

## **ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ РАКЕТОНОСИТЕЛЕЙ**

### Введение

Обтекатели ракетоносителей изготавливаются в виде тонких конических или параболических оболочек. Часто эти оболочки изнутри усиливаются стрингерами и шпангоутами. В процессе полета ракет оболочка снаружи обтекается газовым потоком. Подчеркнем, что большую часть полета ракета движется со сверхзвуковой скоростью. Вследствие энергообмена между тонкостенной оболочкой и газовым потоком могут возникать интенсивные автоколебания, которые могут привести к поломкам как обтекателя, так и полезного груза. Экспериментальный анализ обтекателей ракетоносителей показал, что в сверхзвуковом газовом потоке наблюдаются их интенсивные автоколебания. В этой статье исследуются параболические обтекатели ракетоносителей. Предлагается численный подход к определению диапазона динамической неустойчивости состояния равновесия конструкции и, как следствие, возникновения автоколебаний.

Несмотря на широкое применение в технике элементов конструкций, имеющих форму параболических оболочек, исследованиям их колебаний уделялось мало внимания. В [1] приведен обзор работ по теории параболических оболочек. В работе [2] рассматривается пластическое деформирование параболических оболочек. Динамика вращающихся параболических оболочек рассматривается в статье [3], где подробно исследуются области динамической неустойчивости. В работе [4] исследуется динамика оболочек вращения на основании сдвиговой теории. В [5] рассматриваются колебания параболических оболочек. Для анализа параболических оболочек в статье [6] применяется четырехузловой конечный элемент, учитывающий сдвиг.

Существует большое количество публикаций по исследованию цилиндрических оболочек и пластин в сверхзвуковом газовом потоке, что объясняется потребностями ракетно-космической техники. Отличительной особенностью модели давлений сверхзвукового потока, действующего на конструкцию, является простота ее аналитического представления. Динамика цилиндрических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке обсуждается в монографии [7]. В статье [8] исследуются автоколебания панели с учетом ее геометрически нелинейного деформирования.

Для исследования динамики модели конструкции с конечным числом степеней свободы применяется метод продолжения решения по параметру. Хаотическая динамика панели в сверхзвуковом газовом потоке исследуется в [9]. Колебания панели при геометрически нелинейном деформировании описываются уравнениями фон Кармана. Аэроупругие колебания оболочек вращения в сверхзвуковом газовом потоке исследуются в [10]. Обзор результатов, посвященных применению метода конечных элементов для моделирования аэроупругих колебаний тонкостенных конструкций, опубликован в [11].

В этой статье для получения уравнений движения высокой параболической оболочки применяется метод заданных форм, который использует потенциальную и кинетическую энергию конструкции. Перемещения оболочки раскладываются в ряд по собственным формам колебаний, которые определяются из конечноэлементного решения задачи динамики оболочки. Для получения этих форм колебаний используется программный комплекс ANSYS. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания параболоида. Численно исследуется динамическая неустойчивость параболоидов в среде Maple.

### Математическая модель обтекателя

Рассмотрим тонкую параболическую оболочку; сдвигами и инерцией вращения пренебрежем. Для описания деформирования параболоида воспользуемся гипотезами Кирхгофа – Лява [12]. Напряжения и деформации предполагаются малыми; они удовлетворяют закону Гука. Деформируемое состояние срединной поверхности параболоида описываем проекциями перемещений на направления касательных к координатным линиям  $u(\theta, \varphi, t), v(\theta, \varphi, t), w(\theta, \varphi, t)$ , где координаты  $\theta$  и  $\varphi$  описывают положение точек на срединной поверхности (рис. 1). Радиусы кривизн координатных линий находят так [13]:

$$R_{\theta} = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{3/2}}; \quad R_{\varphi} = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (1)$$

где  $R_0$  – радиус кривизны в особой точке оболочки  $\theta = 0$ . Параметр  $\chi$  указывает на форму оболочки вращения; для параболических оболочек  $\chi = -1$ .

Для построения уравнений движения параболической оболочки воспользуемся методом заданных форм [12], в котором используются уравнения Лагранжа. Тогда кинетическую энергию оболочки  $T$  представим следующим образом:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R_\theta R_\phi \sin \theta d\theta d\phi dz, \quad (2)$$

где  $h$  - толщина оболочки;  $\rho$  - плотность материала оболочки.

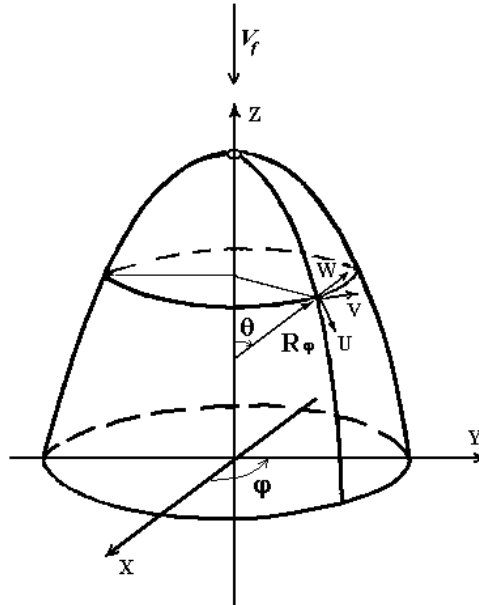


Рисунок 1 — Эскиз параболоида

В статье [14] для расчета собственных форм колебаний низких параболоидов вырезается маленькое отверстие у вершины параболоида. При расчете собственных форм в [14] использовался метод Рэлея–Ритца. В этом случае около вершины параболоида возникает особенность, которая уничтожается вырезом маленького куска параболоида вокруг вершины. Подчеркнем, что с помощью метода Рэлея–Ритца удалось исследовать только низкие параболоиды. В этой статье поставлена задача исследования динамической устойчивости высоких параболоидов. Собственные формы колебаний, по которым проводится разложение перемещений при динамической неустойчивости конструкции, получены методом конечных элементов.

Кинетическую энергию конструкции представим так:

$$T = \frac{\rho h R_0^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\phi. \quad (3)$$

Подчеркнем, что в соотношении (3) интегрирование ведется по площади срединной поверхности оболочки.

Потенциальную энергию упругой деформации оболочки представим так [13]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (4)$$

где  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$  – компоненты тензора деформаций. Напряжения и деформации предполагаются малыми; поэтому они удовлетворяют закону Гука. Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями параболической оболочки так [13]:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \quad (5)$$

где

$$E_1 = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \cos^3 \theta;$$

$$K_1 = \frac{1}{R_0^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^6 \theta - \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + 3u \right) \cos^5 \theta \sin \theta \right];$$

$$E_2 = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cdot \cos \theta + w \cdot \sin \theta \right) \operatorname{ctg} \theta;$$

$$K_2 = \frac{1}{R_0^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \cos \theta - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \operatorname{ctg} \theta \cos^4 \theta \right]; \quad (6)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \cos^3 \theta - v \cdot \cos^2 \theta \sin \theta + w \cdot \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \right);$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{R_0^2} \left[ \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \right) \frac{\cos^4 \theta}{\sin \theta} \right].$$

Окончательно, потенциальную энергию оболочки (4) представим в следующем виде:

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ (E_1 + E_2)^2 - 2(1-\nu) \left( E_1 E_2 - \frac{1}{4} \Omega_1^2 \right) \right] R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \left\{ (K_1 + K_2)^2 - 2(1-\nu)(K_1K_2 - \Omega_2^2) \right\} R_0^2 \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left\{ (E_1K_1 + E_2K_2) + \nu(E_1K_2 + E_2K_1) + (1-\nu)\Omega_1^2\Omega_2^2 \right\} \times \right. \\
& \quad \left. \times R_0 \frac{\sin \theta (1 + \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta} \right] d\theta d\varphi, \quad (7)
\end{aligned}$$

где  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим два вида граничных условий на нижней стороне оболочки. Исследуем жестко заделанную и шарнирно опертую оболочку. Для жестко заделанной оболочки граничные условия имеют следующий вид:

$$u|_{\theta=\theta_2} = v|_{\theta=\theta_2} = w|_{\theta=\theta_2} = \frac{\partial w}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_2} = 0 \quad (8)$$

а для шарнирно-опертой они таковы:

$$u|_{\theta=\theta_2} = v|_{\theta=\theta_2} = w|_{\theta=\theta_2} = M_\theta|_{\theta=\theta_2} = 0 \quad (9)$$

Виртуальную работу аэродинамического давления, действующего на параболическую оболочку, представим так:

$$\delta A = R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \delta w \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta d\varphi, \quad (10)$$

где  $p$  – давление сверхзвукового потока на конструкцию;  $\delta w$  – виртуальное перемещение оболочки. Для описания давления в сверхзвуковом потоке газа применяется уточненная поршневая теория [15]:

$$p = -\xi_1 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + \xi_2 \frac{\partial w}{\partial t} - \xi_3 w \right) \quad (11)$$

где  $\xi_1 = \frac{\rho_f V_f^2}{\beta}$ ;  $\xi_2 = \frac{M^2 - 2}{V_f \beta^2}$ ;  $\xi_3 = \frac{1}{2r\beta}$ ,  $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ ;  $r = R_0 \operatorname{tg}(\theta)$ ;

$V_f$  – скорость потока газа;  $M$  – число Маха;  $r$  – переменный радиус сечения оболочки. Слагаемое  $\xi_3 w$  в соотношении (11) называют поправкой Крумхара. Подчеркнем, что поправка Крумхара зависит от координаты  $\theta$  оболочки. Выражение для виртуальной работы (10) примет вид

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{V_f R_0 \rho_f} \delta A = \quad (12)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \left( R_0 V_f \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{(M^2 - 1)} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{V_f w}{2 \cos^3 \theta \sqrt{M^2 - 1}} \right] \delta w d\theta d\varphi.$$

Для вывода уравнений движения оболочки с конечным числом степеней свободы воспользуемся методом заданных форм [12]. Перемещения  $u(\theta, \varphi, t), v(\theta, \varphi, t), w(\theta, \varphi, t)$  разложим в ряд по формам собственных колебаний так:

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_u} q_n^{(u)}(t) U_n(\theta, \varphi); \\ v(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_v} q_n^{(v)}(t) V_n(\theta, \varphi); \\ w(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{N_w} q_n^{(w)}(t) W_n(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $q^{(u)} = [q_1^{(u)}, \dots, q_{N_u}^{(u)}]$ ;  $q^{(v)} = [q_1^{(v)}, \dots, q_{N_v}^{(v)}]$ ;  $q^{(w)} = [q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}]$  – векторы обобщенных координат.

В этой работе для расчета собственных форм методом конечных элементов применяется программный комплекс ANSYS. Полученные собственные формы удовлетворяют граничным условиям (8) или (9). Поэтому при применении метода заданных форм для получения модели колебаний с конечным числом степеней свободы удовлетворять граничным условиям (8) или (9) не следует.

Для упрощения дальнейшего изложения все обобщенные координаты сгруппируем в один вектор

$$q = [q^{(u)}, q^{(v)}, q^{(w)}] = [q_1, \dots, q_{N_G}],$$

где  $N_G = N_u + N_v + N_w$ .

Теперь составим выражения для обобщенных сил  $Q_n$ , где  $n = 1, \dots, N_G$ . Обобщенные силы  $Q^{(u)}, Q^{(v)}$ , соответствующие обобщенным координатам  $q^{(u)}, q^{(v)}$ , равны нулю. Тогда элементы вектора обобщенных сил  $Q^{(w)}$  представим так:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{R_0 V_f^2 \rho_f} Q_n^{(w)} = \quad (14)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \left( R_0 \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{R_0 (M^2 - 2)}{V_f \sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{w}{2 \cos^3 \theta} \right) W_n(\theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

где  $n = 1, \dots, N_w$ . Разложения (13) введем в (14). Тогда вектор обобщенных сил  $Q^{(w)}$  запишем в следующем матричном виде:

$$Q^{(w)} = K^{(w)} q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)}, \quad (15)$$

где  $C^{(w)}$  – матрица аэродинамического демпфирования;  $K^{(w)}$  – матрица аэродинамической жесткости.

Теперь разложения (13) введем в выражение для кинетической и потенциальной энергии (3, 7) и проинтегрируем. Тогда кинетическая энергия будет иметь вид квадратичной формы обобщенных скоростей, а потенциальная энергия – квадратичной формы относительно обобщенных координат. Эти квадратичные формы в общем случае можно представить так:  $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_{N_G})$ ,  $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_G})$ . Тогда уравнения Лагранжа, описывающие движение оболочки, примут следующий матричный вид:

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{q}^{(u)} + K_{11} q^{(u)} + K_{12} q^{(v)} + K_{13} q^{(w)} &= 0; \\ M_{22} \ddot{q}^{(v)} + K_{21} q^{(u)} + K_{22} q^{(v)} + K_{23} q^{(w)} &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_{33} \ddot{q}^{(w)} + K_{31} q^{(u)} + K_{32} q^{(v)} + K_{33} q^{(w)} + K^{(w)} q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)} = 0,$$

где  $M_{ij}$  – диагональные матрицы масс;  $K_{ij}$  – матрицы жесткости. Из теории оболочек известно [12], что собственные частоты, в формах которых преобладают продольные и крутильные колебания, значительно выше собственных частот, в формах которых преобладают изгибные колебания. Поэтому продольными и крутильными инерционными слагаемыми можно пренебречь. Тогда в уравнениях (16) примем:  $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(v)} = 0$  из первых двух уравнений системы (16) получим следующие матричные соотношения:

$$q^{(u)} = [K_{u,w}] q^{(w)}, \quad q^{(v)} = [K_{v,w}] q^{(w)} \quad (17)$$

Соотношения (17) введем в последнее уравнение (16) и получим уравнения, описывающие линейные колебания оболочки, относительно обобщенных координат поперечных перемещений  $q^{(w)}$ :

$$[M_1] \ddot{q}^{(w)} + [K_*] q^{(w)} + C^{(w)} \dot{q}^{(w)} = 0, \quad (18)$$

где  $[K_*] = [K_{31}] [K_{u,w}] + [K_{32}] [K_{v,w}] + [K_{33}] + [K^{(w)}]$ ;

Итак, исследование динамической неустойчивости параболической оболочки в газовом потоке сведено к анализу устойчивости тривиального состояния равновесия динамической системы (18).

Для исследования динамической неустойчивости тривиального состояния равновесия системы (18) численно определялись характеристические показатели. Подход к расчету характеристических показателей тонкостенных конструкций в газовом потоке подробно рассмотрен в статье [17]. Целью численного анализа является расчет диапазона чисел Маха, в котором состояние равновесия конструкции является неустойчивым. Для этого значения чисел Маха задавались с некоторым шагом и для каждого значения числа Маха рассчитываются характеристические показатели. В результате расчета выделяется область параметров, где наблюдается динамическая неустойчивость конструкции.

### Численный анализ динамической неустойчивости

Проводился численный анализ параболической оболочки в сверхзвуковом газовом потоке со следующими численными значениями параметров:

$$R_1 = 2 \text{ м}; h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, E = 71 \cdot 10^9 \text{ Па}; \nu = 0,3; \rho_f = 1 \text{ кг/м}^3,$$

где  $R_1$  - радиус основания.

На первом этапе исследовались свободные колебания конструкции с двумя различными условиями закрепления. Рассматривались колебания шарнирно-опертой и защемленной по нижнему контуру конструкции. Расчеты проводились программным комплексом ANSYS. Результаты расчетов первых десяти собственных частот представлены в табл. 1. В первом столбце показаны номера собственных частот колебаний. Во втором и третьем столбцах представлены, соответственно, результаты расчетов собственных частот защемленной и шарнирно-опертой с одной стороны оболочки. В этой таблице приведено по две собственные частоты, которые отвечают сопряженным формам колебаний. Две сопряженные формы колебаний имеют одинаковые частоты. Эти формы колебаний сдвинуты в окружном направлении на  $0,5\pi$ .

Теория сопряженных форм колебаний осесимметричных оболочек обсуждается в монографии [18]. Как следует из табл. 1, спектр колебаний параболических оболочек чрезвычайно плотный. Подчеркнем, что вид граничных условий в параболических оболочках практически не влияет на величины собственных частот колебаний.

Теперь численно исследуем динамическую неустойчивость оболочки в сверхзвуковом газовом потоке. Динамические перемещения конструкции раскладывались по собственным формам колебаний (13); они находились из конечно-элементного расчета. Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (16) определялись в результате расчета двойных интегралов от форм колебаний и их производных.



Таблица 1 – Собственные частоты колебаний параболоида, Гц

Номер частоты	Жестко заделанная конструкция	Шарнирно-опертая конструкция
1	26,614	26,599
2	26,622	26,607
3	26,916	26,901
4	26,932	26,917
5	27,445	27,429
6	27,447	27,431
7	28,187	28,171
8	28,198	28,183
9	29,635	29,619
10	29,637	29,62

Отметим, что для чисел Маха  $M < 1$  поршневая теория (11) неприемлема. Поэтому динамическая неустойчивость параболоидов исследуется при  $M > 1$ . Численный анализ динамической неустойчивости проводился в следующем диапазоне  $M$ :  $1,01 \leq M \leq 2$ . Динамика оболочки моделировалась системой (18) с различным числом степеней свободы. Нами численно исследовались системы с 4; 8; 10 и 12 степенями свободы. Для динамических моделей с разным числом степеней свободы наблюдался одинаковый диапазон  $M$  динамической неустойчивости:  $1 < M \leq 1,4142$ . Итак, уже для системы с 4 степенями свободы наблюдалась сходимость полученных результатов. Нами проводился численный анализ динамической неустойчивости как шарнирно-опертых, так и жестко заземленных параболоидов. Для этих видов граничных условий области динамической неустойчивости оказывались одинаковыми.

### Выводы

В статье предложен новый подход к анализу динамической неустойчивости параболических оболочек. В основе подхода лежит совместное применение метода конечных элементов для нахождения собственных форм колебаний параболоидов и анализ динамической неустойчивости методом заданных форм.

При движениях параболических оболочек наблюдаются сопряженные формы колебаний. Они имеют одинаковые частоты. Эти формы колебаний сдвинуты в окружном направлении на  $0,5\pi$ . Спектр колебаний параболических оболочек чрезвычайно плотный. Вид граничных условий в параболических оболочках практически не влияет на величины собственных частот колебаний.

Полученная область динамической неустойчивости наблюдается в параболоидах с различными высотами. Так, найденная область совпадает с диапазоном неустойчивости, который представлен в статье [19]. Вид граничных условий практически не влияет на области параметров, где наблюдается динамическая неустойчивость.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012 - 2016 гг.

#### Список использованных источников

1. Leissa, A. W. Vibrations of shells [Текст] / A. W. Leissa. – Washington: U.S. Government Printing Office, 1973.– 457 p.
2. Dahlberg, C. Strain gradient plasticity analysis of the influence of grain size and distribution on the yield strength in polycrystals [Текст] / C. Dahlberg, J Faleskog // Europ. J. Mech. A.Solids. – 2010.– № 44.– P. 1-16.
3. Gulyaev, V. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies [Текст] / V.I. Gulyaev, I.L. Solovjev , M.A. Belova // Int. J. Solids and Struct. – 2011.– №41.– P. 3565 – 3580.
4. Tornabene, F. Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution [Текст] / F. Tornabene, E. Viola //Europ. J.Mech A/Solids– 2009.–№28.– P. 991 – 1013.
5. Viola, E. Free vibrations of three parameters functionally graded parabolic panels of revolution [Текст] / E. Viola, F. Tornabene // Mech. Res.Comm. –2009.– №36.– P. 587 – 594.
6. Chun, K.S. Hybrid/mixed assumed stress element for anisotropic laminated elliptical and parabolic shells [Текст] / K.S. Chun, S.K. Kassegne, B.K. Wondimu //Fin. Elem.Anal.Des. – 2009. – № 41.– P. 766 – 781.
7. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости [Текст] / В. В.Болотин. – М.: Физматгиз, 1961.– 307 с.
8. Gee, D.J. Numerical continuation applied to panel flutter [Текст] / D.J. Gee // Nonlinear Dynamics .–2000.– №22.– P. 271 – 280.
9. Pourtakdoust, S.H. Chaotic analysis of nonlinear viscoelastic panel flutter [Текст] / S.H. Pourtakdoust, S.A. Fazelzadeh // Nonlinear Dynamics. – 2003.–№32.– P. 387 – 400.
10. Бочкарев, С. А. Панельный флаттер вращающихся круговых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком [Текст] / С.А. Бочкарев, В.П. Матвеев // Вычислительная механика сплошных сред .– 2008.– Т.1, № 3.–С. 25 – 33.
11. Bismarck–Nasr, M. N. Finite elements in aeroelasticity of plates and shells / M. N Bismarck – Nasr //Appl. Mech. Rev.– 1996.– №. 49 (10).– P. 17 – 24.

12. Аврамов, К. В. Нелинейная динамика упругих систем [Текст] / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин.– М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.

13. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек. [Текст] / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1962.– 2-е изд.– 431 с.

14. Free linear vibrations of parabolic shells / M.V. Chernobryvko, K.V. Avramov, V.N. Romanenko, T.J. Batutina, A.M. Tonkonogenko. – Meccanica, 2014. – Vol. 49, No. 8. – P.14 – 21

15. Krumharr, H. The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells [Текст] / H. Krumharr // AIAA J.– 1963.– V.1. – P. 1448 – 1449.

17. Avramov, K. V. Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow [Текст] / K. V. Avramov, E. A. Strel'nikova // Nonlinear Dynamics. – 2012. – P. 1335 – 1354.

18. Кубенко, В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек [Текст] / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. – К.: Наук. думка, 1984. – 200 с.

19. Динамическая неустойчивость обтекателей ракетоносителей в полете [Текст] / М. В. Чернобрывко, К. В. Аврамов, Т. Я. Батутина и др. // Проблемы машиностроения. – 2014. – № 17. – С. 9 – 16.

*Поступила в редакцию 17.11.2014.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*