

РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С КОМПОЗИТНЫМИ ОБШИВКАМИ

Трехслойные панели с тонкими прочными композитными обшивками и легким наполнителем, благодаря своим уникальным свойствам, широко используются во многих отраслях техники. Главной особенностью таких конструкций является сочетание высокой изгибной жесткости и прочности с небольшой массой и хорошей способностью поглощать энергию при ударных воздействиях. Кроме того, трехслойные конструкции позволяют обеспечить хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, а также обладают высокой технологичностью и вибростойкостью. Это и определяет их широкое применение в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве. Сегодня в авиационной промышленности трехслойные конструкции используются в лонжеронах, перегородках, стенках продольного и поперечного набора крыла, в панелях аэродинамических поверхностей, а также в деталях интерьера салонов самолетов и вертолетов.

Обшивка таких конструкций изготавливается из материалов более жестких, чем материал наполнителя. Для несущих слоев применяют различные металлические сплавы, а также композиционные материалы. В качестве наполнителя используют различные пенопласты, соты из металлической фольги или полимерной бумаги, гофры, ячейки. Ввиду наличия относительно слабо сопротивляющегося среднего слоя (сплошного или ребристого) деформации изгиба в трехслойных конструкциях сопровождаются значительным взаимным смещением обшивок. Поскольку физико-механические свойства обшивки и наполнителя существенно отличаются, применение для таких конструкций классической теории пластин, базирующейся на гипотезе прямых нормалей, приводит к существенным ошибкам. Поэтому расчет трехслойных панелей с относительно мягкими наполнителями оказывается возможным либо на основе точных методов теории упругости, либо путем введения некоторых гипотез, отражающих специфику работы конструкции и позволяющих значительно упростить решение задачи, не внося при этом существенной погрешности в результат. К сожалению, применение для этих целей трехмерных уравнений упругости является достаточно сложной математической задачей, требующей, в общем случае, использования численных методов. Поэтому на практике широкое распространение получили различные двумерные теории, позволяющие за счет применения аналитических подходов существенно уменьшить время решения задачи.

Наиболее часто для описания работы такой конструкции применяются двумерные теории, основанные на гипотезе ломаной линии, когда

поведение обшивок моделируется с помощью теории Киргхоффа или мембранной теории, а поведение заполнителя посредством теории типа Тимошенко или какой-либо другой теории, более точно учитывающей поперечные деформации конструкции [1 – 4]. При этом особенности расчета в основном связаны с учетом поперечного сдвига и сжатия маложесткого слоя заполнителя [2 – 4]. К настоящему времени разработано большое количество теорий для расчета конструкций с определенным типом заполнителя (жесткий, легкий) [1, 5]. Они ориентированы на определенный класс конструкций и неприменимы при исследовании другого класса, что не всегда является удобным. Подробный анализ характеристик двумерных методов расчета дан в работах [4, 6, 7].

В связи с этим возникает необходимость в разработке новых и усовершенствовании существующих методов анализа трехслойных конструкций. При этом новые методы должны не только с достаточной точностью описывать напряженно-деформированное состояние (НДС), но и обладать высокой универсальностью и алгоритмичностью.

Одним из наиболее точных подходов к построению теорий многослойных конструкций является дискретно-структурный подход, при котором поведение каждого слоя описывается своими гипотезами. При этом наиболее простым способом построения уточненных моделей является применение разложений в степенные ряды по поперечной координате [4, 6, 7].

В работе для исследования статического деформирования трехслойных пластин с тонкими композитными обшивками применяется обобщенная теория [8]. Она относится к классу дискретно-структурных. В ее основе лежит предположение о том, что перемещения каждого слоя пластины могут быть представлены в виде конечных степенных рядов по поперечной координате. Предлагаемая теория позволяет получать высокоточные аппроксимации перемещений и всех компонент напряжений (в том числе поперечных) для каждого слоя, а также с достаточной точностью выполнить условия контакта слоев.

Постановка задачи. Сэндвич-пластина постоянной толщины отнесена к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1). Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Количество слоев в пакете равно l , h_i – толщина i -го слоя. Слои изготовлены из ортотропных материалов, θ_i – угол армирования в i -м слое. Направления армирования в каждом слое параллельны координатным осям Ox_1, Ox_2 .

К наружной поверхности первого слоя приложена внешняя сила $\bar{q} = \bar{q}(x_1, x_2, t)$. Условимся обозначать проекцию вектора внешней нагрузки на координатную ось q_α .

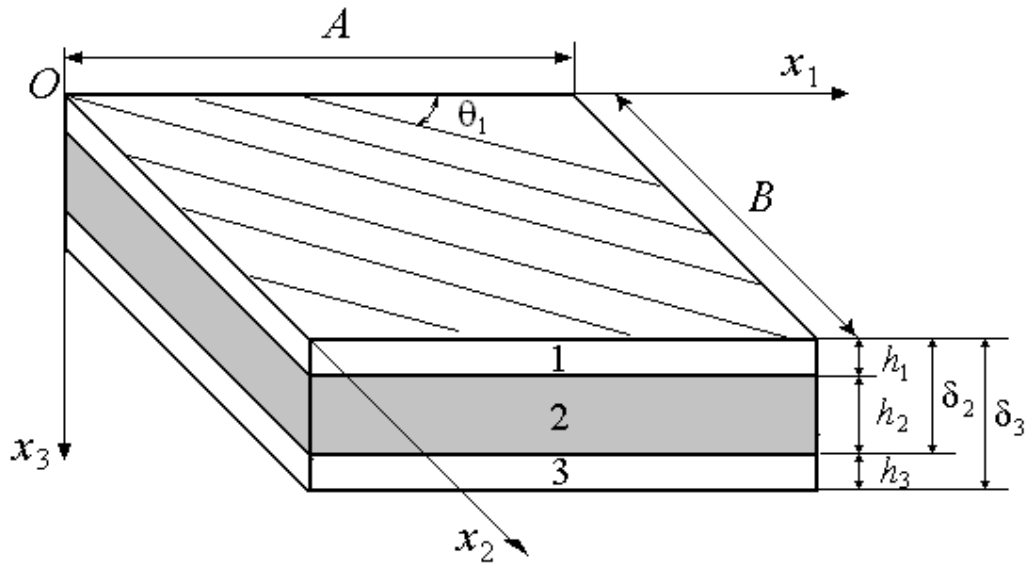


Рисунок 1 – Сэндвич пластина

Поведение пластины описывается уравнениями обобщенной теории многослойных пластин [8], позволяющей выбирать необходимую точность описания НДС в зависимости от композиции пакета слоев. В общем случае перемещения точки i -го слоя описываются следующими кинематическими зависимостями:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{K_{\alpha}^j} h_j^k u_{\alpha k}^j + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}^i} (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i,$$

$$h_j^k = (h_j)^k, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I},$$

где u_{α}^i ($\alpha = \overline{1, 3}$) – перемещение точки i -го слоя в направлении оси Ox_{α} ; u_{α} , $u_{\alpha k}^i$ – коэффициенты разложений перемещений в степенные ряды, представляющие функции аргументов x_1, x_2, t ; K_{α}^i – максимальные степени поперечной координаты для плоскостных ($\alpha = 1, 2$) и поперечных ($\alpha = 3$) перемещений для i -го слоя.

В целях упрощения и повышения алгоритмичности задачи будем учитывать одинаковое количество членов степенного ряда во всех слоях, т.е. $K_1^i = K_1$, $K_2^i = K_2$, $K_3^i = K_3$ ($i = \overline{1, I}$), где K_1, K_2, K_3 – параметры, которые задаются в зависимости от требуемой точности решения задачи. В этом случае гипотезы обобщенной теории могут быть упрощены и записаны в более компактном виде

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right]. \quad (1)$$

При этом K_1 и K_2 , которые описывают количество удерживаемых членов степенного ряда (1) для плоскостных перемещений, будем выбирать одинаковыми и равными величине K . В дальнейшем обобщенная теория обозначается по количеству удерживаемых членов в степенных рядах (1) для плоскостных и поперечных перемещений – теория $\{K, K_3\}$.

Принятые кинематические зависимости (1) при $K = 1$, $K_3 = 0$ эквивалентны гипотезам теории Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова [5], при $K = 3$, $K_3 = 2$ – гипотезам уточненной теории высокого порядка [9].

Деформации в каждом слое пластины предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Применение гипотез (1) приводит к непрерывному по толщине пакета полю перемещений и обеспечивает непрерывность деформаций $\varepsilon_{11}^i, \varepsilon_{22}^i$ и кусочную непрерывность поперечных деформаций по толщине пакета. Поэтому в рамках предлагаемой теории существует принципиальная возможность с заданной точностью выполнить условия контакта между слоями [8].

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого случая ортотропии имеет вид [10]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2G_{12}^i} p_{12}^i; \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{1}{2G_{13}^i} p_{13}^i; \quad \varepsilon_{23}^i = \frac{1}{2G_{23}^i} p_{23}^i,$$

где $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для i -го слоя; $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модули сдвига для i -го слоя, $p_{\alpha\beta}^i$ – тензор напряжений.

Усилия и моменты в i -м слое определяют по формулам

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Определяющие уравнения и метод их решения. Уравнения и граничные условия, описывающие деформирование слоистых пластин,

получены с помощью вариационного принципа аналогично тому, как это было сделано для изотропных многослойных пластин [8]. В усилиях и моментах эти уравнения имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^l L_{\alpha}^i + q_{\alpha} = 0;$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_{\alpha}} + N_{\alpha 2,2}^{ik_{\alpha}} - k_{\alpha} N_{\alpha 3}^{ik_{\alpha}-1} + h_i^{k_{\alpha}} \sum_{j=i}^{l-1} L_{\alpha}^{j+1} = 0, \quad (2)$$

где $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$; $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$; $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$; $\alpha = \overline{1,3}$, $k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}$, $i = \overline{1, l}$.

Таким образом, динамический отклик пластины описывается $(2K + K_3)l + 3$ дифференциальными уравнениями.

Уравнения (2) могут быть записаны в перемещениях

$$\Lambda \cdot \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{Q}}, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{U}}$ – вектор, компонентами которого являются искомые функции $\bar{\mathbf{U}}^T = (u_{\alpha}, u_{\alpha k_{\alpha}}^i), \alpha = \overline{1, 3}, i = \overline{1, l}, k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}$; $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Lambda}$ – матрица масс и матрица жесткости, квадратные симметричные матрицы порядка $(2K + K_3)l + 3$; $\bar{\mathbf{Q}}$ – вектор, компоненты которого зависят от внешней силы, приложенной к наружной поверхности многослойной пластины

$$\bar{\mathbf{Q}}^T = (q_1, q_2, q_3, 0, \dots, 0).$$

Элементы матрицы $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Lambda}$ не приводятся в силу их громоздкости.

Вид граничных условий на контуре опирания для прямоугольной шарнирно опертой пластины приведен ниже:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = A - \sum_{i=1}^l N_{11}^{i0} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$N_{11}^{i k_1} + h_i^{k_1} \sum_{j=i}^{l-1} N_{11}^{j+1 0} = 0, \quad u_{2 k_2}^i = 0, \quad u_{3 k_3}^i = 0;$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = B - u_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^l N_{22}^{i0} = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{1 k_1}^i = 0,$$

$$N_{22}^{i k_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=i}^{l-1} N_{22}^{j+1 0} = 0, \quad u_{3 k_3}^i = 0, \quad (4)$$

$$k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Таким образом, поведение шарнирно опертой трехслойной пластины описывается системой уравнений (3) и граничными условиями (4).

Метод решения. Искомые функции $u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i$ ($\alpha = \overline{1, 3}, k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, i = \overline{1, I}$) и внешняя нагрузка q_α ($\alpha = \overline{1, 3}$) разлагаются в тригонометрические ряды по функциям $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$, удовлетворяющим условиям на контуре опирания

$$[u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i, q_\alpha] = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\Phi_{\alpha mn}, \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i, q_{\alpha mn}] B_{\alpha mn}(x_1, x_2),$$

где M, N – число удерживаемых членов в рядах.

Для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по краям, функции $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$B_{1mn} = \cos \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n \pi x_2}{B}; \quad B_{2mn} = \sin \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \cos \frac{n \pi x_2}{B};$$

$$B_{3mn} = \sin \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n \pi x_2}{B}.$$

В результате задача о деформировании многослойной пластины для каждой пары значений m и n сводится к решению системы неоднородных алгебраических уравнений.

Численное исследование. Для проверки работоспособности и эффективности применяемой теории был проведен ряд тестовых расчетов квадратных трехслойных пластин. Результаты расчета по предлагаемой теории сопоставлялись с данными расчета, полученными по различным двумерным теориям, а также с трехмерными решениями.

Исследуется деформирование пластин под действием синусоидальной нагрузки, распределенной по всей поверхности пластины,

$$q_3(x_1, x_2, t) = P_0 \cdot \sin \frac{\pi x_1}{A} \sin \frac{\pi x_2}{B}, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad (5)$$

где P_0 – интенсивность нагружения.

Рассмотрена классическая задача N.J. Pagano о деформировании трехслойной пластины, толщина обшивок которой $h_1 = h_3 = 0,1H$, а толщина заполнителя $h_2 = 0,8H$, где $H = h_1 + h_2 + h_3 = \delta_3$ – общая толщина пластины. Механические свойства обшивок:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25; \quad \frac{G_{12}}{E_2} = 0,5; \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0,2; \quad E_2 = E_3 = 10^6;$$

$$G_{12} = G_{13}; \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0,25.$$

Предполагается, что углы армирования в обшивках равны нулю, волокна параллельны оси Ox_1 .

Заполнителем является трансверсально изотропный материал, механические свойства которого

$$E_1 = E_2 = 0,4 \cdot 10^5; E_3 = 0,5 \cdot 10^6; G_{13} = G_{23} = 0,6 \cdot 10^5;$$

$$G_{12} = 0,16 \cdot 10^5; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0,25.$$

В табл. 1 приведены результаты расчета напряжений для пластин разной толщины по обобщенной теории при различном числе удерживаемых членов в рядах (1). Результаты расчетов сопоставляются с трехмерным решением, полученным N.J. Pagano [11], с решением по классической теории пластин [3, 11], а также с решениями по двум вариантам уточненных двумерных теорий [3]. В табл. 1 результаты по этим двум уточненным теориям приведены только для нижней обшивки, поскольку в работе [3] были даны только эти значения. Результаты приведены в безразмерном виде

$$\bar{p}_{11}^i = \frac{p_{11}^i}{s^2 P_0}, \quad \bar{p}_{22}^i = \frac{p_{22}^i}{s^2 P_0}, \quad \bar{p}_{33}^i = \frac{p_{33}^i}{s^2 P_0}, \quad \bar{u}_3^i = \frac{E_1 u_3^i}{100 H P_0}, \quad s = \frac{A}{H}.$$

Таблица 1 – Максимальные плоскостные напряжения в слоях

s	Теория	Напряжения	
		$\bar{p}_{11}^{-1}(A/2, B/2, 0) /$ $\bar{p}_{11}^{-3}(A/2, B/2, \delta_3)$	$\bar{p}_{22}^{-1}(A/2, B/2, 0) /$ $\bar{p}_{22}^{-3}(A/2, B/2, \delta_3)$
100	{1,0}	-1,101 / 1,101	-0,0614 / 0,0614
	{3,2}	-1,097 / 1,098	-0,0549 / 0,0550
	{5,4}	-1,097 / 1,098	-0,0549 / 0,0550
	{7,6}	-1,097 / 1,098	-0,0549 / 0,0550
	Двумерная 1 [3]	– / 1,026	– / 0,0497
	Двумерная 2 [3]	– / 1,110	– / 0,0565
	Трехмерная [11]	-1,098 / 1,098	-0,0550 / 0,0550
10	{1,0}	-1,155 / 1,155	-0,1188 / 0,1188
	{3,2}	-1,145 / 1,153	-0,1066 / 0,1132
	{5,4}	-1,145 / 1,153	-0,1065 / 0,1131
	{7,6}	-1,145 / 1,153	-0,1065 / 0,1131
	Двумерная 1 [3]	– / 1,166	– / 0,1052
	Двумерная 2 [3]	– / 1,168	– / 0,1111
	Трехмерная [11]	-1,152 / 1,153	-0,1099 / 0,1104
4	{1,0}	-1,524 / 1,524	-0,2686 / 0,2686
	{3,2}	-1,468 / 1,544	-0,2310 / 0,2734
	{5,4}	-1,468 / 1,543	-0,2307 / 0,2730
	{7,6}	-1,468 / 1,543	-0,2307 / 0,2730
	Двумерная 1 [3]	– / 1,523	– / 0,2414
	Двумерная 2 [3]	– / 1,533	– / 0,2695
	Трехмерная [11]	-1,512 / 1,556	-0,2533 / 0,2595
	Классическая [3]	-1,097 / 1,097	-0,0543 / 0,0543

Из табл. 1 видно, что при увеличении количества удерживаемых членов в разложениях (1) результаты, полученные на основе обобщенной теории, сходятся. Для тонких пластин результаты расчета по обобщенной теории практически совпали с данными, полученными по трехмерной теории. Результаты расчета по этим теориям для более толстых пластин имеют близкие значения. При этом во всех случаях предлагаемая обобщенная теория дает результат более точный, чем другие уточненные двумерные теории [3]. Кроме того, из табл. 1 следует, что при исследовании напряжений $\bar{p}_{11}^i, \bar{p}_{22}^i$ в относительно тонких пластинах ($A/H > 10$) при воздействии распределенных нагрузок можно использовать обобщенную теорию низкого порядка $\{1,0\}$, а для пластин средней и большой толщины необходимо применять теории более высокого порядка, например теорию $\{3,2\}$.

Рассмотрена задача о деформировании сэндвича ($A = B = 20H$) с толщиной обшивок $h_1 = h_3 = 2$ мм и толщиной заполнителя $h_2 = 16$ мм под действием нагрузки (5) [2]. Обшивки изготовлены из однонаправленного графито-эпоксидного материала с механическими свойствами: $E_1 = 181$ ГПа, $E_2 = E_3 = 10,3$ ГПа, $G_{12} = G_{31} = 7,17$ ГПа, $G_{23} = 5,96$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,277$, $\nu_{32} = 0,400$. Заполнитель имеет механические свойства: $E_1 = E_2 = 0,032$ ГПа, $E_3 = 0,3$ ГПа, $G_{12} = 0,013$ ГПа, $G_{31} = G_{23} = 0,048$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0,25$.

На рис. 2 приведено изменение перемещений вдоль оси Ox_1 для верхней обшивки при $x_2 = A/2$, $x_3 = 0$.

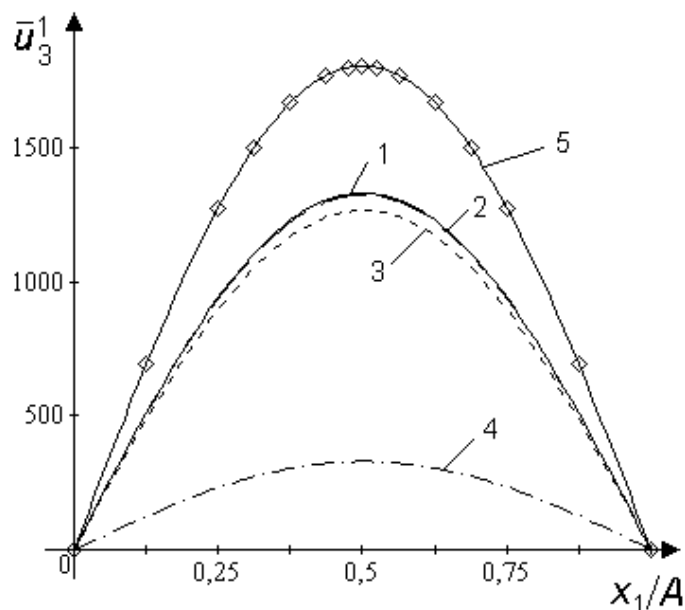


Рисунок 2 – Изменение прогиба обшивки вдоль координаты x_1 :

- 1 – трехмерная теория; 2 – обобщенная теория; 3 – уточненная теория;
4 – классическая теория пластин; 5 – теория первого порядка

Результаты расчета по обобщенной теории {3, 2} сопоставляются с данными расчета по двумерным теориям (классическая теория, теория первого порядка, уточненная теория) [2], а также трехмерным решением [2]. Видно, что результаты расчета по обобщенной теории и трехмерной теории практически совпадают.

На рис. 3 показано изменение напряжений \bar{p}_{33}^2 по толщине заполнителя, вычисленное по обобщенной теории {3, 2}, трехмерной теории [2] и двумерной уточненной теории высокого порядка [2]. По оси абсцисс откладываются значения перемещений в зависимости от величины $z = -1 + 2(x_3 - h_1)/h_2$.

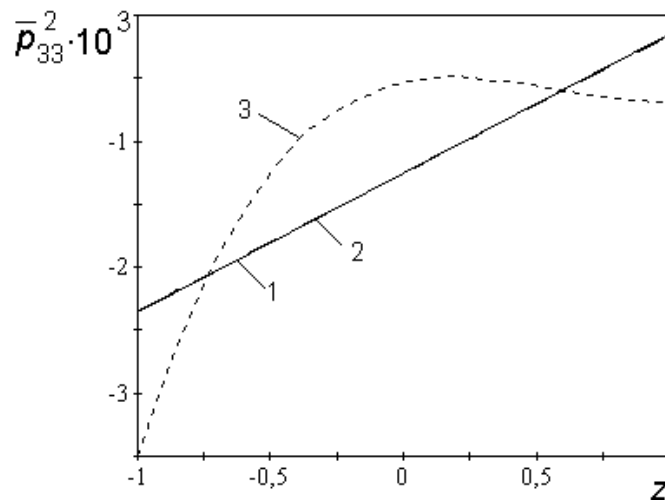


Рисунок 3 – Изменение напряжений в заполнителе:
1 – трехмерная теория; 2 – обобщенная теория; 3 – уточненная двумерная теория высокого порядка

Как и для перемещений, результаты расчета по предлагаемой обобщенной и трехмерной теориям практически совпали. Результаты расчета по уточненной теории высокого порядка дают менее точный результат. Следует также отметить практически линейный характер распределения напряжений по толщине заполнителя для данного вида нагружения.

Выводы

В работе представлено применение обобщенной двумерной теории к расчету трехслойных пластин с тонкими обшивками. В основе теории лежит представление искомых перемещений в виде степенных рядов в направлении поперечной координаты.

Возможности предлагаемой теории проиллюстрированы на ряде примеров расчета НДС трехслойных пластин с тонкими композитными обшивками при статическом нагружении. Результаты расчетов по обобщенной теории сопоставлялись с данными, полученными по трехмерной теории и по различным уточненным двумерным теориям. Установлено, что обобщенная теория позволяет получать результаты более точные,

чем существующие двумерные теории. Показано, что при действии распределенных нагрузок на тонкие пластины для анализа перемещений и напряжений p_{11} , p_{22} можно использовать вариант обобщенной теории $\{1,0\}$, а для более толстых пластин необходимо применять варианты теории более высокого порядка, например теорию $\{3,2\}$, и т.д.

Список использованных источников

1. Брюккер, Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин / Л.Э. Брюккер // Расчеты элементов авиационных конструкций. Трехслойные панели и оболочки. – М.: Машиностроение. 1965. – Вып. 3. – С. 74 – 99.
2. Li, R. Nonlinear high-order core theory for sandwich plates with orthotropic phases / R. Li, G. A. Kardomateas // AIAA Journal – 2008. – Vol. 46, No. 11. – P. 2926 – 2934.
3. Pandya, B.N. Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model / B. N. Pandya, T. Kant // Composites Science and Technology. – 1988. – Vol. 32. – P. 137 – 155.
4. Matsunaga, H. Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates / H. Matsunaga // Journal of composite materials. – 2002. – Vol. 56. – P. 279-291.
5. Григолюк, Э.И. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1964. – № 5. – С. 109 – 117.
6. Григолюк, Э.И. Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.
7. Chen, W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories / W. Chen, Z. Wu // Recent patents on mechanical engineering. – 2008. – Vol. 1. – P. 29 – 44.
8. Ugrimov, S.V. Generalized theory of multilayer plates // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39. – № 4. – P. 819 – 839.
9. Lo, K.H. A high-order theory of plate deformation. Part 2. Laminated plates / K.H.Lo, R.M. Cristensen, E.M. Wu // Transaction of ASME. Journal of applied mechanics. – 1977. – Vol. 99. – P. 669 – 676.
10. Рассказов, А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.
11. Pagano, N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // Journal of composite materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 20 – 34.

Поступила в редакцию 14.07.2014.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*