

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Механика сплошных сред как фундаментальная наука издавна привлекала пристальное внимание как создателей аэрокосмической техники, так и учёных разных специальностей. Наглядность её экспериментов, чёткая постановка задач, сравнительная простота основных уравнений давали возможность получить как количественное, так и качественное описание целого ряда динамических явлений, происходящих в сплошных средах. Особое место в этой области знаний по праву принадлежит аэрогидродинамике [1]. Востребованность решений начально-краевых задач аэрогидродинамики определяется, в первую очередь, проблемами аэрогидродинамического совершенствования объектов аэрокосмической техники (рис.1), высоко-



Рисунок 1 – Летательные аппараты широкого применения с развитой механизацией

скоростных транспортных средств и инженерных сооружений, а также проблемами прочностного проектирования летательного аппарата и его частей [2]. Однако многочисленные парадоксы теоретической аэрогидродинамики указывают на необходимость совершенствования математических и физических моделей аэрогидродинамических процессов и использования существующих возможностей более глубокого математического и численного анализа классических задач [3 – 5]. Эти возможности связаны, во-первых, с наличием большого парка мощных ЭВМ. Стали доступными не только расчёты, ранее невыполнимые из-за их сложности, но и эксперименты нового типа – вычислительные, имеющие ряд преимуществ перед физическими [6 - 10]. При этом ускорение научно-технического прогресса, развитие науки и техники, широкий диапазон исследований в изучении явлений природы ставят перед аэрогидродинамикой множество новых задач (рис. 2 – 3) [1, 13].



Рисунок 2 – Визуализация вихревых структур за B-727



Рисунок 3 – Процесс рассеивания вредных веществ на территории аэропорта

Современная вычислительная техника позволяет перейти к изучению более реалистических моделей течения, к методу, который можно назвать точным в том смысле, что он учитывает истинное положение границ и даёт точное равномерно сходящееся решение при выборе эффективной расчётной схемы. Такой метод позволяет получать не только достаточно надёжные количественные аэрогидродинамические характеристики произвольной несущей системы, но и изучать такое сложное явление, как динамику развития и устойчивость вихревого следа (см. рис. 2). Здесь основную опасность представляет возникновение больших угловых скоростей крена, когда самолёт летит в центре вращающихся с большой скоростью масс воздуха. Большую опасность вызывает также опрокидывающий эффект вихревых структур в том случае, когда летательный аппарат идёт на посадку на аэродром с интенсивным воздушным движением и не имеет достаточного запаса высоты для ликвидации крена или пикирования. В настоящее время в связи с этой проблемой интенсивно изучаются основные аэродинамические закономерности и ищутся способы обнаружения вихрей, а также уменьшения их интенсивности или уничтожения. Проведённые экспериментальные и теоретические исследования показали сравнительно высокую долговечность таких вихревых образований, интенсивность которых существенно зависит от атмосферных условий.

Таким образом, большой практический и теоретический интерес вызывает решение нелинейной задачи обтекания телесных несущих систем, таких, как крыло самолёта, профиль, дирижабль, включая определение интенсивности и формы вихревых структур, образующихся за ними на базе классической системы законов сохранения механики сплошных сред.

В ортогональной криволинейной системе координат  $(q_1, q_2, q_3)$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  с коэффициентами Ламе  $(h_1, h_2, h_3)$  законы сохранения аэрогазодинамики с плотностью среды  $\rho$  и скоростью перемещения  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_1 u + \mathbf{e}_2 v + \mathbf{e}_3 w$  в общем случае имеют вид

- сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (\rho u h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\rho v h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\rho w h_1 h_2) \right] = 0; \quad (1)$$

- сохранения импульса при наличии внешних воздействий  $\mathbf{F}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [(\rho u \mathbf{V} - \mathbf{p}_1) h_2 h_3] + \frac{\partial}{\partial q_2} [(\rho v \mathbf{V} - \mathbf{p}_2) h_1 h_3] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} [(\rho w \mathbf{V} - \mathbf{p}_3) h_1 h_2] \right\} = \rho \mathbf{F}; \quad (2) \end{aligned}$$

- сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[ \left( \rho v_1 \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) - (\mathbf{p}_1, \mathbf{V}) - \frac{\kappa}{A h_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) h_2 h_3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[ \left( \rho v_2 \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) - (\mathbf{p}_2, \mathbf{V}) - \frac{\kappa}{A h_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) h_1 h_3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[ \left( \rho v_3 \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) - (\mathbf{p}_3, \mathbf{V}) - \frac{\kappa}{A h_3} \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) h_1 h_2 \right] \right\} = \rho (\mathbf{F}, \mathbf{V}). \quad (3) \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений в среде

$\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{p}_3 = \{p_{ij}\}$  имеют вид  $p_{ij} = \delta_{ij} \left[ -p + \left( \lambda' - \frac{2\mu}{3} \right) \theta \right] + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ,

где  $\theta = (\nabla, \mathbf{V})$  - локальная характеристика интенсивностей источников массы;  $\delta_{ij}$  - символы Кронекера;  $\lambda'$  - второй коэффициент вязкости;  $\mu = f(p, T)$  - коэффициент динамической вязкости, зависящий как правило от скалярных функций: давления  $p$  и температуры  $T$ ;  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия;  $\kappa$  и  $A$  - коэффициент теплопроводности среды и термический эквивалент работы соответственно;  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензора скоростей деформаций сплошной среды, которые в ортогональной криволинейной системе координат  $(q_1, q_2, q_3)$  можно записать в виде

$$2\varepsilon_{ij} = \left( \mathbf{e}_i, \left( (\mathbf{e}_j, \nabla) \mathbf{V} \right) \right);$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \left( \mathbf{e}_1, ((\mathbf{e}_1, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{v}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{w}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3}; \\
\varepsilon_{22} &= \left( \mathbf{e}_2, ((\mathbf{e}_2, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{w}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1}; \\
\varepsilon_{33} &= \left( \mathbf{e}_3, ((\mathbf{e}_3, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{1}{h_3} \frac{\partial w}{\partial q_3} + \frac{u}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{v}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_2}; \\
2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} &= \left( \mathbf{e}_2, ((\mathbf{e}_1, \nabla) \mathbf{V}) \right) + \left( \mathbf{e}_1, ((\mathbf{e}_2, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{v}{h_2} \right) + \quad (4) \\
&+ \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{u}{h_1} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} - \frac{v}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} - \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2}; \\
2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} &= \left( \mathbf{e}_3, ((\mathbf{e}_1, \nabla) \mathbf{V}) \right) + \left( \mathbf{e}_1, ((\mathbf{e}_3, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{u}{h_1} \right) + \\
&+ \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{w}{h_3} \right) = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} - \frac{u}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} - \frac{w}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1}; \\
2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} &= \left( \mathbf{e}_2, ((\mathbf{e}_3, \nabla) \mathbf{V}) \right) + \left( \mathbf{e}_3, ((\mathbf{e}_2, \nabla) \mathbf{V}) \right) = \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{w}{h_3} \right) + \\
&+ \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{v}{h_2} \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} - \frac{w}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial v}{\partial q_3} - \frac{v}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3}.
\end{aligned}$$

Основная система уравнений сохранения (1 – 3) замыкается уравнением состояния  $\Phi(\rho, p, T) = 0$ , конкретный вид которого связан с физической природой среды.

Необходимо отметить, что начально-краевые задачи для этой системы дифференциальных уравнений сохранения механики сплошных сред относятся к важнейшим и сложнейшим задачам прикладной математики, а их решение позволит существенно изменить способы проведения гидроаэродинамических расчётов, улучшит качество этих расчётов и повысит достоверность результатов, что также может иметь экономическое значение.

Во-вторых, в связи с непрерывным процессом совершенствования математических моделей в последнее время в аэрогидродинамике произошло значительное расширение арсенала математических средств на основе современных достижений в функциональном анализе, направленных на дальнейшее развитие теории уравнений в

частных производных всех типов, которые практически востребованы механикой сплошных сред. Особое внимание уделяется становлению метода граничных интегральных уравнений [11], имеющего достаточно широкий спектр применений [12].

Актуальность рассматриваемых вопросов определяется тем что, несмотря на рост парк ЭВМ и увеличение их производительности, сложность и объем задач, выдвигаемых практикой, опережают прогресс в развитии вычислительной техники. Следовательно, возрастают требования, предъявляемые к вычислительным алгоритмам, и, прежде всего, к их экономичности, универсальности и точности.

В настоящее время наиболее перспективной представляется интегрированная компьютерная технология, основанная на идеологии метода граничных интегральных уравнений. Этот метод позволяет сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности и является одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики, теории поля и векторного анализа. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве разрешимости задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным метод оказался в случаях внутренних и внешних задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами и позволяет непосредственно определять как распределенные так и суммарные аэрогидродинамические характеристики.

Этот подход обладает безусловными преимуществами перед конечно-разностными методами и методом конечных элементов. Именно поэтому в настоящее время данный метод с успехом применяется для разрешения сложных инженерных задач - плоских и пространственных, стационарных и зависящих от времени [12].

Метод граничных интегральных уравнений или метод потенциала для получения решения некоторых дифференциальных уравнений в частных производных уходит своими корнями в классический анализ [14]. В последние годы этот метод получил серьезное развитие в силу своих существенных преимуществ перед классическими методами численной реализации начально-краевых задач механики, в значительной мере востребованных аэрокосмическим комплексом развитых стран мира.

История этого метода, по-видимому, началась в 70-х годах XIX века, когда немецкий математик Карл Готфрид Нейман разработал для решения краевых задач теории потенциала метод арифметического среднего - предвестник метода интегральных уравнений Э.И. Фредгольма [14]. Этот метод основан на последовательном приближении к искомому решению с помощью потенциалов двойного слоя для выпуклых областей. К.Г. Нейман рассмотрел решение задачи

Дирихле для замкнутых выпуклых областей и дал свой метод ее решения (метод Неймана). Им же было дано исследование второй краевой задачи (задача Неймана).

Частные примеры интегральных уравнений начали появляться в первой половине XIX века. Однако интегральные уравнения как ветвь анализа приобрели важное значение после работ итальянского математика Вито Вольтерра и шведского математика Эрика Ивара Фредгольма. В. Вольтерра занимался преимущественно изучением интегральных уравнений с переменными пределами, он рассматривал уравнения этого типа как предельный случай системы алгебраических уравнений, в которых число неизвестных неограниченно растет. В 1902 – 1903 гг. эта же идея была использована Э.И. Фредгольмом для исследования уравнений с постоянными пределами.

Э.И. Фредгольм предложил классический метод доказательства существования решений различных краевых задач, который сводится к решению интегрального уравнения или системы интегральных уравнений.

Теорией интегральных уравнений вслед за Э.И. Фредгольмом занимался Давид Гильберт, который в 1904 г. показал, что решения уравнений Фредгольма можно более строго доказать путем предельного перехода на базе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом слагаемых.

Сведение краевой или начально-краевой задачи к граничному интегральному уравнению или к адекватной системе граничных интегральных уравнений позволяет:

- снизить размерность задачи на единицу и рассматривать более сложные классы задач, чем те которые решаются другими методами;
- непосредственно определять неизвестные величины на границах, не вычисляя их во всем пространстве движения;
- определять кинематические и динамические параметры движения внутри области (давление, завихренность, скорость) простым интегрированием по границам области;
- некоторые аэрогидродинамические нелинейные задачи для дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений привести к системе линейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных краевых значений разыскиваемых параметров задачи или функций от них;
- ставить и решать экстремальные задачи, которые невозможно решить ни одним другим методом.

Все это является безусловными преимуществами метода граничных интегральных уравнений перед конечно-разностными методами и методом конечных элементов. Именно поэтому этот метод с успехом используется для решения сложных инженерных задач – плоских и пространственных, стационарных и неустановившихся [12].

Кроме того, развитие летательных аппаратов с вертикальным и укороченным взлётом и посадкой, а также дирижаблей и высокоскоростных транспортных средств требует разработки более строгого подхода к решению задач пространственного обтекания тел сложной конфигурации [15]. Принципиальная и определяющая роль здесь принадлежит интегральным представлениям решений соответствующих начально-краевых задач на базе развитых обобщений векторно-тензорного анализа [16 - 19]

На этой основе должны быть тщательно пересмотрены многие приближенные методы, лежащие в основе классической аэрогидродинамики (линеаризация граничных условий, метод малых возмущений, концепция плоского жёсткого следа в плоскости проекции крыла и т.д.).

В аэродинамике сложных несущих поверхностей на базе систематического использования метода граничных интегральных уравнений и вариантов численной реализации получены распределённые и суммарные нелинейные аэродинамические характеристики несущих форм, плоских и пространственных, изучены процессы, которые сопровождают отрыв потока, формирование и устойчивость вихревых образований.

В классе линеаризованных задач аэродинамики развит метод граничных интегральных уравнений в целях определения нелинейных аэродинамических характеристик струйного профиля, расположенного также и вблизи поверхности раздела (рис. 4).

Интерес, проявляемый к этому газодинамическому способу увеличения подъемной силы крыла, обуславливается, с одной стороны, стремлением решить важную проблему уменьшения взлетно-посадочных дистанций и скоростей современных самолетов, а с другой – возможностями, появившимися в связи с применением в авиации достаточно мощных реактивных двигателей.

Особое внимание уделяется обобщению существующих методов теории потенциала на решение нелинейных задач, обусловленных как большими углами атаки, так и значительными отклонениями управляющей струи от направления хорды профиля. Построена математическая модель обтекания расположенного вблизи поверхности раздела тонкого профиля с вязкой струей, вытекающей без перемешивания с внешним потоком из задней кромки, потенциальным потоком несжимаемой жидкости [20]. Поверхность раздела моделируется зеркально отображенной системой.

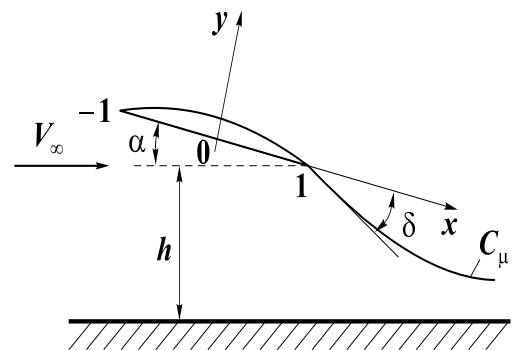


Рисунок 4 – Реактивный телесный профиль вблизи поверхности раздела

Получена адекватная поставленной задаче система граничных интегральных уравнений. По-видимому, впервые в аэрогидродинамических исследованиях решение краевой задачи представлено в виде классической линейной комбинации потенциалов простого и двойного слоев. Это позволило корректно выполнить граничные условия не только на поверхностях профиля и струи, но и на границах контрольного объема. При аналитическом решении задачи о струе-источнике показано, что взамен детальных начальных условий достаточно интегрального условия, роль которого играет задание характеристической величины – начального значения полного потока импульса. В результате взаимодействия внешнего потока и струи на границах последней возникает перепад давления, который выражен через параметры струи. Представление элемента вязкой струи в виде кольцевого сектора позволил получить точное решение нелинейной системы уравнений Навье – Стокса и выяснить необходимую связь между импульсом струи и интенсивностями плотностей поверхностных потенциалов. В связи с наличием сингулярных ядер, построен квадратурно – интерполяционный процесс решения полученной системы граничных интегральных уравнений. Выполнен численный эксперимент относительно исследования сходимости вычислительного процесса. Получены аэродинамические характеристики струйного профиля, которые хорошо совпадают с экспериментальными данными, а также развит метод построения геометрической формы струи и ее влияния на аэродинамические характеристики (рис. 5, 6).

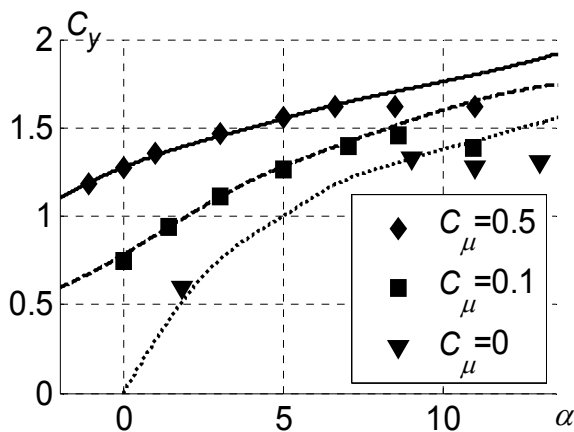


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента подъемной силы  $C_y$  от угла атаки при:  $h = 0,05$ ;  $C_\mu =$ :  
 ◆ - 0,5; ■ - 0,1; ▼ - 0

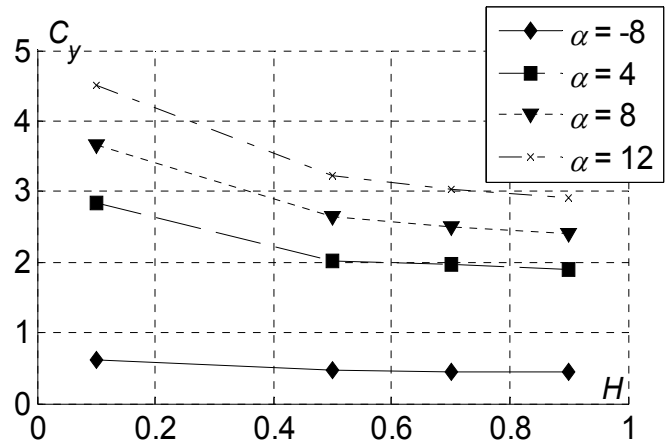


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента подъемной силы  $C_y$  от расстояния до поверхности раздела  $h$  и угла атаки  $\alpha$

До настоящего времени не построено точное решение даже плоской задачи о неустановившемся движении крыла с поверхностью разрыва скоростей, сходящей с задней кромки. Изучение



неустановившихся движений актуально для различных практических вопросов, так как часто именно в самом неустановившемся характере явления заключается его сущность. Наиболее достоверной и апробированной из существующих математических моделей движения жидкости является начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье – Стокса. Однако до настоящего времени не доказано существование и единственность решения даже стационарных задач, связанных с обтеканием плоского тела потоком вязкой несжимаемой среды.

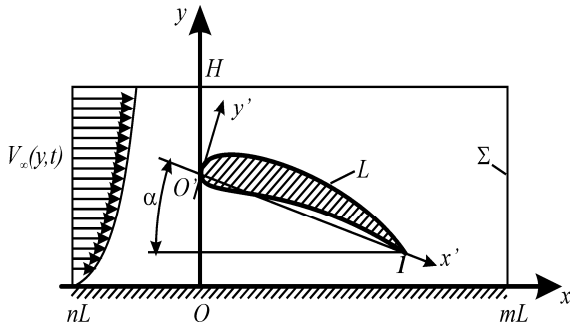


Рисунок 7 – Телесный профиль в нестационарном потоке вязкой жидкости вблизи поверхности раздела

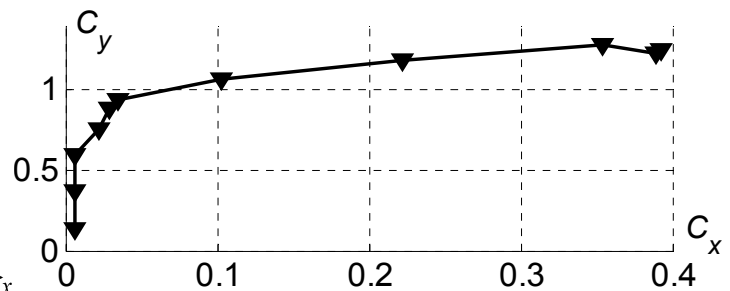


Рисунок 8 – Аэродинамические характеристики профиля NACA – 2312 вблизи поверхности раздела при  $h = 0.5$  и  $t = 0.01$

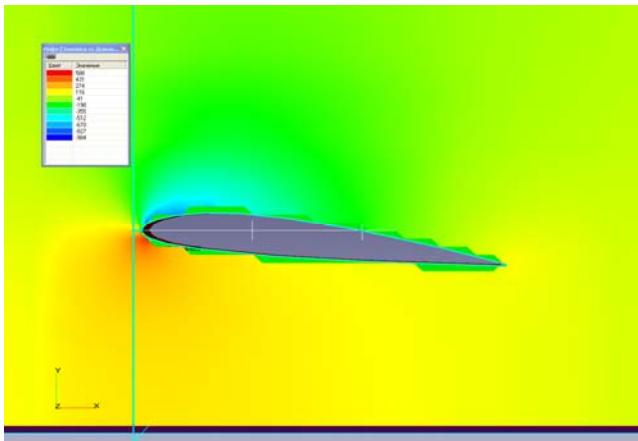


Рисунок 9 – Распределение давления по поверхности профиля, расположенного на расстоянии 0.2 длины хорды от поверхности раздела в момент времени 0.01 с при  $\alpha = 2^0$

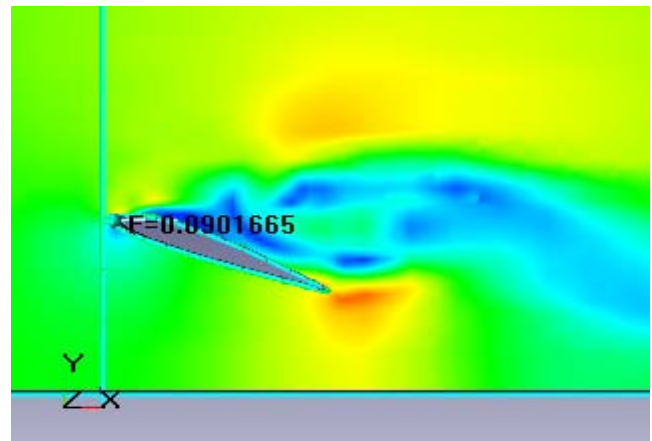


Рисунок 10 – Распределение скалярной завихренности в окрестности профиля, расположенного на расстоянии 0.75 длины хорды от поверхности раздела для разных моментов времени при  $\alpha = 20^0$  и  $t = 0.09$  с

Представлено решение задачи начального этапа обтекания телесного профиля нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости вблизи поверхности раздела (рис. 7) в терминах метода

граничных интегральных уравнений [21, 22] в целях определения суммарных (рис. 8) и распределённых аэродинамических характеристик (рис. 9, 10). Таким образом, в плане совершенствования идеологии вычислительной аэрогидродинамики достигнуто развитие метода граничных интегральных уравнений на класс начально-краевых задач, связанных с начальным нестационарным процессом формирования аэродинамических характеристик при обтекании телесного профиля реальным потоком вязкой среды.

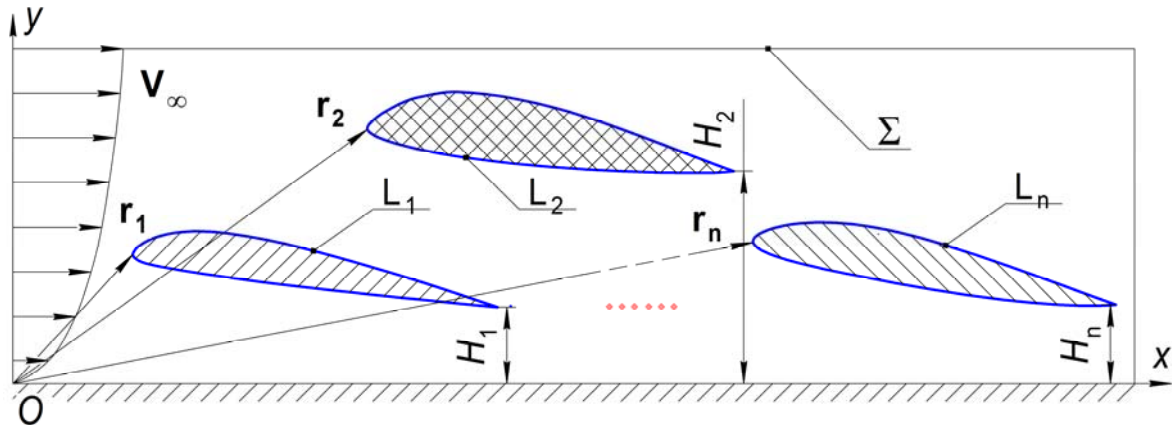


Рисунок 11 – Система телесных профилей в вязком потоке вблизи поверхности раздела:  $L_1, \dots, L_n$  – границы профилей;  $\Sigma$  – граница контрольной области;  $H_1, \dots, H_n$ ;  $r_1, \dots, r_n$  – координаты ориентации и расположения профилей;  $V_\infty$  – вектор скорости набегающего потока

Особый интерес вызывает исследование аэродинамических характеристик несущих систем с развитой механизацией (см. рис. 1). В этом направлении получены интегральные представления решений задачи обтекания произвольной системы аэродинамических профилей телесной формы реальным потоком несжимаемой среды (рис. 11). В связи с возможным присутствием плоской поверхности раздела на режимах взлёта – посадки самолёта поле скоростей набегающего потока  $V_\infty$  считается существенно завихренным. Необходимо подчеркнуть, что современные исследования проблемных и востребованных задач механики сплошных сред и, в частности, аэрогидродинамики опираются на развитые аппараты функционального и векторно-тензорного анализов, что в полной мере эффективно эксплуатируется и способствует развитию численных методов решения всего спектра востребованных задач аэрогидромеханики [3, 4, 18, 19, 24]. Применение функционального анализа в механике жидкости и газа обусловлено отражением того факта, что реально, как правило, невозможно измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь её средние значения в малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника обобщённых функций служит удобным и

адекватным аппаратом для описания распределений различных физических величин.

Хорошо известно, что наиболее достоверной и апробированной математической моделью движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье – Стокса (частный случай системы законов сохранения (1 – 3)), которая в стационарном случае обтекания состоит из системы уравнений сохранения массы и импульса:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0; \quad (5)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (6)$$

где в плоском случае течения в декартовом базисе  $\mathbf{V} = iu + jv$  – вектор скорости потока среды;  $p$  – внутреннее гидростатическое давление внутри среды;  $\rho$  – плотность среды;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – коэффициент кинематической вязкости, а  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

Известно, что дифференциальный закон сохранения импульса (6) можно представить в консервативной форме

$$\left( \nabla, \left( \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} + \nu [\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] \right) \right) = 0. \quad (7)$$

Здесь необходимо выделить тот классический факт, что векторы скорости  $\mathbf{V}$  и завихренности  $\mathbf{\Omega}$  являются решениями основной задачи векторного анализа [14, 18]:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = q; \quad (\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0, \quad (8)$$

где  $q$  – интенсивность возможных источников/стоков массы и параметров энергетической механизации.

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной системы законов сохранения механики сплошных сред даже в простейшем случае. Тем не менее, современное развитие математической физики, основанное на методе граничных интегральных уравнений в применении к краевым задачам механики, и, в первую очередь, аэрогидродинамики, позволяют получать аналитические решения определённых классов нелинейных задач в виде интегральных представлений решений. В простейшем случае движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости при отсутствии источников массы в области имеем интегральное представление, например, вектора скорости из (8):

$$\mathbf{V} = \oint_{\Sigma L_i + \Sigma} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}, \Gamma \right) + \left( [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{V}]], \Gamma \right) \right\} d(\sigma + l) - \oint_{\Sigma L_i + \Sigma} \left( \mathbf{V}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d(\sigma + l), \quad (9)$$

где контурные интегралы в этом представлении допускают численную реализацию в силу их принадлежности к классу сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью [11]. В представлении (9) на границах области исследования скорость должна быть задана, а дифференциальные характеристики определяются обобщенными векторными потенциалами закона сохранения импульса (7) [18].

Здесь тензор  $\Gamma = \mathbf{l}\varphi - [\mathbf{l}, \mathbf{k}\psi]$ , а функции  $\varphi$  и  $\psi$  – сопряжённые аналитические функции – известные решения уравнения Лапласа:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \quad \psi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что этот тензор является консервативным и потенциальным:

$$(\nabla, \Gamma) = 0, \quad [\nabla, \Gamma] = 0. \quad (11)$$

Кроме того, на основании развитого аппарата векторно-тензорного анализа можно утверждать [18, 19], что тензор  $\Gamma$  является фундаментальным решением дифференциального оператора второго порядка:

$$\nabla(\nabla, \Gamma) = \Delta \Gamma + [\nabla, [\nabla, \Gamma]] = \mathbf{l} \Delta \varphi. \quad (12)$$

В плане исследования аэродинамических характеристик пространственных несущих систем (рис. 12, 13) создан корректный с математической точки зрения метод решения краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости в практическом диапазоне критериев подобия.

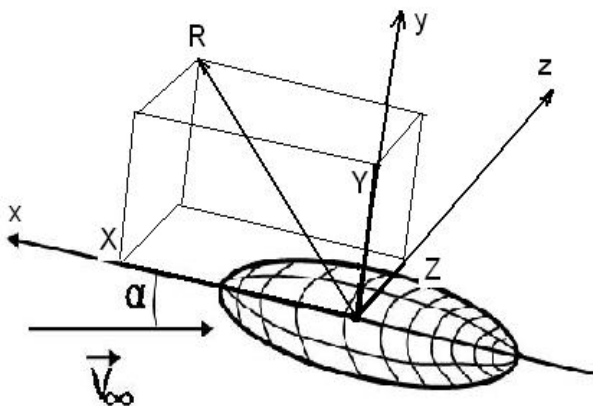


Рисунок 12 – Силы, действующие на тело

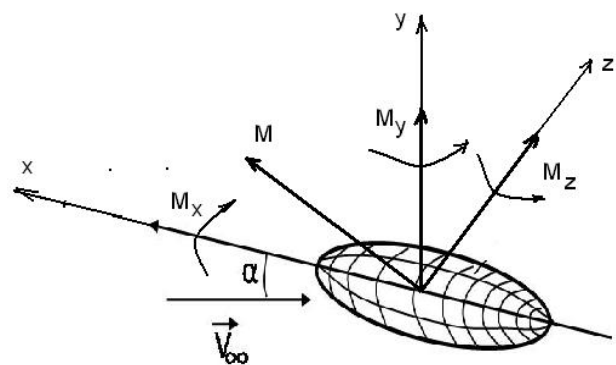


Рисунок 13 – Моменты, действующие на тело

Впервые построены интегральные представления решений пространственных нелинейных краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, например, для вектора скорости:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \iiint_{(\tau)} \left\{ (\nabla q, \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)) \right\} d\tau - \iint_{(S)} \left\{ \left( \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} + [\mathbf{n}, \mathbf{\Omega}] \right), \Gamma(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right) - \left( \mathbf{V}, \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial n} + [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]] \right) \right) \right\} dS. \quad (13)$$

Предельным переходом выполнено сведение пространственных краевых задач динамики вязкой несжимаемой жидкости к системе адекватных граничных интегральных уравнений; исследованы дифференциальные свойства ядер потенциалов. В отличие от плоского случая здесь,  $\Gamma = I\varphi - [I, \mathbf{G}]$ , где  $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  является фундаментальным решением трёхмерного уравнения Лапласа, а вектор  $\mathbf{G} \in C^2(E)$  определяется условием консервативности тензора  $\Gamma$ :

$$(\nabla, \Gamma) = 0, \quad (14)$$

так как по определению тензор является консервативным тогда, когда его дивергенция равна нулю.

В целях численной реализации метода граничных интегральных уравнений развит метод триангуляции (рис. 14) на широкий класс поверхностей второго порядка и построены соответствующие квадратурно-интерполяционные процессы приближенного вычисления интегралов типа потенциалов [27].

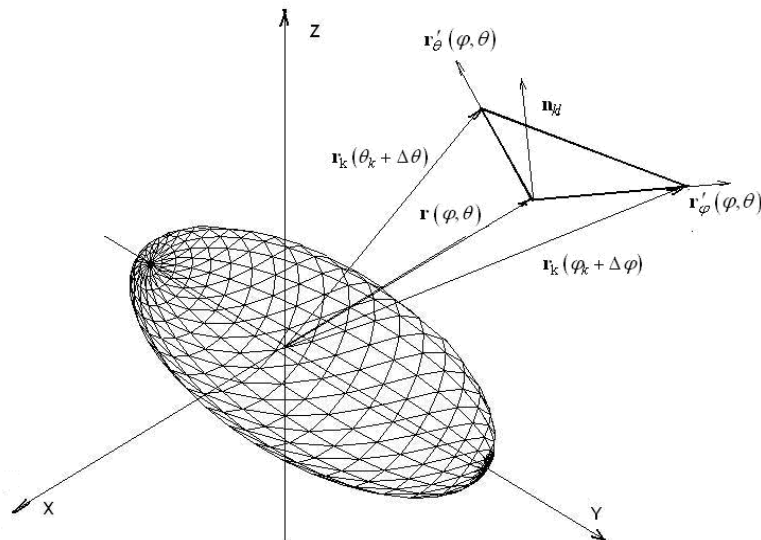


Рисунок 14 – Трёхосный эллипсоид с координатными линиями и касательными векторами в базовой системе координат

Численным экспериментом доказана сходимость вычислительного процесса как по количеству элементов разбиения триангулированных несущих поверхностей (см. рис. 14), так и по параметрам контрольной поверхности.

Впервые вычислены распределенные и суммарные аэрогидродинамические характеристики эллипсоидальных несущих систем в потоке вязкой несжимаемой жидкости в широком диапазоне умеренных значений параметров подобия и геометрически – топологических характеристик исследуемых тел (рис.15, 16), которые вполне соответствуют известным результатам [23, 26].

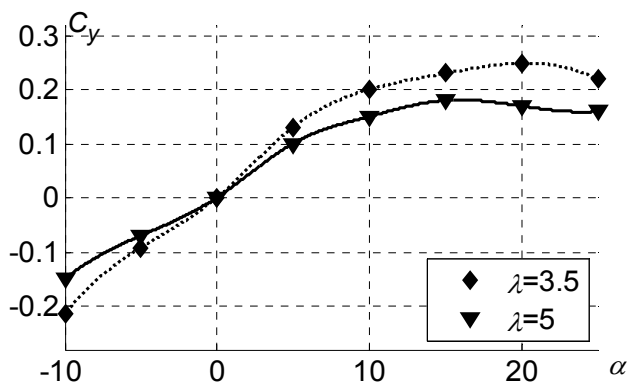


Рисунок 15 – Зависимость коэффициента  $C_y$  от угла атаки эллипсоида вращения при различных удлинениях  $\lambda = c/a$  и  $Re = 4,9 \cdot 10^6$

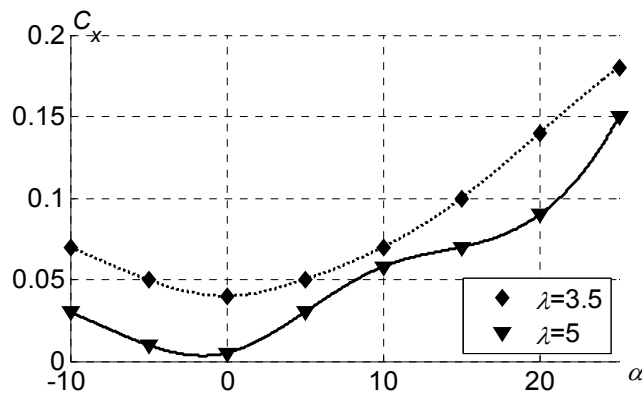


Рисунок 16 – Зависимость коэффициента  $C_x$  от угла атаки эллипсоида вращения при различных удлинениях  $\lambda = c/a$  и  $Re = 4,9 \cdot 10^6$

Представлены рекомендации в плане перспективного аэродинамического проектирования высоконесущих систем с оптимальными характеристиками и необходимо особо подчеркнуть актуальность развития дирижаблестроения.

#### Список использованных источников

1. Аэродинамика и динамика полёта магистральных самолётов [Текст] / под ред. академика РАН Г.С. Бюшгенса. – Изд. отдел ЦАГИ, Авиа-издательство КНР. Москва – Пекин, 1995. – 772.
2. Авиационные правила. Ч. 25. Нормы лётной годности самолётов транспортной категории [Текст] – Межгосударственный авиационный комитет, 1994. – 322 с.
3. Темам, Р. Уравнение Навье – Стокса [Текст] / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
4. Galdi, G. P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations [Текст] / G. P. Galdi. – New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. – 1018 p.
5. Бабенко, К.И. Основы численного анализа [Текст] / К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1986. – 876 с.

6. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред [Текст] / О.М. Белоцерковский. - М.: Наука, 1984. – 519 с.
7. Hall, M.G. Computational Fluid Dynamics. A Revolutionary Force in Aerodynamics [Текст] // AIAA Paper 81–1014, California, 1981. – 238 p.
8. Viviand, H., Lecomte, C. Computational Fluid Dynamics in France [Текст] // AIAA 8th. Comput. Fluid Dyn. Conf. – 1967. – Collect. Techn. Pap. – P. 336–351.
9. Schmidt, W. Computational Fluid Dynamics in West Germany [Текст] // AIAA 8th. Com. Fluid Dyn. Conf. – 1987. – Collect. Technol. Pap. – P. 322–335.
10. Kulter, P., Steger, J.L., Bailey, F.R. Status of Computation Fluid Dynamics in the United States [Текст] // AIAA 8th. Comput. Fluid Dyn. Conf. – 1988. – P. 375–396.
11. Мазья, В.Г. Граничные интегральные уравнения [Текст] / В.Г. Мазья / Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления – М.: ВИНТИ, 1988. – Т. 27. – С. 131 – 228.
12. Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics, ed. T.A. Cruse, F.J. Rizso [Текст] – ASME. 1975. – 218 p.
13. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде [Текст] / Н.Н. Беляев, М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
14. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики [Текст] / Н.М. Гюнтер. - М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.
15. Крашаница, Ю.А. Трёхмерное обтекание телесных несущих систем реальным потоком несжимаемой жидкости [Текст] / Ю.А. Крашаница, N. Tuan // Вісті Академії інженерних наук України. Машинобудування та прогресивні технології. Спец. випуск. - №3(33). – 2007. - С. 180 – 184.
16. Крашаница, Ю.А. Общие интегральные представления решений полной системы уравнений Навье – Стокса [Текст] / Ю.А. Крашаница, N. Tuan, Fayad A. Shalal // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Спец. выпуск. Новые технологии в машиностроении: сб. науч. тр. – Вып. 3 (54). – 2008. - С.128-135.
17. Krashanitsa, Yu. A. Development of hydrodynamic potentials theory and the method of boundary-integral equations in hydrodynamics problems [Текст] // International Russian-American Scientific Journal "Actual problems of aviation and aerospace systems", Kazan-Daytona Beach, №2(37), v.18, 2013.- Pp. 56-63.
18. Крашаница, Ю.А. Теория обобщённых гидродинамических потенциалов и метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах гидродинамики [Текст] / Ю.А. Крашаница. – К.: Наук. думка, 2013. – 215 с.

19. Крашаница, Ю.А., Пен, Юе. Некоторые обобщения операций векторно-тензорного анализа [Текст] / Ю.А. Крашаница, Ю. Пен // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – Т. 2/109 . – С. 29–32.

20. Крашаница, Ю.А. Нелинейная задача о тонком профиле со струйным закрылком [Текст] / Ю.А. Крашаница, Ф. Мохаммед // *Авиационно-космическая техника и технология*. – Вып. 19. X.: 2003. – С. 28 – 33.

21. Крашаница, Ю.А. О численной реализации начально-краевой задачи движения телесного профиля в многосвязной области в вязком потоке [Текст] / Ю.А. Крашаница, П.А. Комзынский, Ф.А. Shalal // *ВІСТІ Академії інженерних наук України*. – *Машинобудування та прогресивні технології*. Спеціальний випуск, № 3(33)/ 2007. – С.196 – 201.

22. Shalal, Fayad. A. Численная реализация начально-краевой задачи Озеена движения телесного профиля вблизи поверхности раздела [Текст] / Ф.А. Shalal // *Авиационно-космическая техника и технология*. № 5(52). – 2008. – С. 45-53.

23. Gao, X.W. A boundary-domain integral equation method in viscous fluid flow [Текст] / X.W. Gao / – Cambridge: *Int. J. Numer. Method Fluids*, 45, 2004. – P. 463 – 484.

24. Wilkinson, D.H. A Numerical Solution of the Analysis and Design Problems for the Flow Past One or More Aerofoil's or Cascades [Текст] / D.H. Wilkinson / – London: *Aeronautical Research Council R&M 3545*, 1967.

25. Крашаница, Ю.А. Обобщённые операции векторно-тензорного анализа, интегральные представления решений плоских задач обтекания в ограниченном потоке вязкой среды [Текст] / Ю.А. Крашаница, Пен Юе // *Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та*. – Вып. 3(50) – Херсон: ХНТУ, 2014. – С. 316 – 321.

26. Fisher, T.M. A boundary integral method for the numerical computation of the forces exerted on a sphere in viscous Incompressible flows near a plane wall [Текст] / *ZAMP*, 1987, 38, № 3. Pp. 339-365.

27. Крашаница, Ю.А. Метод триангуляции в численной реализации пространственных краевых задач динамики вязкой жидкости [Текст] / Ю.А. Крашаница, М.Т. Нго // *Вісті Академії інженерних наук України*. Спец. Випуск. *Машинобудування та прогресивні технології*. – 2009 – № 1(38). – С. 158 – 161.

*Поступила в редакцию 30.10.2014.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Амброжевич,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*