УДК 531.8

А.В. Бетин, д-р техн. наук,
Д.А. Бетин, канд. техн. наук

ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ДОСТОВЕРНОСТИ ПРОЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

При создании летательного аппарата (ЛА) определение центробежных моментов инерции (так же, как массы и осевых моментов инерции) проходит ряд последовательных приближений на этапах предварительного, эскизного и рабочего проектирования. Для этого используют методы и расчетные формулы соответствующих приближений. Результаты расчетов проверяют при изготовлении, испытаниях и доводке, эксплуатации и ремонте ЛА [1].

Недостоверные результаты расчетов массово-инерционных параметров (выражающихся в значительном расхождении проектных и фактических значений) могут сузить эксплуатационные возможности ЛА в отношении распределения полезной нагрузки или вызвать осложнения при его пилотировании. Таким образом, точность результатов расчетов массово-инерционных параметров в целом и центробежных моментов инерции ЛА в частности имеет первостепенное значение.

Имеющиеся в настоящее время теоретические разработки не позволяют дать гарантированного заключения о достоверности результатов расчетов центробежных моментов инерции. Существующая потребность в проведении исследований по указанной проблеме и определила цель данной работы.

Проблема оценки достоверности проектных значений центробежных моментов инерции ЛА непосредственно связана с точностью вычислительного эксперимента. Мерой точности вычислений является их погрешность. Поэтому, кроме найденного приближенного значения искомой величины, необходимо найти погрешность ее определения, т.е. отклонение результата расчета от истинного значения величины [2, 3].

Различают абсолютную и относительную погрешности. Если $x^{ист}$ обозначает истинное, а $x^{выч}$ – вычисленное приближенное значение величины x, то разность $x^{ист} - x^{выч}$ называется истинной абсолютной погрешностью, а $\left(x^{ист} - x^{выч}\right) / x^{выч}$ – истинной относительной погрешностью определения величины x при вычислении.

Истинное значение величины x неизвестно, а, следовательно, неизвестны указанные погрешности. Однако можно указать граничную величину истинной абсолютной погрешности, т.е. положительное число $\Delta x^{выч}$, для которого выполняется неравенство [2, 3]

$$x^{выч} - \Delta x^{выч} \le x^{ист} \le x^{выч} + \Delta x^{выч}. \qquad (1)$$

Величину $\Delta x^{выч}$ называют пределом погрешности, или предельной абсолютной погрешностью определения величины x при вычислении, а $\delta x^{выч} = \Delta x^{выч} / \left| x^{выч} \right|$ – предельной относительной погрешностью определения величины x при вычислении.

Если значение величины x можно определить экспериментально путем прямых или косвенных измерений, то в результате этих действий истинное значение величины x также останется неизвестным. Однако, как и для погрешностей вычислений, можно указать предельную абсолютную погрешность определения величины x при измерении – $x^{изм}$, т.е. положительное число $\Delta x^{изм}$, для которого выполняется неравенство [4]

$$x^{изм} - \Delta x^{изм} \le x^{ист} \le x^{изм} + \Delta x^{изм}. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) устанавливают пределы точности последовательных этапов вычислений и экспериментальной проверки достоверности проектных значений величины x. Проведение всего комплекса работ будет иметь смысл при условии повышения точности от этапа к этапу, т.е.

$$x^{выч} - \Delta x^{выч} \le x^{изм} - \Delta x^{изм} \le x^{ист} \le x^{изм} + \Delta x^{изм} \le x^{выч} + \Delta x^{выч} \qquad (3)$$

или

$$x^{выч} - \Delta x^{выч} \le x^{изм} - \Delta x^{изм}; \qquad (4)$$

$$x^{изм} + \Delta x^{изм} \le x^{выч} + \Delta x^{выч}. \qquad (5)$$

Совместное рассмотрение неравенств (4) и (5) позволяет получить формализованное условие повышения точности всего комплекса работ в виде

$$\Delta x^{изм} \le \Delta x^{выч}. \qquad (6)$$

При условии повышения точности от этапа к этапу для ряда n последовательных приближений определения проектных значений величины $x^{выч}$ (x^{I}, x^{II},..., x^{n-1}, x^{n}) и измерений $x^{изм}$ используемые методы и расчетные формулы дают удовлетворительные результаты, если

$$x^{I} + \Delta x^{I} \ge x^{II} + \Delta x^{II} \ge ... x^{n-1} + \Delta x^{n-1} \ge x^{n} + \Delta x^{n} \ge x^{изм} + \Delta x^{изм}; \qquad (7)$$

$$x^{I} - \Delta x^{I} \le x^{II} - \Delta x^{II} \le ... x^{n-1} - \Delta x^{n-1} \le x^{n} - \Delta x^{n} \le x^{изм} - \Delta x^{изм}. \qquad (8)$$

В частности, для двух первых приближений определения проектных значений величины $x^{выч}$ неравенства (7) и (8) примут вид

$$x^{I} + \Delta x^{I} \geq x^{II} + \Delta x^{II}; \tag{9}$$

$$x^{I} - \Delta x^{I} \leq x^{II} - \Delta x^{II}, \tag{10}$$

откуда после совместных преобразований

$$\Delta x^{II} \leq \Delta x^{I}. \tag{11}$$

Аналогично для всех частных пар величины x, входящих в неравенства (7) и (8), получим развернутое условие повышения точности всего комплекса работ

$$\Delta x^{изм} \leq \Delta x^{n} \leq \Delta x^{n-1} \leq \ldots \leq \Delta x^{II} \leq \Delta x^{I}. \tag{12}$$

Неравенства (1) и (12) исключительно для проектных значений моментов инерции ЛА примут вид

$$I_j^{выч} - \Delta I_j^{выч} \leq I_j^{ист} \leq I_j^{выч} + \Delta I_j^{выч}. \tag{13}$$

$$\Delta I_j^{n} \leq \Delta I_j^{n-1} \leq \ldots \leq \Delta I_j^{II} \leq \Delta I_j^{I} \tag{14}$$

$$(j = x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz),$$

где $I_j^{выч}$ – вычисленные значения моментов инерции I_j^{I}, $I_j^{II}, \ldots,$ I_j^{n-1}, I_j^{n} ряда n последовательных приближений относительно осей системы координат $OXYZ$; $I_j^{ист}$ – истинные значения моментов инерции относительно осей системы координат $OXYZ$.

Если тело условно разбить на N материальных точек с массой m_i, одинаковой для любой из них, то выражения для определения осевых и центробежных моментов инерции тела в прямоугольной системе координат $OXYZ$ будут иметь следующий вид [5, 6]:

$$I_x = m_i\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2\right);\ I_y = m_i\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2\right);$$

$$I_z = m_i\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right); \tag{15}$$

$$I_{xy} = m_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i;\quad I_{xz} = m_i \sum_{i=1}^{N} x_i z_i;\quad I_{yz} = m_i \sum_{i=1}^{N} y_i z_i, \tag{16}$$

где I_x, I_y, I_z, I_{xy}; I_{xz}; I_{yz} – осевые и центробежные моменты инерции тела относительно осей системы координат $OXYZ$; x_i, y_i, z_i – координаты i-й точки относительно осей системы координат $OXYZ$.

Судя по выражениям (15), как истинные, так и вычисленные значения осевых моментов инерции тела произвольной формы не могут быть меньше нуля, т.е. $I_x^{ист} \geq 0$; $I_y^{ист} \geq 0$; $I_z^{ист} \geq 0$ и $I_x^{выч} \geq 0$; $I_y^{выч} \geq 0$; $I_z^{выч} \geq 0$. Подобных выводов в отношении центробежных моментов инерции сделать невозможно. Связано это в первую очередь с тем, что ряды значений координат x_i, y_i и z_i по N материальным точкам тела не взаимосвязаны. Поэтому в общем случае истинные или вычисленные значения центробежных моментов инерции тела произвольной формы относительно осей произвольно расположенной системы координат $OXYZ$, определяемые выражениями (16), могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Так как для пары действительных чисел (a, b) [3]

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \geq 0, \tag{17}$$

то

$$-(a^2 + b^2) \leq 2ab \quad \text{и} \quad 2ab \leq a^2 + b^2. \tag{18}$$

Используя эти неравенства для N пар действительных чисел (a, b), можно записать, что

$$-\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \quad \text{и} \quad 2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \tag{19}$$

или

$$-\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{N} a_i^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 . \tag{20}$$

Тогда для N пар действительных чисел (x_i, y_i), (x_i, z_i) или (y_i, z_i) согласно (20) будем иметь

$$\begin{gathered}
-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2 ; \\
-\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2 ; \\
-\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{N} y_i z_i \leq \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} z_i^2 .
\end{gathered} \tag{21}$$

Умножив неравенства (21) на m_i, с учетом выражений (15) и (16) получим следующие неравенства:

$$-\frac{I_z}{2} \le I_{xy} \le \frac{I_z}{2}; \quad -\frac{I_y}{2} \le I_{xz} \le \frac{I_y}{2}; \quad -\frac{I_x}{2} \le I_{yz} \le \frac{I_x}{2} \tag{22}$$

и

$$-\frac{I_x + I_y + I_z}{2} \le I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} \le \frac{I_x + I_y + I_z}{2}, \tag{23}$$

которые отражают взаимосвязь осевых и центробежных моментов инерции тела произвольной формы относительно осей прямоугольной системы координат $OXYZ$ с произвольно выбранным положением начала координат.

Правую часть неравенства (23) можно получить и другим способом, используя формулу для вычисления момента инерции тела относительно любой оси $O\nu$, проведенной через начало координат системы $OXYZ$, [5]

$$\begin{gathered} I_\nu = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma, \end{gathered} \tag{24}$$

где α, β, γ – углы между осью $O\nu$ и осями OX, OY и OZ соответственно.

В частном случае равенства между собой углов между осью $O\nu$ и осями OX, OY и OZ (т.е. α = β = γ = φ) формула (24) примет вид

$$I_\nu = \cos^2\varphi\left(I_x + I_y + I_z - 2I_{xy} - 2I_{xz} - 2I_{yz}\right), \tag{25}$$

а с учетом того, что момент инерции $I_\nu \ge 0$ по определению осевых моментов инерции, можно получить неравенство

$$I_x + I_y + I_z - 2I_{xy} - 2I_{xz} - 2I_{yz} \ge 0 \tag{26}$$

или

$$I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} \le \frac{I_x + I_y + I_z}{2}. \tag{27}$$

Последнее неравенство как раз и является правой частью неравенства (23).

Неравенства (22) и (23) не содержат членов, связанных с точностью вычислительного эксперимента по определению осевых и центробежных моментов инерции, поэтому их запись в наиболее корректной форме имеет вид

$$-\frac{I_z^{ucm}}{2} \le I_{xy}^{ucm} \le \frac{I_z^{ucm}}{2}; \; -\frac{I_y^{ucm}}{2} \le I_{xz}^{ucm} \le \frac{I_y^{ucm}}{2}; -\frac{I_x^{ucm}}{2} \le I_{yz}^{ucm} \le \frac{I_x^{ucm}}{2} \quad (28)$$

и

$$-\frac{I_x^{ucm} + I_y^{ucm} + I_z^{ucm}}{2} \le I_{xy}^{ucm} + I_{xz}^{ucm} + I_{yz}^{ucm} \le \frac{I_x^{ucm} + I_y^{ucm} + I_z^{ucm}}{2}. \quad (29)$$

Рассмотрим совместно первое из неравенств (28) и неравенство (13) в виде, определяющем ограничения на центробежные моменты инерции I_{xy}^{ucm}. Так

$$-\frac{I_z^{ucm}}{2} \le I_{xy}^{ucm} \le \frac{I_z^{ucm}}{2}; \quad (30)$$

$$I_{xy}^{выч} - \Delta I_{xy}^{выч} \le I_{xy}^{ucm} \le I_{xy}^{выч} + \Delta I_{xy}^{выч}. \quad (31)$$

Неравенство (31) является внутренним по отношению к неравенству (30), так как определяет собственные границы на I_{xy}^{ucm}, в то время как неравенство (30) устанавливает взаимосвязь центробежных I_{xy}^{ucm} и осевых I_z^{ucm} моментов инерции. Поэтому общее неравенство будет иметь вид

$$-\frac{I_z^{ucm}}{2} \le I_{xy}^{выч} - \Delta I_{xy}^{выч} \le I_{xy}^{ucm} \le I_{xy}^{выч} + \Delta I_{xy}^{выч} \le \frac{I_z^{ucm}}{2}, \quad (32)$$

из которого

$$-\frac{I_z^{ucm}}{2} \le I_{xy}^{выч} - \Delta I_{xy}^{выч}; \quad (33)$$

$$I_{xy}^{выч} + \Delta I_{xy}^{выч} \le \frac{I_z^{ucm}}{2}. \quad (34)$$

Используя неравенства (33) и (34), в отношении $I_{xy}^{выч}$ получим

$$-\frac{I_z^{ucm}}{2} + \Delta I_{xy}^{выч} \le I_{xy}^{выч} \le \frac{I_z^{ucm}}{2} - \Delta I_{xy}^{выч}. \quad (35)$$

Поскольку $I_z^{ucm} \ge 0$ по определению осевых моментов инерции, то для обеспечения максимальных граничных значений $I_{xy}^{выч}$ в неравенство

(35) необходимо подставить $I_z^{ucm} = I_z^{выч} + \Delta I_z^{выч}$. В результате этого неравенство (35) приобретет окончательный вид проверочного неравенства

$$-\frac{I_z^{выч} + \Delta I_z^{выч}}{2} + \Delta I_{xy}^{выч} \le I_{xy}^{выч} \le \frac{I_z^{выч} + \Delta I_z^{выч}}{2} - \Delta I_{xy}^{выч}, \qquad (36)$$

которое может быть выполнено, если

$$\Delta I_{xy}^{выч} \le \frac{I_z^{выч} + \Delta I_z^{выч}}{2}. \qquad (37)$$

Аналогично рассуждая, можно записать, что для вычисленных значений $I_{xz}^{выч}$ и $I_{yz}^{выч}$ должны выполняться следующие условия:

$$-\frac{I_y^{выч} + \Delta I_y^{выч}}{2} + \Delta I_{xz}^{выч} \le I_{xz}^{выч} \le \frac{I_y^{выч} + \Delta I_y^{выч}}{2} - \Delta I_{xz}^{выч}; \qquad (38)$$

$$-\frac{I_x^{выч} + \Delta I_x^{выч}}{2} + \Delta I_{yz}^{выч} \le I_{yz}^{выч} \le \frac{I_x^{выч} + \Delta I_x^{выч}}{2} - \Delta I_{yz}^{выч} \qquad (39)$$

при

$$\Delta I_{xz}^{выч} \le \frac{I_y^{выч} + \Delta I_y^{выч}}{2}; \qquad (40)$$

$$\Delta I_{yz}^{выч} \le \frac{I_x^{выч} + \Delta I_x^{выч}}{2}. \qquad (41)$$

Использование неравенств (36) – (41) дает первоначальную оценку достоверности проектных значений центробежных моментов инерции, однако не позволяет сделать вывод об их возможных знаковых сочетаниях.

Определенный интерес может представлять исследование знака произведения центробежных моментов инерции части тела, находящейся в одном из октантов пространства в системе координат $OXYZ$, т.е.

$$I_{xy}(k) I_{xz}(k) I_{yz}(k) = m_i^3(k) \sum_{i=1}^{N_k} x_i(k) y_i(k) \sum_{i=1}^{N_k} x_i(k) z_i(k) \sum_{i=1}^{N_k} y_i(k) z_i(k), \qquad (42)$$

где k – номер октанта ($k = 1...8$); N_k – количество материальных точек с массой $m_i(k)$ части тела, находящейся в k-м октанте (в N_k включаются также точки, расположенные на октантных плоскостях системы координат $OXYZ$); $x_i(k)$, $y_i(k)$, $z_i(k)$ – координаты i-й точки части тела, находящейся в k-м октанте.

Для части тела, находящейся в одном из октантов, координаты $x_i(k)$ всех N_k материальных точек тела имеют либо один и тот же знак, либо равны нулю (что не меняет знаков сумм в выражении (42)). Аналогичные заключения можно сделать и в отношении координат $y_i(k)$ и $z_i(k)$. Поэтому в общем случае правомерно будет записать, что

$$\begin{aligned}
&Sign\left(I_{xy}(k)I_{xz}(k)I_{yz}(k)\right) = \\
&= Sign\left(m_i^3(k)\cdot\sum_{i=1}^{N_k} x_i(k)y_i(k)\cdot\sum_{i=1}^{N_k} x_i(k)z_i(k)\cdot\sum_{i=1}^{N_k} y_i(k)z_i(k)\right) = \\
&= Sign\left(m_i^3(k)\cdot\left(x_i(k)y_i(k)\right)\cdot\left(x_i(k)z_i(k)\right)\cdot\left(y_i(k)z_i(k)\right)\right) = \\
&= Sign\left(m_i^3(k)\cdot x_i^2(k)\cdot y_i^2(k)\cdot z_i^2(k)\right).
\end{aligned} \tag{43}$$

Так как знак последнего выражения отрицательным быть не может, то и произведение центробежных моментов инерции части тела, находящейся в одном из октантов пространства в системе координат $OXYZ$, также отрицательным быть не может, т.е.

$$I_{xy}(k)I_{xz}(k)I_{yz}(k) \geq 0. \tag{44}$$

Нулевое значение произведения $I_{xy}(k)I_{xz}(k)I_{yz}(k)$ будет лишь в том случае, когда все N_k точек рассматриваемой части тела расположены на соответствующих октантных плоскостях (или плоскости).

Следует также отметить, что условие (44), но в виде

$$I_{xy}I_{xz}I_{yz} \geq 0 \tag{45}$$

должно иметь место для тела, полностью находящегося в одном из октантов системы координат $OXYZ$.

Произведение $I_{xy}(k)I_{xz}(k)I_{yz}(k)$ будет положительным или равным нулю в следующих случаях:

$$\begin{aligned}
&1.\ I_{xy}(k)\geq 0,\ I_{xz}(k)\geq 0,\ I_{yz}(k)\geq 0; \\
&2.\ I_{xy}(k)\leq 0,\ I_{xz}(k)\leq 0,\ I_{yz}(k)\geq 0; \\
&3.\ I_{xy}(k)\leq 0,\ I_{xz}(k)\geq 0,\ I_{yz}(k)\leq 0; \\
&4.\ I_{xy}(k)\geq 0,\ I_{xz}(k)\leq 0,\ I_{yz}(k)\leq 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Для истинных ($I_{xy}^{ист}(k)$, $I_{xz}^{ист}(k)$, $I_{yz}^{ист}(k)$) или вычисленных ($I_{xy}^{выч}(k)$, $I_{xz}^{выч}(k)$, $I_{yz}^{выч}(k)$) значений центробежных моментов инерции части тела, находящейся в любом из октантов пространства в системе координат $OXYZ$, условия (44) в виде одного из условий (46) должны обязательно выполняться. Отличный от этого результат будет свидетельствовать о системной ошибке в проведении вычислений.

Использование полученных условий позволяет дать заключение о достоверности результатов численного эксперимента по определению центробежных моментов инерции проектируемых изделий.

Единственное замечание касается предельных абсолютных погрешностей вычислений центробежных моментов инерции ЛА. Определение их численных значений является самостоятельной задачей, решение которой частично нашло свое отражение в научной и технической литературе. Более полное и конкретное рассмотрение этой проблемы для численного эксперимента по определению осевых и центробежных моментов инерции может быть предметом дальнейших исследований.

Список использованных источников

1. Шейнин, В.М. Весовое проектирование и эффективность пассажирских самолетов [Текст]: справ. – 2-е изд., перераб. и доп. / В.М. Шейнин, В.И. Козловский. – М. : Машиностроение, 1984. – 552 с.

2. Турчак, Л.И. Основы вычислительных методов [Текст] / Л.И. Турчак. – М. : Наука, 1987. – 320 с.

3. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М. : Наука,1980. – 976 с.

4. Гернет, М.М. Определение моментов инерции [Текст] / М.М. Гернет, В.Ф. Радобыльский. – М. : Машиностроение, 1969. – 249 с.

5. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики [Текст] / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.К. Дворников. – М. : Высш. шк., 1974. – 528 с.

6. Бетин, А.В. Первоначальная оценка достоверности результатов экспериментального определения центробежных моментов инерции тел [Текст] / А.В. Бетин, Д.А. Бетин // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. – Вып. 30 (3). – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2002. – С. 123 – 126.

Поступила в редакцию 28.08.2014.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Рыженко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.