УДК 539.3 А.И. Соловьев, канд. физ.-мат. наук

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Имеется лишь небольшое число публикаций, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство связано с существенными математическими трудностями построения эффективных методов точной реализации граничных условий исходных краевых задач.

Актуальность соответствующих исследований для инженерных применений определяется тем, что в вопросах прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи отверстий, разрезов (трещин), включений и т.д. Получение достоверной и полной информации о распределении напряжений в указанных локальных зонах непосредственно связано с использованием аналитических методов решения краевых задач теории упругости. В обзорных статьях [1, 2] с достаточной полнотой представлена история проблемы исследования закономерностей напряженного состояния в анизотропных телах.

Предлагаемый в данной работе аналитический подход основан на представлении общих решений уравнений равновесия в напряжениях и перемещениях через две гармонические функции [3, 4] и использовании соотношений между базисными гармоническими функциями в декартовых и эллиптических системах координат. Реализация граничных условий основных краевых задач приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженного состояния вблизи концентраторов напряжений. В предельном случае, когда полуплоскость ослаблена поперечным разрезом, удается получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности нормальных напряжений.

Пусть δ_1, δ_2 (δ_j>0) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2+\delta_2^2=\omega=\frac{E_1}{G_{12}}-2\nu_{12};\ \delta_1^2\delta_2^2=\gamma=\frac{E_1}{E_2}\qquad \left(\omega>0,\omega^2-4\gamma\geq 0\right),$$

где $E_1=E_x$, $E_2=E_y$ – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей x и y; $G_{12}=G_{xy}$ – модуль сдвига в плоскости Oxy; $\nu_{12}=\nu_{xy}$ – коэффициент Пуассона. В силу симметрии этих формул относительно δ_1, δ_2 имеем

$$\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4\gamma}}{2}}\ \text{ либо }\ \begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{\omega\mp\sqrt{\omega^2-4\gamma}}{2}}.$$

Частные решения двумерных однородных уравнений равновесия ортотропных в осях x и y пластин представим в виде [3, 4]

$$\tau_{xy}^{(j)}=-\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial y}=-a\frac{\partial I_j}{\partial y_j},\ \sigma_x^{(j)}=-a\delta_j\frac{\partial I_j}{\partial x},\ \sigma_y^{(j)}=\frac{a}{\delta_j}\frac{\partial I_j}{\partial x}=-\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)}; \tag{1}$$

$$u_x^{(j)}=-\frac{a(\delta_j^2+\nu_{12})}{\delta_j E_1}I_j,\ u_y^{(j)}=\frac{a(\delta_{3-j}^2+\nu_{12})}{E_1}\int\frac{\partial I_j}{\partial x}dy_j\ \text{(j=1, 2)}, \tag{2}$$

где $I_j=I_j(x,y_j)$ – гармонические функции переменных $x,y_j=\delta_j y$; a – размерный параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. Заметим, что в формулах (2) I_j и $\int\frac{\partial I_j}{\partial x}dy_j$ – сопряженные гармонические функции переменных x,y_j.

Положим

$$\tau_{xy}=\tau_{xy}^{(1)}+\tau_{xy}^{(2)},\ \sigma_x=\sigma_x^{(1)}+\sigma_x^{(2)},\ \sigma_y=\sigma_y^{(1)}+\sigma_y^{(2)};\ u_x=u_x^{(1)}+u_x^{(2)},\ u_y=u_y^{(1)}+u_y^{(2)}. \tag{3}$$

При $\delta_1\neq\delta_2$ $(\omega^2\neq 4\gamma)$ представления (3) компонент тензора напряжений и вектора перемещений являются общими (функции I_j линейно независимы). В случае $\delta_1=\delta_2=\delta$ $(\omega^2=4\gamma)$ функции I_1, I_2 образуют линейно зависимую систему и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции I_1), либо в исходной краевой задаче $(\delta_1\neq\delta_2)$ совершить предельный переход $\delta_2\to\delta_1=\delta$.

Пусть $\langle x,y\rangle$, $\langle\xi,\theta\rangle$ – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями

$$x=a\,\mathrm{sh}\xi\sin\theta,\ y=a\,\mathrm{ch}\xi\cos\theta\quad (a>0, 0\le\xi<\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi). \tag{4}$$

Уравнение $\xi=\xi_0$=const задает вытянутый вдоль оси Oy эллипс

$$\frac{x^2}{(a\,\mathrm{sh}\xi_0)^2}+\frac{y^2}{(a\,\mathrm{ch}\xi_0)^2}=1. \tag{5}$$

При $\delta_1\neq\delta_2$ каждую из гармонических функций I_j (j=1, 2) будем рассматривать как функцию эллиптических координат ξ_i, θ_i, определяемых формулами

$$x_j = x = a_j \operatorname{sh}\xi_j \sin\theta_j,\ y_j = \delta_j y = a_j \operatorname{ch}\xi_j \cos\theta_j\ (a_j > 0, 0 \le \xi_j < \infty, 0 \le \theta_j \le 2\pi). \quad (6)$$

Уравнение $\xi_j = \xi_{j0} = \text{const}$ (j=1, 2) задает эллипс

$$\frac{x_j^2}{(a_j \operatorname{sh}\xi_{j0})^2} + \frac{y_j^2}{(a_j \operatorname{ch}\xi_{j0})^2} = \frac{x^2}{(a_j \operatorname{sh}\xi_{j0})^2} + \frac{(\delta_j y)^2}{(a_j \operatorname{ch}\xi_{j0})^2} = 1, \quad (7)$$

совпадающий с исходным эллипсом (5) при условии, что

$$a_j \operatorname{sh}\xi_{j0} = a \operatorname{sh}\xi_0,\ a_j \operatorname{ch}\xi_{j0} = \delta_j a \operatorname{ch}\xi_0\ (j=1, 2). \quad (8)$$

Тогда из соотношений (4), (6), (8) следует, что на границах $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ эллиптических областей $0 \le \xi < \xi_0$, $0 \le \xi_j \le \xi_{j0}$; $\xi_0 < \xi < \infty$, $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$ выполняются равенства

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \quad (9)$$

Коэффициенты Ляме эллиптических систем координат $\langle\xi, \theta\rangle$, $\langle\xi_j, \theta_j\rangle$ имеют вид

$$H_\xi = H_\theta = ah,\ h = \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\theta};\ H_{\xi j} = H_{\theta j} = a_j h_j,\ h_j = \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_j - \cos^2\theta_j},$$

а направляющие косинусы единичных внешних нормалей $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$, $\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$ к границам (5), (7) эллиптических областей $\xi_0 < \xi < \infty$, $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$ определяются формулами

$$n_x = -\frac{\operatorname{ch}\xi_0 \sin\theta}{h_0},\ n_y = -\frac{\operatorname{sh}\xi_0 \cos\theta}{h_0};\ n_x^{(j)} = -\frac{\operatorname{ch}\xi_{j0} \sin\theta_j}{\delta_j h_{j0}},\ n_y^{(j)} = -\frac{\operatorname{sh}\xi_{j0} \cos\theta_j}{h_{j0}};$$

$$h_0 = \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi_0 - \cos^2\theta},\ h_{j0} = \sqrt{(\delta_j^{-1} \operatorname{ch}\xi_{j0})^2 \sin^2\theta_j + \operatorname{sh}^2\xi_{j0} \cos^2\theta_j}. \quad (10)$$

Из равенств (8), (9) следует, что на граничных линиях $\xi = \xi_0$, $\xi_j = \xi_{j0}$ выполняются соотношения

$$a_1 h_{10} = a_2 h_{20} = a h_0,\ n_x^{(j)} = n_x,\ n_y^{(j)} = n_y\ (j=1, 2). \quad (11)$$

Если на контуре (границе) пластины задан вектор сил $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$, то его проекции на оси декартовой системы координат выражаются формулами $F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$, $F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$. Найдем проекции $F_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} n_x^{(j)} + \tau_{xy}^{(j)} n_y^{(j)}$, $F_y^{(j)} = \tau_{xy}^{(j)} n_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} n_y^{(j)}$ векторов сил $\vec{F}_j = F_x^{(j)} \vec{e}_x + F_y^{(j)} \vec{e}_y$ на границах $\xi_j = \xi_{j0}$, соответствующие частным решениям (1). Используя равенства

$$\tau_{xy}^{(j)}=-\frac{a}{a_j h_j^2}\left(\mathrm{sh}\xi_j\cos\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j}-\mathrm{ch}\xi_j\sin\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}\right),$$

$$\sigma_x^{(j)}=-\frac{a\delta_j}{a_j h_j^2}\left(\mathrm{ch}\xi_j\sin\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j}+\mathrm{sh}\xi_j\cos\theta_j\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}\right),$$

$$\sigma_y^{(j)}=-\delta_j^{-2}\sigma_x^{(j)};\ \mathrm{ch}^2\xi_j\sin^2\theta_j+\mathrm{sh}^2\xi_j\cos^2\theta_j=h_j^2,$$

на основании (3), (8) - (11) получаем простые формулы

$$F_x^{(j)}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}}=\frac{1}{h_0}\frac{\partial I_j}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}},\ F_y^{(j)}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}}=-\frac{1}{\delta_j h_0}\frac{\partial I_j}{\partial\theta_j}\Big|_{\xi_j=\xi_{j0}}; \qquad (12)$$

$$F_x\Big|_{\xi=\xi_0}=F_x^{(1)}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}}+F_x^{(2)}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}},\ F_y\Big|_{\xi=\xi_0}=F_y^{(1)}\Big|_{\xi_1=\xi_{10}}+F_y^{(2)}\Big|_{\xi_2=\xi_{20}}. \qquad (13)$$

В предельном случае, когда $\xi_0=0$ ($\xi_{j0}=0$), эллипсы $\xi=\xi_0$, $\xi_j=\xi_{j0}$ вырождаются в один и тот же разрез $x=\pm 0$, $|y|\le a$, причем

$$a_j=\delta_j a,\ h_0=|\sin\theta|. \qquad (14)$$

Базисные гармонические функции в координатных системах $\langle x_j, y_j\rangle$, $\langle\xi_j,\theta_j\rangle$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} e^{\lambda y_j}\sin\lambda x_j=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n(a_j\lambda)\mathrm{sh}n\xi_j\sin n\theta_j \quad (0\le\xi_j<\infty), \\ e^{-n\xi_j}\sin n\theta_j=n\int\limits_0^{\infty}\lambda^{-1}I_n(a_j\lambda)e^{-\lambda y_j}\sin\lambda x_j d\lambda \ \ (y_j>a_j;\ n=1,2,\ldots); \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} e^{\lambda y_j}\cos\lambda x_j=I_0(a_j\lambda)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n(a_j\lambda)\mathrm{ch}n\xi_j\cos n\theta_j \quad (0\le\xi_j<\infty), \\ e^{-n\xi_j}\cos n\theta_j=n\int\limits_0^{\infty}\lambda^{-1}I_n(a_j\lambda)e^{-\lambda y_j}\cos\lambda x_j d\lambda \ \ (y_j>a_j;\ n=1,2,\ldots), \end{cases} \qquad (16)$$

где $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя; (j=1, 2).

Метод получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложен в работе [5].

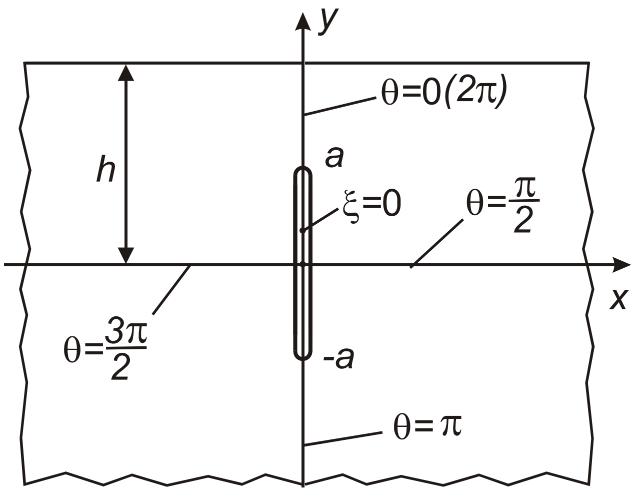
Разложения (15), (16) в сочетании с методом Фурье и представлениями (1)-(3), (12), (13) позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для ортотропной полуплоскости $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<h$ ($h>a$), ослабленной эллиптическим отверстием$0 \le \xi < \xi_0$, в частности разрезом (трещиной) $\xi = 0$ ($x = \pm 0, -a < y < a$).

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для полубесконечной ортотропной пластины $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \mathrm{h}$ ($\mathrm{h} > a$), ослабленной поперечным разрезом $x = \pm 0, -a < y < a$ (рис. 1). Пусть берега этого разреза растягиваются равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности $\sigma_0 = \mathrm{const}$ ($\sigma_0 > 0$), а граничная линия $y = \mathrm{h}$ свободна от внешних усилий. В силу симметрии задачи по координате x достаточно удовлетворить граничным условиям

$$F_x\big|_{\xi=0} = \sigma_0,\ F_y\big|_{\xi=0} = 0\ (0 \le \theta < \pi);\ \sigma_y\big|_{y=\mathrm{h}} = 0,\ \tau_{xy}\big|_{y=\mathrm{h}} = 0\ (0 \le x < \infty), \quad (17)$$

а гармонические функции I_j (j=1, 2) выбрать в виде суммы

$$\mathrm{I}_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n^{(j)} e^{-n\xi_j} \sin n\theta_j + \int_0^{\infty} \mathrm{B}_j(\lambda) e^{\lambda y_j} \sin \lambda x_j \, d\lambda \ (x_j = x). \quad (18)$$



Геометрия пластины

Используя теперь представления (1), (3), (12), (13) и равенства (9), (14), на основании (15), (17), (18) имеем следующие связи между коэффициентами $A_n^{(j)}$ и плотностями $\mathrm{B}_j(\lambda)$:

$$\frac{A_n^{(1)}}{\delta_1} + \frac{A_n^{(2)}}{\delta_2} = 0 \qquad \left(A_n^{(1)} = -\frac{\delta_1}{\delta_2} A_n^{(2)} \right);$$

$$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = 2\int_0^{\infty} [\mathrm{B}_1(\lambda)\mathrm{I}_n(\delta_1 a\lambda) + \mathrm{B}_2(\lambda)\mathrm{I}_n(\delta_2 a\lambda)]\, d\lambda + \bar{g}_n;\ \bar{g}_1 = -\sigma_0,\ \bar{g}_n = 0\ (n = 2, 3, \ldots);$$

$$\lambda[\mathrm{B}_1(\lambda)e^{\delta_1 \mathrm{h}\lambda} + \mathrm{B}_2(\lambda)e^{\delta_2 \mathrm{h}\lambda}] = \sum_{k=1}^{\infty} k[A_k^{(1)}\mathrm{I}_k(\delta_1 a\lambda)e^{-\delta_1 \mathrm{h}\lambda} + A_k^{(2)}\mathrm{I}_k(\delta_2 a\lambda)e^{-\delta_2 \mathrm{h}\lambda}];$$

$$\lambda[\delta_2 \mathrm{B}_1(\lambda)e^{\delta_1 \mathrm{h}\lambda} + \delta_1 \mathrm{B}_2(\lambda)e^{\delta_2 \mathrm{h}\lambda}] = -\sum_{k=1}^{\infty} k[\delta_2 A_k^{(1)}\mathrm{I}_k(\delta_1 a\lambda)e^{-\delta_1 \mathrm{h}\lambda} + \delta_1 A_k^{(2)}\mathrm{I}_k(\delta_2 a\lambda)e^{-\delta_2 \mathrm{h}\lambda}].$$

Исключая здесь $A_n^{(1)}$, $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ и полагая $A_n^{(2)}=\dfrac{\delta_2\sigma_0}{\delta_1-\delta_2}x_n$, для нахождения величин x_n получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_n=\sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}x_k+g_n \quad (n=1,2,...); \tag{19}$$

$$d_{nk}=\frac{2k}{(\delta_1-\delta_2)^2}\{(\delta_1+\delta_2)[\delta_1 S_{nk}^{(11)}+\delta_2 S_{nk}^{(22)}]-2\delta_1\delta_2[S_{nk}^{(12)}+S_{nk}^{(21)}]\},$$

$$S_{nk}^{(ij)}=\int_0^{\infty}\lambda^{-1}e^{-(\delta_i+\delta_j)h\lambda}I_n(\delta_i a\lambda)I_k(\delta_j a\lambda)d\lambda;\; g_1=1,\; g_n=0 \quad (n=2,3,...).$$

На основании неравенства Коши-Буняковского для функций

$$f_n^{(i)}(\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta_i h\lambda}I_n(\delta_i a\lambda)\in L_2(0,\infty),\; f_k^{(j)}(\lambda)=\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\delta_j h\lambda}I_k(\delta_j a\lambda)\in L_2(0,\infty)$$

имеем $(f_n^{(i)},f_k^{(j)})^2\le\left\|f_n^{(i)}\right\|^2\left\|f_k^{(j)}\right\|^2$, $\left\|f_n^{(i)}\right\|^2=\int_0^{\infty}[f_n^{(i)}(\lambda)]^2 d\lambda=\int_0^{\infty}\mu^{-1}e^{-2h\mu}I_n^2(a\mu)d\mu$,

$$\left\|f_k^{(j)}\right\|^2=\int_0^{\infty}[f_k^{(j)}(\lambda)]^2 d\lambda=\int_0^{\infty}\mu^{-1}e^{-2h\mu}I_k^2(a\mu)d\mu.$$

С учетом значений интегралов [6]

$$\int_0^a\frac{I_\nu(cx)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}I_{\nu/2}^2\left(\frac{ac}{2}\right),\; \int_0^{\infty}\mu^{-1}e^{-p\mu}I_\nu(c\mu)d\mu=\frac{c^\nu}{\nu}\left(p+\sqrt{p^2-c^2}\right)^{-\nu}$$

получаем последовательно

$$I_n^2(a\mu)=\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{I_{2n}(2\mu x)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\; \left\|f_n^{(i)}\right\|^2=\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\infty}\mu^{-1}e^{-2h\mu}I_{2n}(2x\mu)d\mu=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\int_0^a\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{a^2-x^2}\left(h+\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}}=\frac{a^{2n}}{\pi n}\int_0^1\frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}\left(h+\sqrt{h^2-a^2t^2}\right)^{2n}}<$$

$$<\frac{a^{2n}}{\pi n(h+\sqrt{h^2-a^2})^{2n}}\int_0^1\frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt\le\frac{a^{2n}}{\pi n(h+\sqrt{h^2-a^2})^{2n}}\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$=\frac{a^{2n}}{4n(h+\sqrt{h^2-a^2})^{2n}}=\frac{\varepsilon^{2n}}{4n(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2n}} \quad \left(\varepsilon=\frac{a}{h}<1\right);$$

$$\left\|f_n^{(i)}\right\|<\frac{\varepsilon^n}{2\sqrt{n}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^n},\; \left\|f_k^{(j)}\right\|<\frac{\varepsilon^k}{2\sqrt{k}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^k};$$

$$S_{nk}^{(ij)}=\left(f_n^{(i)},f_k^{(j)}\right)\le\left\|f_n^{(i)}\right\|\left\|f_k^{(j)}\right\|<\frac{\varepsilon^{n+k}}{4\sqrt{nk}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{n+k}}\quad(0<\varepsilon<1).\qquad(20)$$

Поскольку последовательность $\{g_n\}\in\ell_2$, а из оценки (20) следует, что $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty}d_{nk}^2<\infty$ $(0<\varepsilon<1)$, то почти для всех значений $\varepsilon\in(0,1)$ решение бесконечной системы (19) в гильбертовом пространстве числовых последовательностей ℓ_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции.

Используя значения интеграла [6]

$$\int\limits_0^{\infty}x^{-1}e^{-px}I_\mu(bx)I_\nu(cx)dx=$$

$$=\frac{b^\mu c^\nu}{2^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)p^{\mu+\nu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+\nu+2s)}{s!\Gamma(\mu+s+1)}\left(\frac{b}{2p}\right)^{2s}F\left(-s,-\mu-s;\nu+1;\frac{c^2}{b^2}\right)$$

($\Gamma(z)$– гамма-функция, $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса) и равенства [7]

$$F\left(-s,-n-s;k+1;\frac{c^2}{b^2}\right)=\sum_{\ell=0}^{s}\frac{s!(n+s)!k!}{\ell!(s-\ell)!(n+s-\ell)!(k+\ell)!}\left(\frac{c}{b}\right)^{2\ell},$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\quad(\gamma\neq0,\ -1,\ -2,\ \dots;\ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0)$$

при $p=(\delta_i+\delta_j)h, b=\delta_i a, c=\delta_j a, \mu=n, \nu=k, \alpha=-s, \beta=-n-s, \gamma=k+1$, для величин $S_{nk}^{(ij)}$ получаем разложения в ряды по степеням ε

$$S_{nk}^{(ij)}=\frac{\omega_{ij}^k}{(1+\omega_{ij})^{n+k}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+k+2s-1)!}{(1+\omega_{ij})^{2s}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2s}\sum_{\ell=0}^{s}\frac{\omega_{ij}^{2\ell}}{\ell!(k+\ell)!(s-\ell)!(n+s-\ell)!},$$

$$S_{nk}^{(ii)}=\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{n+k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+k+2s-1)!\ (n+k+2s)!}{s!(n+s)!(k+s)!(n+k+s)!}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2s};\quad\omega_{ij}=\frac{\delta_j}{\delta_i}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении нормальных напряжений вблизи концов разреза $\xi=0$ $(x=\pm0, -a<y<a)$ и вычислении соответствующих коэффициентов интенсивности. Используя представления (1), (3), (18) и учитывая, что $\xi_1=\xi_2=\xi$ при $\theta=0$ $(x=0, y>a)$, $\theta=\pi$ $(x=0, y<-a)$,после некоторых простых операций получаем асимптотические разложения

$$\sigma_x\Big|_{\theta=0}=\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\xi}\sum_{n=1}^{\infty} n x_n e^{-n\xi}+O(1)\quad (\xi\to 0\ (x=0, y\to a));$$

$$\sigma_x\Big|_{\theta=\pi}=\frac{\sigma_0}{\mathrm{sh}\xi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x_n e^{-n\xi}+O(1)\ (\xi\to 0\ (x=0, y\to -a));$$

$$\sigma_y\Big|_{\theta=0}\sim\frac{\sigma_x}{\delta_1\delta_2}\Big|_{\theta=0},\ \sigma_y\Big|_{\theta=\pi}\sim\frac{\sigma_x}{\delta_1\delta_2}\Big|_{\theta=\pi};\ \delta_1\delta_2=\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$$

и формулы для вычисления коэффициентов интенсивности нормальных напряжений

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\lim_{\xi\to 0}\left[\sigma_x\sqrt{2(\pm y-a)}\right]_{\theta=\theta^{\pm}}=\sigma_0\sqrt{a}\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^{n-1} n x_n,\ \theta^{\pm}=\begin{Bmatrix}0\\ \pi\end{Bmatrix}. \qquad (21)$$

Оценка (20) гарантирует сходимость рядов в формулах (21).

Решая бесконечную систему (19) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка $O(\varepsilon^6)$, для величин x_n и коэффициентов $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$ получаем значения

$$x_1=1+\frac{(\delta_1+\delta_2)^2+4\delta_1\delta_2}{8(\delta_1+\delta_2)^2}\varepsilon^2+\frac{(\delta_1+\delta_2)^4+\delta_1\delta_2(5\delta_1^2+2\delta_1\delta_2+5\delta_2^2)}{16(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^4+O(\varepsilon^6),$$

$$x_2=\frac{(\delta_1+\delta_2)^2+4\delta_1\delta_2}{32(\delta_1+\delta_2)^2}\varepsilon^3+\frac{3(\delta_1+\delta_2)^4+2\delta_1\delta_2(7\delta_1^2+6\delta_1\delta_2+7\delta_2^2)}{128(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^5+O(\varepsilon^7),$$

$$x_3=\frac{(\delta_1+\delta_2)^4+4\delta_1\delta_2(\delta_1-\delta_2)^2}{128(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^4+O(\varepsilon^6),$$

$$x_4=\frac{(\delta_1+\delta_2)^4+4\delta_1\delta_2(\delta_1^2-10\delta_1\delta_2+\delta_2^2)}{512(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^5+O(\varepsilon^7),$$

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\sigma_0\sqrt{a}\ \left\{1+\frac{(\delta_1+\delta_2)^2+4\delta_1\delta_2}{8(\delta_1+\delta_2)^2}\varepsilon^2\pm\frac{(\delta_1+\delta_2)^2+4\delta_1\delta_2}{16(\delta_1+\delta_2)^2}\varepsilon^3+\right.$$

$$+\frac{11(\delta_1+\delta_2)^4+4\delta_1\delta_2(13\delta_1^2-2\delta_1\delta_2+13\delta_2^2)}{128(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^4\pm$$

$$\left.\pm\frac{7(\delta_1+\delta_2)^4+16\delta_1\delta_2(2\delta_1^2-\delta_1\delta_2+2\delta_2^2)}{128(\delta_1+\delta_2)^4}\varepsilon^5+O(\varepsilon^6)\right\}.$$

В заключение отметим, что разложения (16) позволяют реализовать антисимметричный вариант задачи, а в общем случае разбиение исходной краевой задачи на симметричную и антисимметричную по координате x дает возможность исследовать ее при произвольных граничных условиях на берегах разрезов.

Список использованных источников

1. Космодамианский, А.С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах [Текст] / А.С. Космодамианский // Прикладная механика.– 2002. – Т.38, № 4.– С.21–48.

2. Немиш, Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) [Текст] / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика.– 2000.– Т.36, № 2.– С.3–38.

3. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”. – Вып. 2 (70). – Х., 2012. – С. 117–127.

4. Соловьев, А.И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А.И. Соловьев, А.В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”. – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101–110.

5. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная механика.– 1984. – Т.48, № 6.– С. 973–982.

6. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

7. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Поступила в редакцию 15.12.2014
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков