНОМЕРНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ

Введение. В ряде случаев при расчете напряженного состояния соединений необходимо учитывать неравномерность деформаций в плоскости соединения, которая может быть обусловлена коэффициентами Пуассона соединяемых деталей или неравномерностью приложения нагрузки к соединению. Примеры таких конструкций приведены, например, в работах [1, 2]. Построение аналитического решения задачи о двумерном напряженном состоянии соединения в общей постановке представляется чрезвычайно сложной проблемой [3]. В связи с этим для решения поставленных задач предложено две модели, позволяющие получить аналитическое решение задачи:

1) для изучения влияния поперечных деформаций, обусловленных коэффициентами Пуассона на напряженное состояние соединения, касательные напряжения и производные от них полагаются равными нулю [4-7]. Приложенная нагрузка в этом случае должна быть равномерно распределена по сторонам соединения;

2) для решения задачи о напряженном состоянии соединения при неравномерно приложенной нагрузке (например, приложенной локально к склеенной пластине большой ширины) перемещения несущих слоев в поперечном направлении полагаются равными нулю и учитываются только касательные напряжения в несущих слоях.

Гипотеза о равенстве нулю поперечных перемещений использована при решении ряда задач для прямоугольных пластин и клеевых соединений (двумерная по толщине модель соединения) [8, 9]. Поэтому обобщение этого подхода на двумерную по ширине модель соединения представляется обоснованным.

Постановка задачи. Рассмотрим клеевое соединение двух прямоугольных пластин ($L \times h$), показанное на рис. 1. Продольная нагрузка приложена только на противоположных сторонах $x = 0$ и $x = L$. Стороны $y = 0$ и $y = h$ свободны от нагрузки. Более общий случай может быть сведен к суперпозиции двух рассматриваемых задач. Толщина первого и второго несущих слоев соответственно δ_1 и δ_2. Толщина соединительного слоя равна δ_0. Полагаем, что несущие слои деформируются только в плоскости соединения, клеевой слой работает только на сдвиг, напряжения равномерно распределены по толщине слоев.

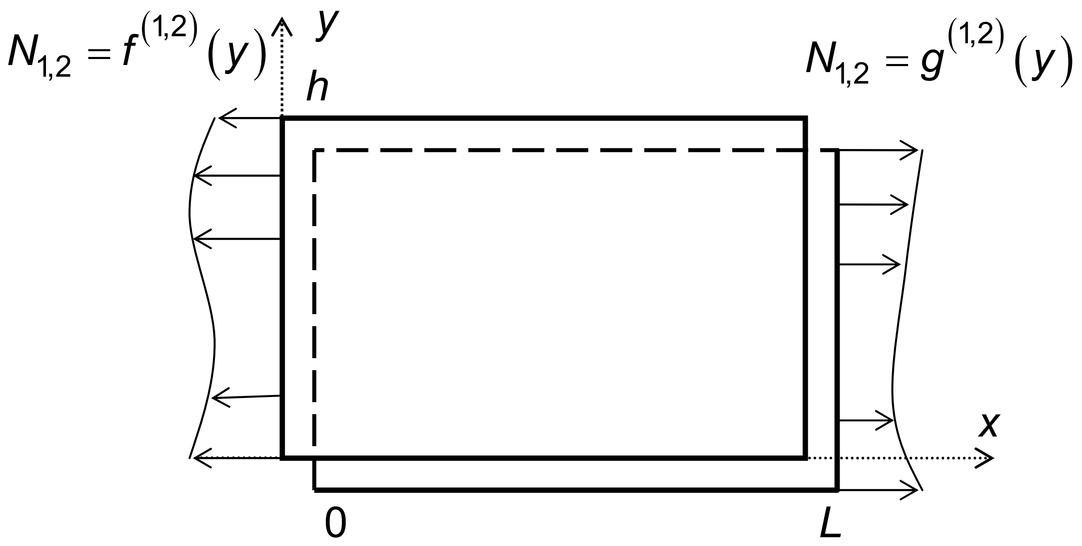

Рис. 1 – Схема соединения

Уравнения равновесия элементов несущих слоев приведены в работах [6, 7]. Согласно гипотезе об отсутствии поперечных перемещений несущих слоев усилия в поперечном направлении и соответствующие касательные напряжения в клее будут равны нулю. В результате в системе остаются только уравнения

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

где N_k, q_k – нормальные (в продольном направлении) и касательные напряжений в слое k, $k = 1, 2$; τ – касательные напряжения в клеевом слое в продольном направлении.

Напряжения в клеевой прослойки пропорциональны разности перемещений слоев

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0}\left(U_2 - U_1\right),$$

где G_0 – модуль сдвига клеевого слоя.

Соотношения Коши при условии равенства нулю поперечных перемещений имеют вид

$$N_k = \delta_k E_k \frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad q_k = \delta_k G_k \frac{\partial U_k}{\partial y}, \quad k = 1, 2, \qquad (2)$$

где U_k – продольные перемещения слоя k.

Подставив данные соотношения в уравнения (1), получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\mu_1\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)-U_1+U_2=0; \\ \alpha_2\left(\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\mu_2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right)+U_1-U_2=0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\alpha_k = E_k\delta_k\dfrac{\delta_0}{G_0}$; $\mu_k = \dfrac{G_k}{E_k}$; $k=1,2$.

Краевые условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial U_k}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{4}$$

$$\begin{gathered} N_k\big|_{x=0} = E_k\delta_k\left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=0} = f^{(k)}(y); \\ N_k\big|_{x=L} = E_k\delta_k\left.\frac{\partial U_k}{\partial x}\right|_{x=L} = g^{(k)}(y). \end{gathered} \tag{5}$$

Краевые условия могут быть также заданы в виде перемещений на сторонах $x=0$ и $x=L$. Кроме того, на одних сторонах могут быть заданы перемещения, а на других – усилия. Условие (4) является условием равенства нулю касательных напряжений в несущих слоях на боковых гранях.

Построение решения. Выразив из первого уравнения системы (3) перемещения U_2, получим

$$U_2 = U_1 - \alpha_1\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\mu_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right). \tag{6}$$

Подставив (7) во второе уравнение системы (3), находим

$$\beta_1\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}+\beta_2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_3\frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4}-c_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-c_2\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}=0, \tag{7}$$

где $\beta_1=\alpha_1\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2\alpha_1(\mu_1+\mu_2)$, $\beta_3=\alpha_1\alpha_2\mu_1\mu_2$, $c_1=\alpha_1+\alpha_2$, $c_2=\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2$.

Введем обозначение

$$\Phi = c_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}, \tag{8}$$

и выясним, при каких значениях коэффициентов α_3 и α_4 уравнение

$$\alpha_3^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \alpha_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \Phi = 0 \qquad (9)$$

будет эквивалентно уравнению (7). Подставив (8), (9) в (7) и приравняв коэффициенты при производных в полученном уравнении коэффициентам уравнения (9), получим условия $\alpha_3^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\alpha_4^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2}$ и дополнительно условие $\mu_1 = \mu_2$ $(\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2})$. Последнее условие, очевидно, ограничивает область применения предлагаемого подхода. Однако, если соединяемые материалы одинаковы (что характерно для сэндвич-панелей и ремонтных накладок), или обладают близкими коэффициентами Пуассона, то предложенный подход оправдан. Обозначим $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. В таком случае получаем $\alpha_4^2 = \mu\ \alpha_3^2$. Выражение (8) в этом случае можно представить в виде

$$\Phi = \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right). \qquad (10)$$

А перемещения второго слоя (6) соответственно

$$U_2 = U_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\Phi. \qquad (11)$$

Учитывая краевые условия (4), из (11) следуют условия

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=h} = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (9) решим с помощью метода разделения переменных. Частные решения уравнения (9) ищем в виде произведения $\Phi\left(x,y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right)$. Стандартная процедура разделения переменных в этом уравнении с параметром разделения $-\lambda^2$ $\left(\lambda \ge 0\right)$ приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_4}\right)^2 Y = 0; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{\lambda^2 + 1}{\alpha_3^2} X = 0. \qquad (13)$$

Общее решение первого уравнения имеет вид

$$Y\left(y\right) = C_1 \sin\frac{\lambda}{\alpha_4} y + C_2 \cos\frac{\lambda}{\alpha_4} y.$$

Поскольку краевые условия для $\Phi\left(x,y\right)$ на сторонах $y = 0$ и

$y = h$ однородны (13), то они однородны и для $Y(y)$. Функция $Y(y)$ удовлетворяет этим условиям и не равна нулю тождественно, только при $\lambda_n = \alpha_4 \dfrac{\pi n}{h}$ $(n = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ и $C_1 = 0$. Для определенности положим $C_2 = 1$. Решение второго уравнения при $\lambda = \lambda_n$ для удобства представим в виде

$$X = A \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3} x \right) + B \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3} (x - L) \right).$$

Общее решение уравнения (9) представим в виде ряда

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{h} y \left[A_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n x}{\operatorname{sh} \xi_n L} + B_n \frac{\operatorname{ch} \xi_n (x - L)}{\operatorname{sh} \xi_n L} \right], \tag{14}$$

где $\xi_n = \dfrac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3}$, $\lambda_n = \alpha_4 \dfrac{\pi n}{h}$; $\operatorname{sh} \xi_n L$ – нормирующие множители.

На следующем этапе необходимо найти решение уравнения Пуассона (10). Общее решение представим в виде суммы

$$U_1 = V + W, \tag{15}$$

где V является общим решением однородного уравнения (10), которое можно свести к уравнению Лапласа с однородными краевыми условиями (4):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Функция же W представляет собой частное решение уравнения (9), соответствующее функции Φ (14).

Общее решение уравнения (16) также представим в виде произведения $V = X(x)Y(y)$. Операция разделения переменных приводит к уравнениям

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \Lambda^2 Y = 0; \; \frac{d^2 X}{dx^2} - \mu \Lambda^2 X = 0, \tag{17}$$

где $-\Lambda^2$ – параметр разделения $(\Lambda \geq 0)$. Общее решение первого уравнения имеет вид

$$Y(y) = C_1 \sin \Lambda y + C_2 \cos \Lambda y.$$

Функция $Y(y)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (4) и не равна нулю тождественно только при $\Lambda_n = \dfrac{\pi n}{h}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ и $C_1 = 0$. Для определенности положим $C_2 = 1$. Решение второго уравнения при $\Lambda = \Lambda_n$ представим в виде:

$$X = C\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\mu}\Lambda_n x\right) + D\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\mu}\Lambda_n (x - L)\right).$$

Если же параметр разделения переменных $\Lambda = 0$, общие решения уравнений (17) представляют собой линейные функции от координат x и y. Однородные краевые условия (5) в этом случае будут удовлетворяться, если $Y(y) = const$. Следовательно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$V = C_0 x + D_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n y}{h}\left(C_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L} + D_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\chi_n L}\right),$$

где $\chi_n = \sqrt{\mu}\,\dfrac{\pi n}{h}$; $\mathrm{sh}\chi_n L$ – нормирующие множители.

Функцию W будем искать в виде, соответствующем правой части уравнения (10), которая имеет вид (14), т.е.

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{h} y \left[R_n \frac{\mathrm{ch}\xi_n x}{\mathrm{sh}\xi_n L} + S_n \frac{\mathrm{ch}\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\xi_n L}\right],$$

где R_n и S_n – неизвестные коэффициенты. Подставив в уравнение (10) и приравняв соответствующие коэффициенты, получим

$$W = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{b} y \left[A_n \frac{\mathrm{ch}\xi_n x}{\mathrm{sh}\xi_n L} + B_n \frac{\mathrm{ch}\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\xi_n L}\right].$$

На основании (15) имеем

$$U_1 = C_0 x + D_0 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(A_0 \frac{\mathrm{ch}\xi_0 x}{\mathrm{sh}\xi_0 L} + B_0 \frac{\mathrm{ch}\xi_0 (x - L)}{\mathrm{sh}\xi_0 L}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n y}{h}\left[C_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L} + D_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\chi_n L} + \right. \\ \left. + A_n \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\mathrm{ch}\xi_n x}{\mathrm{sh}\xi_n L} + B_n \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\mathrm{ch}\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\xi_n L}\right]. \qquad (18)$$

Здесь $\lambda_n = \alpha_4 \dfrac{\pi n}{h}$. Из (11) находим перемещения второго слоя.

$$U_2 = C_0 x + D_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(A_0 \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0 x}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} + B_0 \frac{\mathrm{ch}\,\xi_0 (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} \right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n y}{h}\left[C_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L} + D_n \frac{\mathrm{ch}\chi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\chi_n L} + \right.$$

$$\left. + A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\mathrm{ch}\,\xi_n x}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} + B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\mathrm{ch}\,\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} \right]. \quad (19)$$

Усилия в несущих слоях (2)

$$N_1 = \delta_1 E_1 \left[C_0 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(A_0 \frac{\mathrm{sh}\,\xi_0 x}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} + B_0 \frac{\mathrm{sh}\,\xi_0 (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} \right) + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n y}{h}\left[\chi_n \left(C_n \frac{\mathrm{sh}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L} + D_n \frac{\mathrm{sh}\chi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\chi_n L} \right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(A_n \frac{\mathrm{sh}\,\xi_n x}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} + B_n \frac{\mathrm{sh}\,\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} \right) \right] \right]. \quad (20)$$

$$N_2 = \delta_2 E_2 \left[C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3}\left(A_0 \frac{\mathrm{sh}\,\xi_0 x}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} + B_0 \frac{\mathrm{sh}\,\xi_0 (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_0 L} \right) + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n y}{h}\left[\chi_n \left(C_n \frac{\mathrm{sh}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L} + D_n \frac{\mathrm{sh}\chi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\chi_n L} \right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n \left(A_n \frac{\mathrm{sh}\,\xi_n x}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} + B_n \frac{\mathrm{sh}\,\xi_n (x - L)}{\mathrm{sh}\,\xi_n L} \right) \right] \right]. \quad (21)$$

Краевые условия (5) представим в виде разложения в ряд Фурье по функциям $\left\{ \cos\dfrac{\pi n y}{h} \right\}$:

$$N_k(0,y) = \frac{l_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(k)} \cos\frac{\pi n y}{h};$$
$$N_k(a,y) = \frac{r_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(k)} \cos\frac{\pi n y}{h}. \qquad (22)$$

Удовлетворение краевым условиям (5) приводит к системам линейных уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n.

Система уравнений относительно A_0, B_0, C_0, D_0 распадается на две системы, которые содержат четыре уравнения и три неизвестных:

$$\begin{cases} C_0 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2} B_0 = \dfrac{l_0^{(1)}}{2\delta_1 E_1}; \\ C_0 - \dfrac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\dfrac{1}{\alpha_3} B_0 = \dfrac{l_0^{(2)}}{2\delta_2 E_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_0 + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2} A_0 = \dfrac{r_0^{(1)}}{2\delta_1 E_1}; \\ C_0 + \dfrac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\dfrac{1}{\alpha_3} A_0 = \dfrac{r_0^{(2)}}{2\delta_2 E_2}. \end{cases}$$

Обе системы не противоречат друг другу, если выполняется условие

$$l_0^{(1)} + l_0^{(2)} = r_0^{(1)} + r_0^{(2)},$$

которое представляет собой условие статического равновесия соединения, поскольку интегралы от $\cos\frac{\pi n y}{h}$ ($n > 0$) на интервале $y \in [0; h]$ равны нулю. Усилия, описываемые слагаемыми $\cos\frac{\pi n y}{h}$, являются самоуравновешенными.

Коэффициент D_0 в данном случае, когда граничные условия заданы в виде усилий, в систему не входит, поэтому для определенности его можно назначить, задав перемещение какой-либо точки соединения.

Необходимо отметить, что в частном случае, если граничные условия заданы постоянными по ширине перемещениями или усилиями, то $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > 0$ и напряженно-деформированное состояние соединения описывается первыми слагаемыми формул (18)-(21), которые стоят перед знаком суммы. Эти слагаемые представляют собой классическое одномерное решение Фолькерсена.

Для $n > 0$ получаем уравнения относительно коэффициентов

$$\begin{cases} -D_n\,\chi_n - B_n\,\dfrac{\alpha_3^2\xi_n}{\alpha_1+\alpha_2} = \dfrac{l_n^{(1)}}{\delta_1 E_1}; \\ -D_n\,\chi_n - B_n\,\dfrac{\alpha_3^2-\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\xi_n = \dfrac{l_n^{(2)}}{\delta_2 E_2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_n\,\chi_n + A_n\,\dfrac{\alpha_3^2\xi_n}{\alpha_1+\alpha_2} = \dfrac{r_n^{(1)}}{\delta_1 E_1}; \\ C_n\,\chi_n + A_n\,\dfrac{\alpha_3^2-\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\xi_n = \dfrac{r_n^{(2)}}{\delta_2 E_2}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \dfrac{R_n}{n}$, где R_n для всех коэффициентов различны и представляют собой некоторые линейные комбинации $l_n^{(k)}$ и $r_n^{(k)}$ (22) с постоянными коэффициентами, т.е. $A_n, B_n, C_n, D_n \sim \dfrac{1}{n^s}$, где $s \geq 2$. Нормированные функции $\dfrac{\mathrm{ch}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L}$, $\dfrac{\mathrm{ch}\chi_n(x-L)}{\mathrm{sh}\chi_n L}$, $\dfrac{\mathrm{ch}\chi_n x}{\mathrm{sh}\chi_n L}$, $\dfrac{\mathrm{ch}\chi_n(x-L)}{\mathrm{sh}\chi_n L}$ и т.д. на интервале $x \in (0;L)$ по модулю меньше единицы экспоненциально убывают с ростом n. Отсюда следует, что внутри рассматриваемой области ряды Фурье (18) и (19) дважды дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям (2). А ряды (18) – (21) на интервале $x \in [0;L]$ сходятся равномерно.

Численный пример. Рассмотрим клеевое соединение двух алюминиевых пластинок, имеющих размеры $L = 5$ см, $h = 3$ см, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм. Толщина клеевой прослойки $\delta_0 = 0{,}3$ мм. Упругие параметры материалов соединения $E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 25$ ГПа, $G_0 = 0{,}5$ ГПа. Краевые условия назначим такие:

$$N_1(0,y) = \begin{cases} 0, & y \in (0;h/4), \\ 2, & y \in (h/4;3h/4), \\ 0, & y \in (3h/4;h), \end{cases} \tag{23}$$

$$N_1(L,y) = N_2(0,y) = 0;\ N_2(L,y) = 1 \text{ Н/м}.$$

На рис. 2 показан график нормальных усилий в первом слое $N_1(x,y)$.

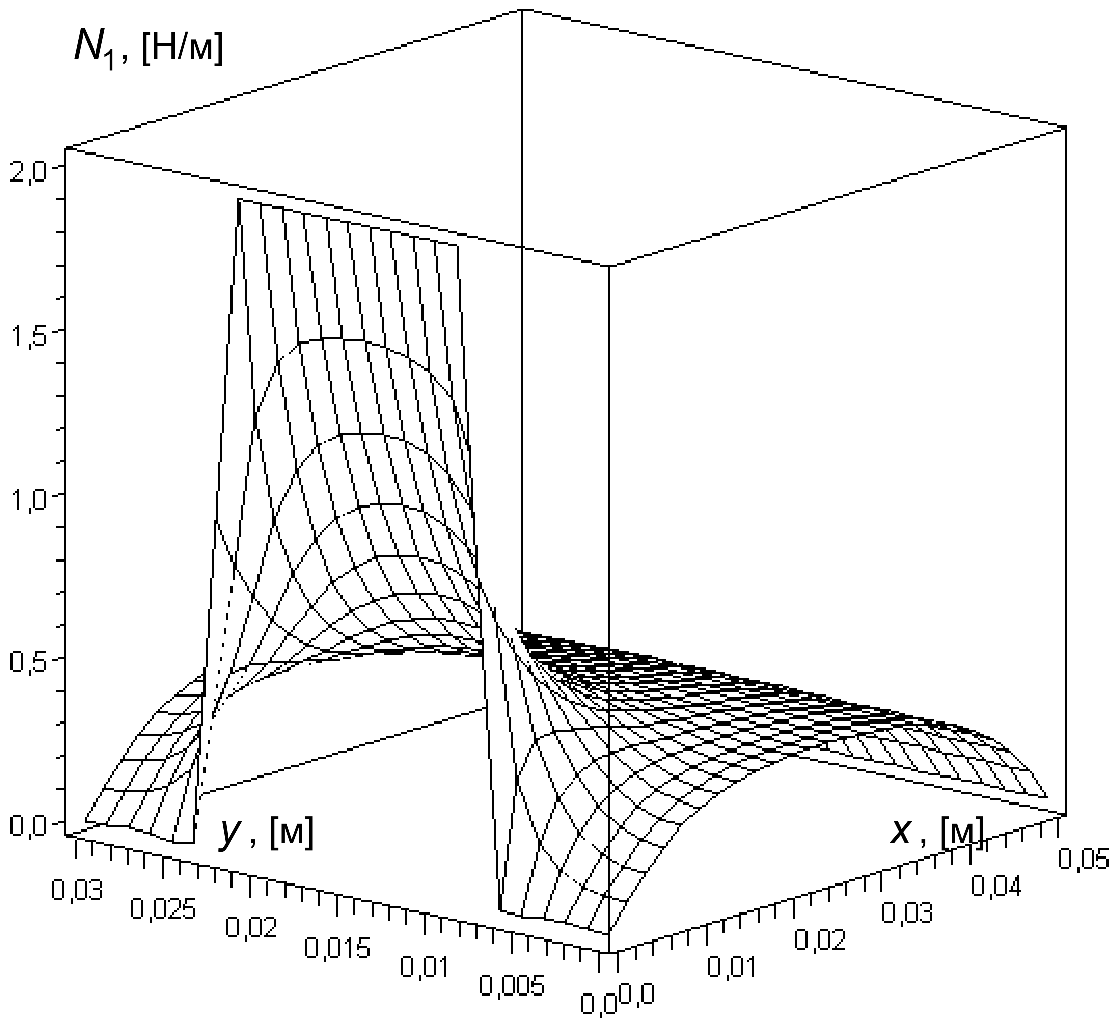

Рисунок 2 – Нормальные усилия $N_1(x, y)$

Для построения графиков в формулах (20) и (21) в ряде Фурье вычислялось 200 слагаемых. Краевое условие (23) представляет собой ступенчатую функцию, поэтому члены соответствующего ряда Фурье (20) на границе $x = L$ убывают пропорционально n^{-1}, т.е. медленно, что и обуславливает относительно большое число слагаемых.

График $N_2(x, y)$ показан на рис. 3, Напряжения в клее – на рис. 4.

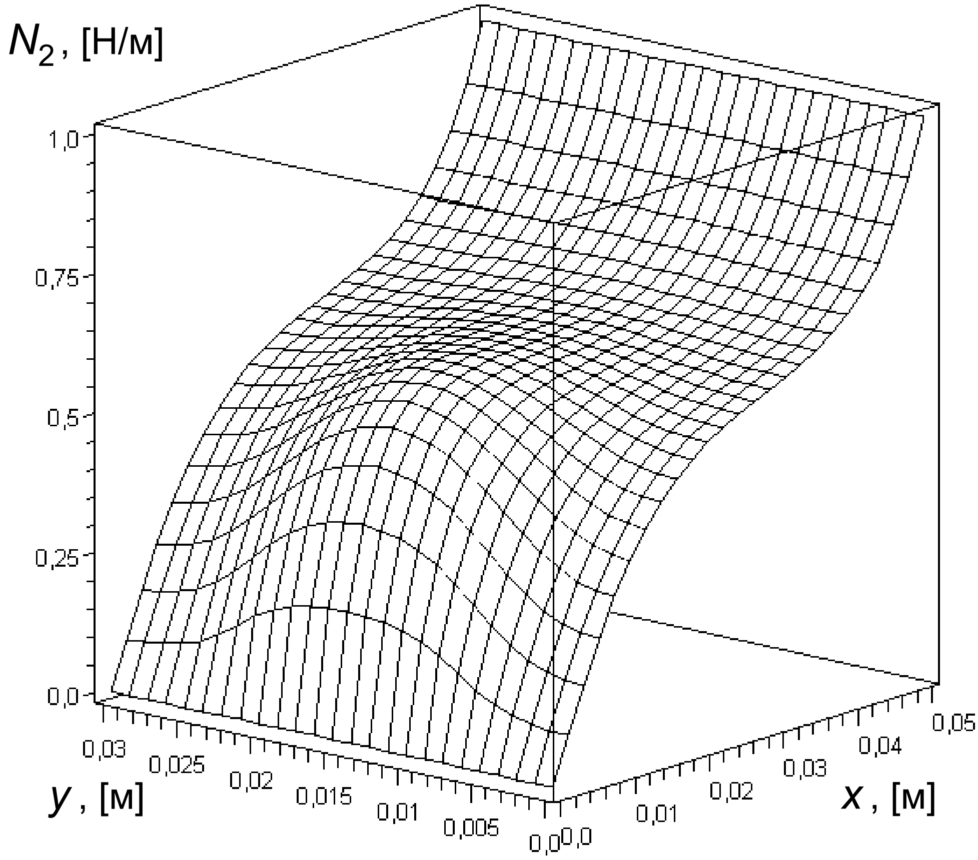

Рисунок 3 – Продольные усилия во втором слое

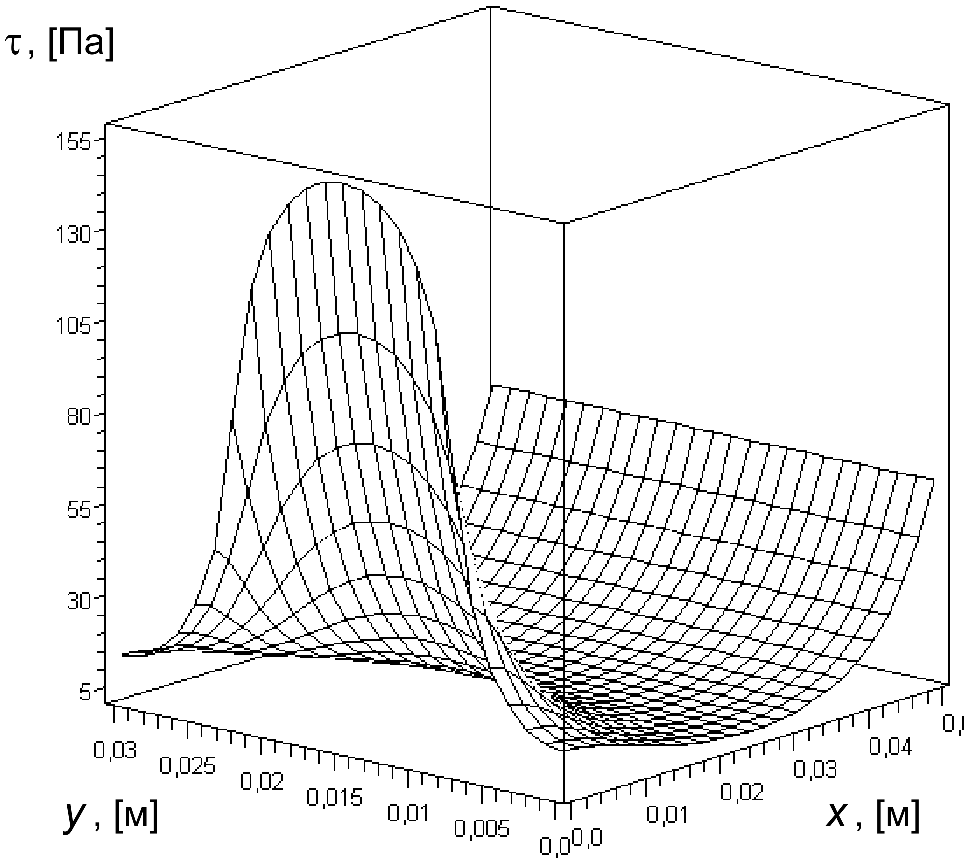

Рисунок 4 – Касательные напряжения в клее

Заключение. Аналитически решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения в двумерной постановке. Для построения решения использован классический метод разделения переменных. Предложенная модель может быть использована для соединений с непроклеем, для расчета ремонтных накладок для других типов задач

Список использованных источников

1. Kim H., Kedward K. T. Stress analysis of adhesively-bonded joints under in-plane shear loading // J. of Adhesion. — 2001. — Vol. 76. – P.1—36.
2. Kim H., Lee J. "Characteristics of In- Plane Shear Loaded Adhesive Lap Joints: Experiments and Analysis", FAA Final Report, DOT⁄FAA⁄AR-03/21, – 2003.
3. Рябенков Н.Г. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин [Текст] / Н.Г. Рябенков, Ю.П. Артюхин // Исслед. по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1981. – № 16. – С. 82–90.
4. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов / Я.С. Карпов— Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. – 359 с.
5. Adams R.D., Peppiatt N.A. Effect of Poisson’s ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint // J. of Strain Analysis. — 1973. — Vol. 8 (2). – P. 134–139.
6. Mathias J.D., Grédiac M., Balandraud X. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches // Int. J. of Solids and Structures. — 2006. — Vol. 43. – P. 6921–6947.
7. Kurennov S.S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution // Mechanics of Composite Materials, Vol. 50, No. 1, March, 2014, Pp. 105-114 (Russian Original Vol. 50, No. 1, January-February, 2014, Pp. 147—158).
8. Васильев, В.В., Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом [Текст] // В.В. Васильев, Ю.В. Боков / Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. - Вып. 7. – С. 4 – 10.
9. Васильев, В.В. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы [Текст] / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 40-49.

Поступила в редакцию 29.05.2014.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.