

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯВЛЕНИЯ НАГРЕВА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПОВТОРНО-СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Известно, что практически все материалы при циклическом нагружении характеризуются петлей гистерезиса, величина которой зависит от уровня напряжений (деформаций) и внутреннего строения материала (рис. 1). Суть явления гистерезиса заключается в том, что часть работы внешних сил поглощается материалом и превращается в тепловую энергию, т.е. материал нагревается. Экспериментально обнаружено, что при повторно-статическом нагружении композиционные материалы (КМ) нагреваются, причем температура зависит как от частоты нагружения, так и от величины амплитуды напряжений. Кроме того, обнаружено, что температура нагрева КМ больше, чем металлов при прочих равных условиях. В работе [1] предложена методика ускоренного определения предела усталости материалов на основе полного баланса энергии (упругой и тепловой), для реализации которой необходимы методики и модели прогнозирования доли энергии, переходящей в тепло при деформировании.

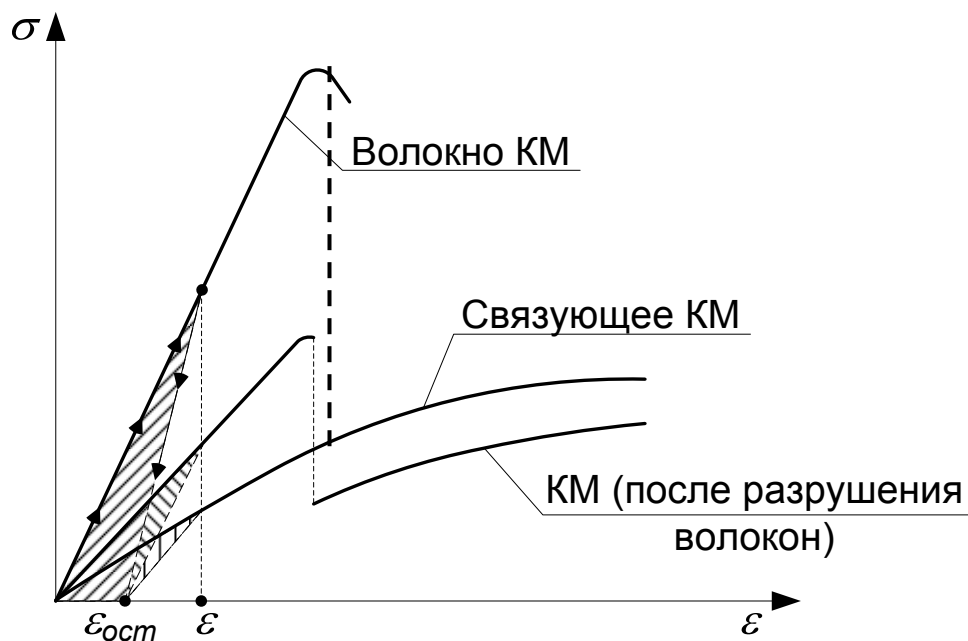


Рисунок 1 – Общая характеристика деформирования КМ  
и его компонентов

## 1. Анализ основных факторов, приводящих к нагреву КМ при повторно-статических испытаниях

Все факторы, влияющие на рассматриваемое явление, условно можно разделить на две группы:

- связанные со свойствами «идеальных» волокна и связующего;
- связанные с характером взаимодействия компонентов КМ и их реальными свойствами (разрывы волокон, пористость, искривления, крутка нитей и т.п.).

Рассмотрим подробнее процесс накопления энергии деформации, а следовательно, и нагрева образца «идеального» КМ при следующих допущениях:

- известны диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  при циклическом нагружении для различных значений  $\sigma$  (или  $\varepsilon$ ) для волокна и связующего его (рис. 2);

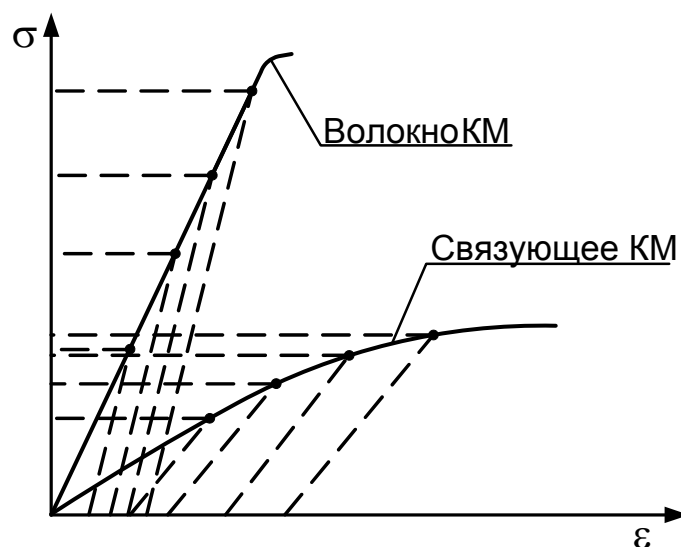


Рисунок 2 – Диаграммы деформирования компонентов КМ

- волокна равномерно распределены в матрице;
- при нагружении КМ как вдоль волокон, так и поперек напряженно-деформированное состояние (НДС) волокон и матрицы является однородным;
- между волокном и матрицей существует абсолютное сцепление;
- материалы волокна и матрицы являются изотропными.

Модель КМ, соответствующая этим допущениям, имеет вид, показанный на рис. 3. При нагружении элемента КМ вдоль волокон (по оси 1) деформации волокон и матрицы в силу принятых допущений равны между собой. Зная диаграммы, показанные на рис. 2, можно записать следующую формулу для определения накапливаемой энергии в единице объема КМ (см. рис. 1):

$$U_{\text{КМ}} = \theta U_{\text{В}}(\varepsilon) + (1 - \theta) U_{\text{М}}(\varepsilon), \quad (1)$$

где  $\theta$  – объемное содержание волокон;

$U_B(\varepsilon), U_M(\varepsilon)$  – удельная энергия волокна и матрицы соответственно, которая является функцией от деформации  $\varepsilon$  (или уровня напряжений  $\sigma$ ).

Если определена накопленная механическая энергия по формуле (1), то, зная теплоемкость КМ, можно определить температуру материала при отсутствии теплообмена с окружающей средой. При нагружении элемента КМ (см. рисунок 3) по оси 2 (поперек волокон) напряжения в компонентах одинаковы, а деформации – различны, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{2B} &= \sigma_{2M} = \sigma_2 = \varepsilon_2 \cdot E_2; \\ \varepsilon_{2B} &= \frac{\sigma_{2B}}{E_B} = \varepsilon_2 \frac{E_2}{E_B}; \\ \varepsilon_{2M} &= \frac{\sigma_{2M}}{E_M} = \varepsilon_2 \frac{E_2}{E_M},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\sigma_{2B}, \sigma_{2M}, \sigma_2$  – напряжения в волокне, матрице и КМ по оси 2;  
 $E_B, E_M, E_2$  – модули упругости волокна, матрицы и КМ по оси 2;  
 $\varepsilon_{2B}, \varepsilon_{2M}, \varepsilon_2$  – деформации волокна, матрицы и КМ в целом.

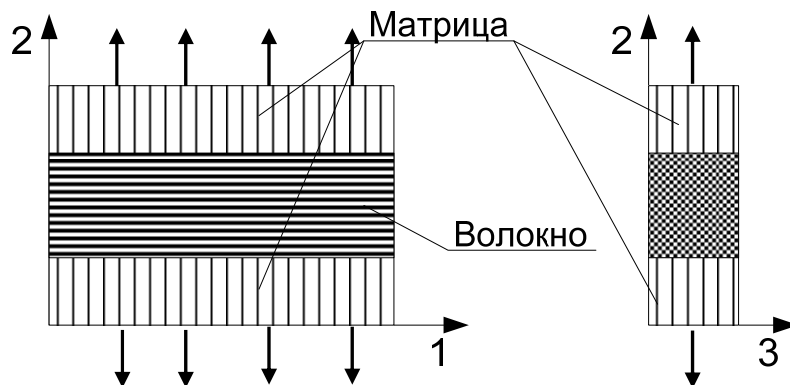


Рисунок 3 – Модель однонаправленного КМ

Из механики армированных материалов известно, что из-за различия в коэффициентах Пуассона появляются напряжения и деформации в компонентах КМ по оси 1 (в дальнейшем учитывается только силовая часть деформаций) [2]:

$$\varepsilon_{1B} = -\frac{\sigma_2}{E_B} \cdot \frac{(1-\theta)(E_B\mu_M - E_M\mu_B)}{E_1}; \quad \varepsilon_{1M} = -\frac{\sigma_2}{E_M} \cdot \frac{\theta(E_B\mu_M - E_M\mu_B)}{E_1}, \quad (3)$$

где  $\mu_B, \mu_M$  – коэффициенты Пуассона материалов волокна и матрицы;

$E_1 = E_B\theta + E_M(1-\theta)$  – модуль упругости КМ вдоль волокон (по оси 1).

Эти деформации приводят к изменению деформаций по оси 2 (из-за коэффициентов Пуассона). Дополнительные деформации компонен-

тов КМ по оси 2:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2B}^* &= \sigma_2 \frac{\mu_B}{E_B} \cdot \frac{(1-\theta) \cdot (E_B \mu_M - E_M \mu_B)}{E_B \theta + E_M (1-\theta)}, \\ \varepsilon_{2M}^* &= -\sigma_2 \frac{\mu_M}{E_M} \cdot \frac{\theta \cdot (E_B \mu_M - E_M \mu_B)}{E_B \theta + E_M (1-\theta)}.\end{aligned}\quad (4)$$

Суммарные деформации компонентов КМ по оси 2 определяются так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2B} &= \varepsilon_2 \frac{E_2}{E_B} \left[ 1 + \mu_B \frac{(1-\theta) \cdot (E_B \mu_M - E_M \mu_B)}{E_1} \right]; \\ \varepsilon_{2M} &= \varepsilon_2 \frac{E_2}{E_M} \left[ 1 - \mu_M \frac{\theta \cdot (E_B \mu_M - E_M \mu_B)}{E_1} \right].\end{aligned}\quad (5)$$

Зная суммарные деформации волокна и матрицы по осям 1 и 2, а также имея зависимости  $U_B(\varepsilon)$  и  $U_M(\varepsilon)$ , можно определить накопленную энергию деформации в однонаправленном КМ при нагружении поперек волокон по формуле (1). Аналогичным образом поступаем с нахождением энергии при растяжении образца вдоль волокон и при сдвиге, но для последнего необходимо иметь диаграммы деформирования при сдвиге, аналогичные показанным на рис. 2.

Выше получены зависимости для прогнозирования накапливаемой энергии, а следовательно, и температуры нагрева образца для однонаправленного КМ при его деформировании вдоль, поперек волокон и на сдвиг. В расчетные формулы для деформаций входят средние напряжения и деформации монослоя КМ, а также физико-механические свойства компонентов. Это позволяет построить модель для прогнозирования температуры нагрева КМ с произвольным армированием. Для этого достаточно выразить напряжения и деформации каждого слоя в местной системе координат 1, 2 через деформации пакета слоев в целом (рис. 4) [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{1i} &= \bar{E}_{1i} (\varepsilon_{1i} - \mu_{21i} \varepsilon_{2i}); \\ \sigma_{2i} &= \bar{E}_{2i} (\varepsilon_{2i} - \mu_{12i} \varepsilon_{1i}); \\ \tau_{12i} &= G_{12i} \gamma_{12i},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\text{где } \bar{E}_{1i} = \frac{E_{1i}}{(1 - \mu_{12i} \mu_{21i})}; \quad \bar{E}_{2i} = \frac{E_{2i}}{(1 - \mu_{12i} \mu_{21i})};$$

$E_{1i}, E_{2i}, G_{12i}, \mu_{12i}, \mu_{21i}$  – упругие константы монослоя КМ, которые могут быть определены экспериментально или на основе теории армирования [1];

$\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \gamma_{12i}$  – деформации монослоя КМ, определяемые через деформации пакета слоев  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  на основании общепринятого допущения о совместном деформировании слоев:

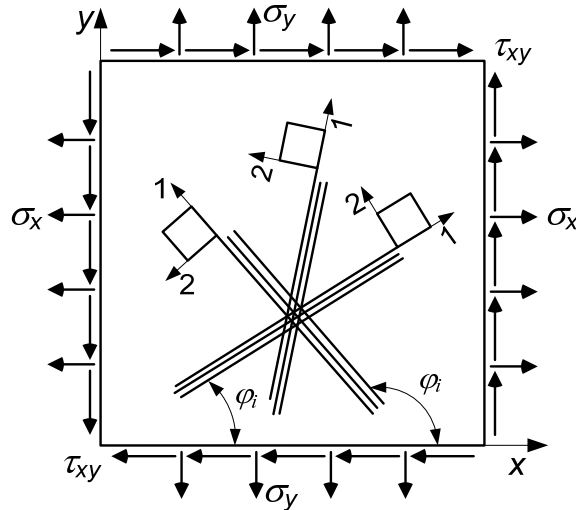


Рисунок 4 – Модель сложноармированного КМ

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1i} &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
 \varepsilon_{2i} &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i - \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\
 \gamma_{12i} &= (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi_i + \gamma_{xy} \cos 2\varphi_i,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\varphi_i$  – угол армирования  $i$ -го слоя, а средние деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  выражаются из физического закона.

На практике циклические испытания образцов материала чаще всего проводятся при одноосном напряженном состоянии. Принимая, что ось  $x$  направлена вдоль образца, находим

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \varepsilon_y = -\mu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x}. \tag{8}$$

При этом деформации монослоя КМ согласно (7) определяют так:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1i} &= \frac{\sigma_x}{E_x} (\cos^2 \varphi_i - \mu_{xy} \sin^2 \varphi_i); \\
 \varepsilon_{2i} &= \frac{\sigma_x}{E_x} (\sin^2 \varphi_i - \mu_{xy} \cos^2 \varphi_i); \\
 \gamma_{12i} &= -\frac{\sigma_x}{E_x} (1 + \mu_{xy}) \sin 2\varphi_i.
 \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом выражений (9) зависимости (6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\sigma_{1i} &= \bar{E}_{1i} \frac{\sigma_x}{E_x} \left[ (1 + \mu_{xy} \mu_{21}) \cos^2 \varphi_i - (\mu_{xy} + \mu_{21}) \sin^2 \varphi_i \right]; \\ \sigma_{2i} &= \bar{E}_{2i} \frac{\sigma_x}{E_x} \left[ (1 + \mu_{xy} \mu_{12}) \sin^2 \varphi_i - (\mu_{xy} + \mu_{21}) \cos^2 \varphi_i \right]; \\ \tau_{12i} &= -G_{12i} \frac{\sigma_x}{E_x} (1 + \mu_{xy}) \sin 2\varphi_i.\end{aligned}\quad (10)$$

На основании приведенных выше формул можно прогнозировать температуру нагрева сложноармированного слоистого КМ с «идеальной» структурой монослоев. Для этого достаточно иметь весь комплекс свойств материалов волокон и матрицы. Таким образом, построена модель нагрева КМ с произвольной структурой, учитывающая только первую группу факторов, т.е. только наличие петли гистерезиса материалов волокна и матрицы при «идеальном» характере их взаимодействия в КМ (см. принятую систему допущений).

Формально описанная методика может быть использована и для реальных КМ при условии, что известно НДС в каждой «точке» КМ, т.е. по всему объему волокон и матрицы. Из приводимого ниже анализа будет видно, что задача достоверного определения НДС практически неразрешима. Рассмотрим основные аспекты деформирования и накопления остаточной энергии деформирования, превращающейся в тепло.

В реальных КМ **форма поперечного сечения** волокон и их распределение в матрице (рис. 5) приводят к тому, что НДС как волокон, так и матрицы далеки от однородного. Это означает, что для каждой точки или зоны КМ необходимо учесть собственную величину площади петли гистерезиса, для чего надо знать величину деформации (или напряжения).

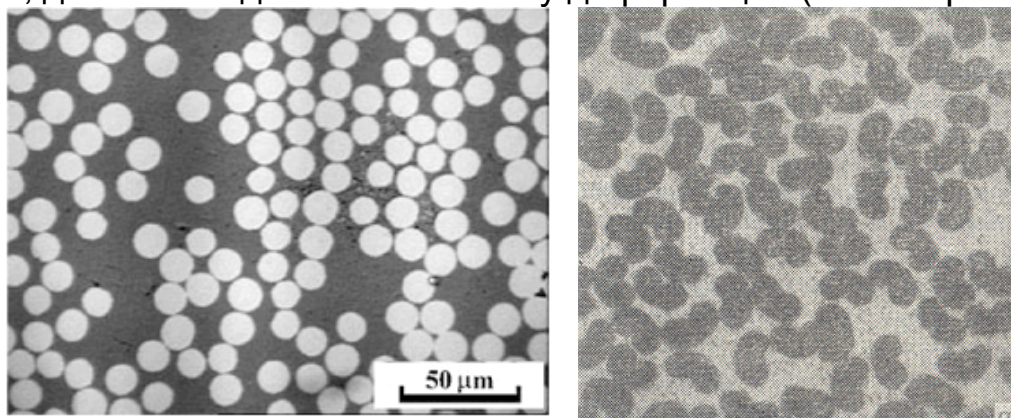


Рисунок 5 – Распределение волокон углерода в КМ

Практически все КМ характеризуются **разрывами волокон** и их нахлестами, а также искривлением (рис. 6). Очевидно, что эти явления также приводят к существенно неоднородному НДС КМ (в местах разрыва или нахлеста как прямых, так и искривленных волокон нагрузка перераспределяется через связующее на соседние волокна).

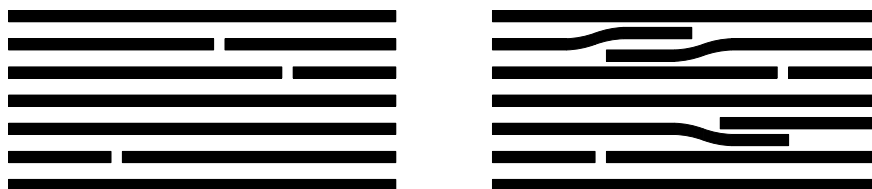


Рисунок 6 – Структура армирования КМ

Армирование многих КМ реализуется **кручеными нитями** (жгутами), причем степень искривления волокон в закрученных нитях различна, что также сказывается на НДС, а следовательно, и на процесс накопления тепловой энергии.

КМ на полимерных связующих характеризуются **пористостью**, образуемой, во-первых, за счет закупоривания пузырьков газов, выделяемых при полимеризации, а во вторых, из-за некачественной пропитки в пространстве между волокнами остаются пузырьки воздуха. В этом случае кроме неоднородности НДС компонентов КМ наблюдается сухое микротрение как волокон друг об друга, так и волокон о связующее. Последнее (трение) приводит к прямому нагреву КМ, а темп нагрева зависит от длины пути взаимного скольжения и частоты движения, т.е. от амплитуды нагрузки и частоты ее приложения. Оба указанные факторы особенно вероятны в местах пересечения нитей основы и утка в тканых материалах. Следует указать, что работа сил трения напрямую преобразуется в тепло.

Из-за недостаточно обоснованного подбора связующего и неизбежных температурных напряжений в компонентах КМ уже на начальных стадиях нагружения в матрице появляются **микротрещины**, берега которых в процессе циклического нагружения трутся друг о друга. Это также приводит к нагреву КМ.

Полимеризация современных КМ происходит при повышенной температуре и после стеклования связующего начинается стеснение свободных деформаций волокон, а после полного отверждения в компонентах КМ остаются **технологические температурные напряжения**. В силу самоуравновешенности этого напряженного состояния один из компонентов КМ оказывается растянутым, а другой – сжатым. Аналогичный механизм имеет место в сложных КМ, только напряжения возникают в монослоях пакета. В процессе термообработки и стабилизации происходит некоторая релаксация напряжений, но в силу известных причин практически невозможно реально измерить или определить внутрикомпонентное или внутрислойное НДС. Это существенно ограничивает достоверность расчетов по изложенной выше методике.

Анализ указанных выше факторов вполне обоснованно позволяет сделать вывод о том, что полученные зависимости для прогнозирования температуры нагрева КМ при повторно-статистических испытаниях могут служить только в качестве оценки явления нагрева снизу, т.е. прогнозировать минимальную температуру нагрева.

## 2. Математическая модель и методика определения температуры нагрева КМ

Основная часть неопределенностей с прогнозированием количества накапливаемой энергии при циклическом нагружении сосредоточена на уровне взаимодействия компонентов КМ. Строгое математическое описание перечисленных явлений является невозможным из-за их вероятностно-статистического характера со значительной зависимостью от субъективных факторов. В связи с этим представляется целесообразным использование феноменологического подхода по аналогии с традиционными теориями механики и прочности слоистых КМ. Согласно этому подходу необходимо экспериментально определить величину петли гистерезиса для различных уровней деформации однонаправленного КМ вдоль и поперек волокон на растяжение, сжатие и сдвиг путем построения соответствующих диаграмм, а по ним – графиков зависимостей удельной остаточной энергии.

В экспериментах с повторно-статическим нагружением независимо от формы цикла явление гистерезиса приводит к уменьшению амплитуды деформаций при постоянной силе.

Очевидно, что температура нагрева образца в установившемся режиме является характеристикой величины накапливаемой энергии в образце КМ (с учетом теплообмена с окружающей средой или без). Можно также вполне обоснованно предположить, что разделение энергии на две части, связанных с указанными выше двумя группами факторов, невозможно, т.е. в общем случае можно записать

$$\Delta T = f(\varepsilon, \omega), \text{ или } \Delta T = f(\sigma, \varepsilon), \quad (13)$$

где  $\Delta T = T_{\text{обр}} - T_{\text{ср}}$  – разность измеряемой температуры образца и температуры окружающей среды;

$\varepsilon, \sigma$  – деформация и напряжения;

$\omega$  – частота цикла нагружения.

Для определения температуры образца в процессе циклического нагружения разработана математическая модель. За время  $dt$  в образце материала накапливается энергия

$$dU = \bar{U} dt, \quad (14)$$

где  $\bar{U}$  – темп накопления энергии.

За это же время из-за теплообмена с окружающей средой (теплопередача, конвекция, излучение) с образца уносится часть тепла

$$dQ = kS(T - T_H) dt, \quad (15)$$

где  $k$  – некий обобщенный коэффициент теплообмена;

$S$  – площадь омываемой поверхности образца;

$T$  – текущая температура образца КМ;

$T_H$  – текущая температура окружающей среды.



Разность  $dU - dQ$  определяет приращение температуры образца.

$$dT_{cpV} = dU - dQ = \bar{U}dt - kS(T - T_H)dt, \quad (16)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость материала;

$\rho, V$  – плотность КМ и объем образца.

Разделив левую и правую части на  $dt$ , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{kS}{c\rho V}T = \frac{1}{c\rho V}(\bar{U} + kST_H). \quad (17)$$

Введя обозначение

$$\lambda = \frac{kS}{c\rho V}, \quad (18)$$

запишем решение уравнения в виде

$$T = C_1 e^{-\lambda t} + C_2, \quad (19)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования, определяемая из начальных условий;

$C_2$  – частное решение уравнения, для нахождения которого продифференцируем выражение (19) и подставим в исходное уравнение (17):

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -C_1 \lambda e^{-\lambda t}; \\ -C_1 \lambda e^{-\lambda t} + C_1 \lambda e^{-\lambda t} + C_2 \lambda &= \frac{1}{c\rho V}(\bar{U} + kST_H). \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{\lambda c\rho V}(\bar{U} + kST_H) = \frac{\bar{U}}{kS} + T_H. \quad (20)$$

Тогда вместо (19) получим

$$T = C_1 e^{-\lambda t} + \frac{\bar{U}}{kS} + T_H. \quad (21)$$

При  $t=0$   $T = T_0$  (начальное условие). С учетом этого из (21) получим

$$C_1 = T_0 - \left( \frac{\bar{U}}{kS} + T_H \right). \quad (22)$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$T = T_0 e^{-\lambda t} + \left( 1 - e^{-\lambda t} \right) \left( \frac{\bar{U}}{kS} + T_H \right). \quad (23)$$

При  $t \rightarrow \infty$  температура образца асимптотически приближается к

$$T_{\max} = \frac{\bar{U}}{kS} + T_H. \quad (24)$$

Для оценки влияния частоты нагружения и уровня напряжений, например пульсирующего цикла, примем, что энергия накапливается равномерно вплоть до начала разрушения. Тогда можно записать следую-

щую зависимость

$$\bar{U} = \frac{U}{N_0} \omega, \quad (25)$$

где  $U$  – полная энергия, накапливаемая в материале за все время испытаний, т.е. до разрушения;

$N_0$  – количество циклов нагружения до разрушения;

$\omega$  – частота нагружения.

Кривая Веллера (рис. 7) для большинства КМ достаточно точно описывается формулой

$$\sigma_0 = \sigma_B - \xi \ln N, \quad (26)$$

где  $\sigma_0$  – напряжения цикла нагружения;

$\sigma_B$  – предел прочности;

$N$  – текущее число циклов;

$\xi$  – коэффициент.

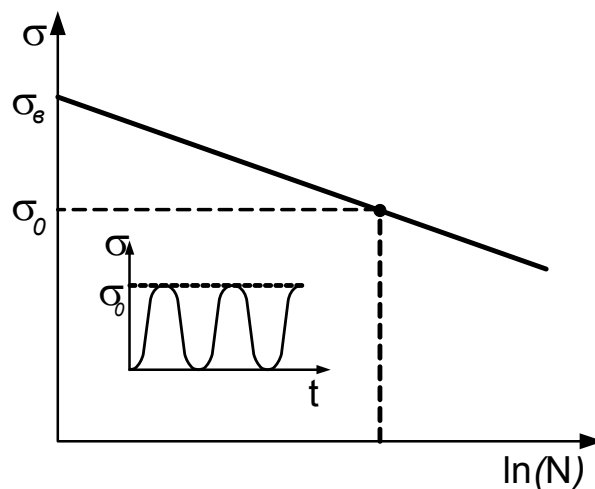


Рисунок 7 – Типичная кривая выносливости

Отсюда предельное число циклов

$$N_0 = e^{(\sigma_B - \sigma_0)/\xi}. \quad (27)$$

С учетом этого формула (25) примет вид

$$\bar{U} = U \omega e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi}. \quad (28)$$

Подставим это выражение в решение (23):

$$T = T_0 e^{-\lambda t} + (1 - e^{-\lambda t}) \left( \frac{U \omega}{kS} e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi} + T_H \right). \quad (29)$$

Так как в момент разрушения  $t_0 = \frac{N_0}{\omega}$ , то максимальная температура будет определяться формулой

$$T_{\max} = T_0 e^{-\lambda N_0/\omega} + \left(1 - e^{-\lambda N_0/\omega}\right) \left( \frac{U\omega}{kS} e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi} + T_H \right). \quad (30)$$

В любой момент времени  $t = \frac{N}{\omega}$  для нахождения температуры получим

$$T = T_0 e^{-\lambda N/\omega} + \left(1 - e^{-\lambda N/\omega}\right) \left( \frac{U\omega}{kS} e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi} + T_H \right). \quad (31)$$

Допуская адекватность описания данной моделью явления нагрева образцов при циклическом нагружении, остается открытым вопрос достоверного определения коэффициента ( $k/S$ , см. формулу (15)) и величины энергии  $U$ . На первом этапе до накопления достаточного экспериментального наблюдения целесообразно нахождение значений этих величин по результатам испытания образцов. Построив график  $T(N)$  или  $T(t)$ , по любой паре измеренных значений температуры и числа циклов (времени) с помощью уравнения (33) можно определить ( $kS$ ) и  $U$  (рис. 8).

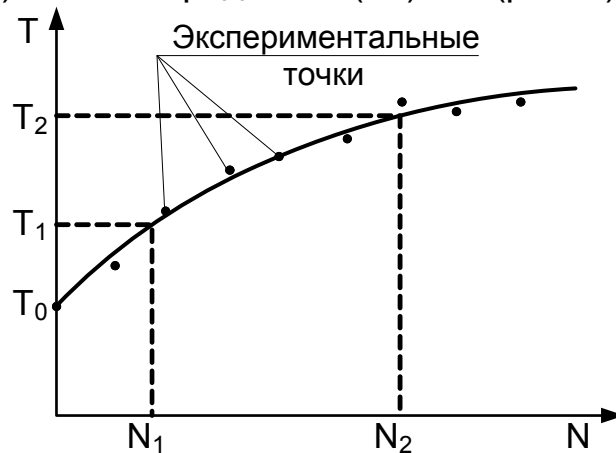


Рисунок 8 – К вопросу об определении коэффициентов модели

Для этого составляется система двух трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 e^{-\lambda N_1/\omega} + \left(1 - e^{-\lambda N_1/\omega}\right) \left( \frac{U\omega}{kS} e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi} + T_H \right); \\ T_2 &= T_0 e^{-\lambda N_2/\omega} + \left(1 - e^{-\lambda N_2/\omega}\right) \left( \frac{U\omega}{kS} e^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi} + T_H \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $T_1, T_2, N_1, N_2$  – измеряемые величины,

$U, (kS)$  – искомые неизвестные.

Выше было принято, что темп накопления энергии  $\bar{U}$  является постоянной величиной вплоть до разрушения. Если это не так, то из вывода формулы (31) видно, что  $\bar{U}$  может быть функцией от времени, но известной из эксперимента. В зависимости от вида этой функции необходимо искать другое частное решение дифференциального уравнения (17).

При известной площади петли гистерезиса по циклам нагружения

удобно пользоваться дискретными уравнениями для вычисления температуры образца. Рассмотрим вывод необходимых зависимостей.

Пусть за один цикл нагружения в образце накапливается  $\bar{U}_i$ . За это же время за счет теплообмена рассеивается энергия

$$Q_i = k_i S (T_i - T_H), \quad (33)$$

где  $T_i$  – температура образца.

Разность  $(\bar{U}_i - Q_i)$  определяет приращение температуры образца

$$\Delta T_i = T_i - T_{i-1} = \frac{1}{c_p V} (\bar{U}_i - Q_i) = \frac{1}{c_p V} [\bar{U}_i - k_i S (T_i - T_H)]. \quad (34)$$

Отсюда

$$T_i \left( 1 + \frac{k_i S}{c_p V} \right) = T_i (1 + \lambda_i) = T_{i-1} + \frac{\bar{U}_i}{c_p V}. \quad (35)$$

В развернутом виде эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{1 + \lambda_1} \left( T_0 + \frac{\bar{U}_1}{c_p V} \right); \\ &\vdots \\ T_i &= \frac{1}{1 + \lambda_i} \left( T_{i-1} + \frac{\bar{U}_i}{c_p V} \right); \\ &\vdots \\ T_N &= \frac{1}{1 + \lambda_N} \left( T_{N-1} + \frac{\bar{U}_N}{c_p V} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Выразив последовательно  $T_{i-1}$  через  $T_i$  из каждого уравнения, начиная с первого, и подставив в последующее уравнение, получим следующее решение системы (36):

$$T_i = T_0 \prod_{k=1}^i \frac{1}{1 + \lambda_k} + \sum_{s=1}^i \frac{\bar{U}_s}{c_p V} \prod_{k=s}^i \frac{1}{1 + \lambda_k}, \quad (37)$$

где  $i=1, \dots, N$  – текущее значение номера цикла.

В целях сокращения расчетов по формуле (37) можно сгруппировать циклы с одинаковыми характеристиками  $\lambda_i$  и  $\bar{U}_i$ .

### 3. Анализ результатов и синтез методики прогнозирования температуры сложноармированных КМ

Из формулы (31) видно, что с ростом частоты и максимальных напряжений цикла увеличивается температура нагрева образца. Большой практический интерес представляет построение алгоритма и методики прогнозирования температуры сложноармированного КМ по известным

данным для однонаправленных КМ (по аналогии с расчетом упругих констант сложных КМ). Зная напряжения  $\sigma_x$ , по формулам (12) можно вычислить компоненты напряжений в каждом слое. Допускается применение принципа суперпозиции, т.е. суммирования температуры от отдельных испытаний однонаправленного КМ вдоль и поперек волокон (или по основе и утку) и на сдвиг при равных объемах (массе) испытываемых образцов или при приведении к единице объема с равной площадью смываемой поверхности.

Определенный интерес представляет изучение нагрева образца при отсутствии теплообмена между ним и окружающей средой. В этом случае уравнение баланса энергии (17) записывается в виде ( $k=0$ )

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\bar{U}}{c\rho V}, \quad (38)$$

откуда (при независимости  $\bar{U}$  от времени) имеем

$$T = \frac{\bar{U}}{c\rho V}t + T_0, \quad (39)$$

или в более общем виде (при произвольной функции  $\bar{U}$  от  $t$ )

$$T = \int_0^t \frac{\bar{U}}{c\rho V} dt + C, \quad (40)$$

где  $C$  – произвольная, определяемая из начальных условий: при  $t=0$  и  $T=T_0$ .

Подставим формулу (28) в зависимость (39) и получим

$$T = T_0 + \frac{U\omega}{c\rho V} te^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi}. \quad (41)$$

Тогда температура в произвольный момент времени  $t = N/\omega$  будет определяться как

$$T = T_0 + \frac{U}{c\rho V} Ne^{(\sigma_0 - \sigma_B)/\xi}. \quad (42)$$

На базе полученных зависимостей для циклических испытаний в условиях отсутствия отвода тепла от образца можно построить полуэмпирическую методику прогнозирования температуры сложноармированных КМ. Для этого необходимо иметь кривые Веллера для однонаправленного КМ вдоль и поперек волокон и на сдвиг (для КМ на основе тканей – по основе, по утку и на сдвиг), которые в полулогарифмических координатах описываются зависимостями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= F_1 - \xi_1 \ln N_1; \\ \sigma_2 &= F_2 - \xi_2 \ln N_2; \\ \tau_{12} &= F_{12} - \xi_{12} \ln N_{12}, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  – амплитуда напряжений испытания КМ вдоль и поперек волокон и на сдвиг соответственно;

$F_1, F_2, F_{12}$  – статические пределы прочности КМ вдоль и поперек волокон и на сдвиг;

$N_1, N_2, N_{12}$  – предельное число циклов нагружения, которое выдерживает КМ при напряжениях  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  соответственно;

$\xi_1, \xi_2, \xi_{12}$  – коэффициенты пропорциональности.

С учетом этого формулы (42) принимают вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \frac{U_1}{c\rho V} Ne^{(\sigma_1 - F_1)/\xi_1}; \\ T_2 &= T_0 + \frac{U_2}{c\rho V} Ne^{(\sigma_2 - F_2)/\xi_2}; \\ T_{12} &= T_0 + \frac{U_{12}}{c\rho V} Ne^{(\tau_{12} - F_{12})/\xi_{12}}. \end{aligned} \quad (44)$$

В зависимости от времени температуру вычисляют с учетом (43) по формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \frac{U_1 \omega t}{c\rho V} e^{(\sigma_1 - F_1)/\xi_1}; \\ T_2 &= T_0 + \frac{U_2 \omega t}{c\rho V} e^{(\sigma_2 - F_2)/\xi_2}; \\ T_{12} &= T_0 + \frac{U_{12} \omega t}{c\rho V} e^{(\tau_{12} - F_{12})/\xi_{12}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поставив эксперимент для эталонных образцов КМ (вдоль и поперек волокон и на сдвиг) для какого-либо уровня амплитудных напряжений и измерив значения температур  $T_1, T_2, T_{12}$  и  $T_0$ , из формул (45) (через один и тот же интервал времени) или из формул (44) (через одно и то же число циклов) можно вычислить значения полной энергии  $U_1, U_2$  и  $U_{12}$ , накапливаемой в материале.

Обратим внимание на то, что эта методика и описывающие ее математические зависимости основаны на линеаризации процесса накопления энергии деформации в материале (см. формулу (25)).

Если сложноармированный КМ подвержен циклическим испытаниям с амплитудой напряжений  $\sigma_x$ , то по формулам (12) можно вычислить напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\tau_{12}$  в каждом слое КМ. Принимая допущение о независимости накопления энергии от компонента напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  при их совместном действии, а также учитывая независимость  $c, \rho$  и  $V$  от угла армирования, можно записать следующую формулу для определения приращения температуры слоев:

$$\Delta T_i = \Delta T_{1i} + \Delta T_{2i} + \Delta T_{12i} = \frac{\omega t}{c_p V} \left( U_{1i} e^{(\sigma_{1i} - F_{1i})/\xi_{1i}} + U_{2i} e^{(\sigma_{2i} - F_{2i})/\xi_{2i}} + U_{12i} e^{(\sigma_{12i} - F_{12i})/\xi_{12i}} \right), \quad (46)$$

где  $i=1, \dots, n$  – номер слоя.

Очевидно, что из-за различного уровня напряжений и других факторов приращение температуры слоев будет различной. Усредненное значение температуры пакета определяется зависимостью

$$T = T_0 + \frac{1}{\delta_{\Sigma}} \sum_{i=1}^n T_i \delta_i, \quad (47)$$

где  $\delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ;

$\delta_i$  – толщина слоя (или группы слоев) с углом армирования  $\alpha_i$ .

Таким образом, при наличии кривых Веллера для КМ с армированием  $0^\circ$  и  $90^\circ$  при растяжении и на сдвиг, измерений температуры нагрева образца через определенное количество циклов (интервал времени) синтезирована методика прогнозирования температуры нагрева КМ произвольной структуры при повторно-статических испытаниях. Также есть некоторые предпосылки для использования этих результатов для косвенной оценки долговечности КМ по результатам измерения температуры [1].

#### Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Ускоренное прогнозирование усталостной долговечности на основе энергетического подхода [Текст] / Я.С. Карпов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 4 (68). – Х., 2011. – С.23-31.
2. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: [Текст] учебник / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2010. – 768 с.

*Поступила в редакцию 10.06.2014.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*