

## КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ ВИХРОВИХ СИСТЕМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ СХЕМИ «ТАНДЕМ»

### Вступ

Визначення аеродинамічних характеристик (АХ), у тому числі індуктивного опору, літального апарата (ЛА) схеми «тандем» значно складніше за літальний апарат традиційної схеми, для якого теорію крила кінцевого розмаху розроблено детально [1]. Внаслідок взаємодії вихрових систем переднього та заднього крил з'являється так званий опір взаємоіндукції, який визначається наближеними методами, наприклад Прандтля [2; 3].

З початку століття метод Прандтля вдосконалили [4], але недоліками різних аналітичних методів залишаються:

1) використання гіпотези П-подібних кінцевих вихорів (яка є виправданою для традиційної схеми ЛА), від яких реальні вихори значно відрізняються за формою внаслідок взаємодії між собою, що показано у візуальних випробуваннях в аеродинамічній трубі [5]. Наприклад, при близькорозташованих кінцевих вихорах переднього та заднього крил перший помітно відштовхується до площини симетрії, а другий, як мінімум, не наближається до неї (рис. 1, 2). Урахуванням взаємодії вихорів можна пояснити зміну аеродинамічних характеристик моделі ЛА при різних позадвжніх рознесеннях крил та різних кутах поперечного  $V$  [6];

2) крім того, якщо вихор переднього крила проходить близько до поверхні заднього крила, то на ньому виникає розрідження, яке складно врахувати аналітично.

### Постановка задачі

У зв'язку з недоліками аналітичних методів було запропоновано новий підхід до визначення аеродинамічних характеристик ЛА схеми «тандем» з визначенням положення вихрової системи (рис. 3).

Аналітичне визначення положення вихрів з урахуванням їхньої взаємодії є складною задачею. Теоретично однонаправлені (наприклад, за годинниковою стрілкою) вихори відштовхуються (рис. 4), а різнонаправлені – притягуються. Однак усередині реальних вихорів у в'язкому середовищі утворюється розрідження, яке прагне притягнути як одно-, так і різнонаправлені вихори. Врахувати даний ефект теоретично складно, а розрахунок числовими методами потребує збільшення розмірності сітки не лише в області примежового шару, але й в області розташування вільних вихорів, що значно підвищує вимоги до обчислювальних потужностей.

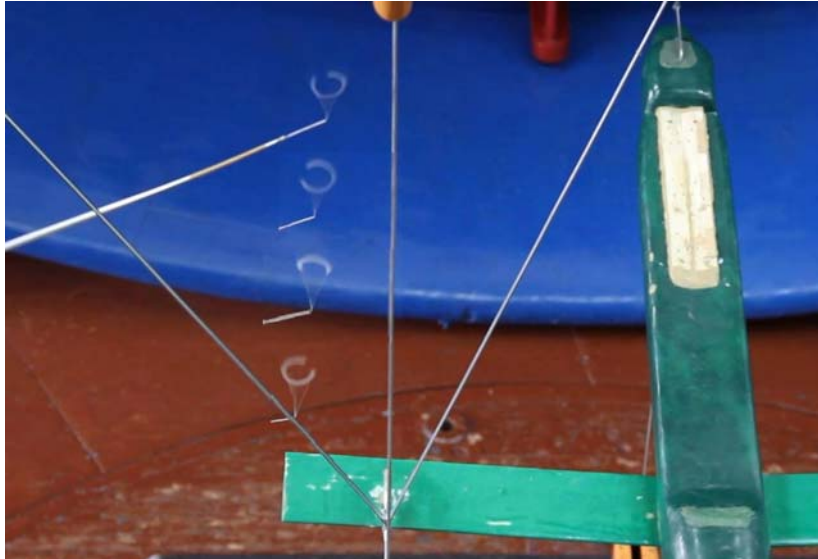


Рисунок 1 – Вихрова система моделі ЛА традиційної схеми («моноплан»)

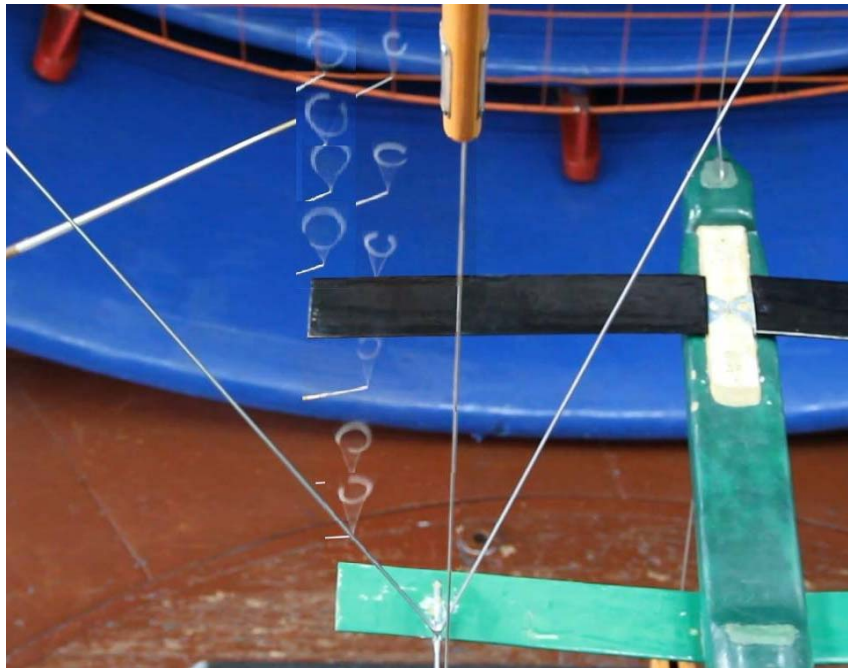


Рисунок 2 – Вихрова система моделі ЛА схеми «тандем»

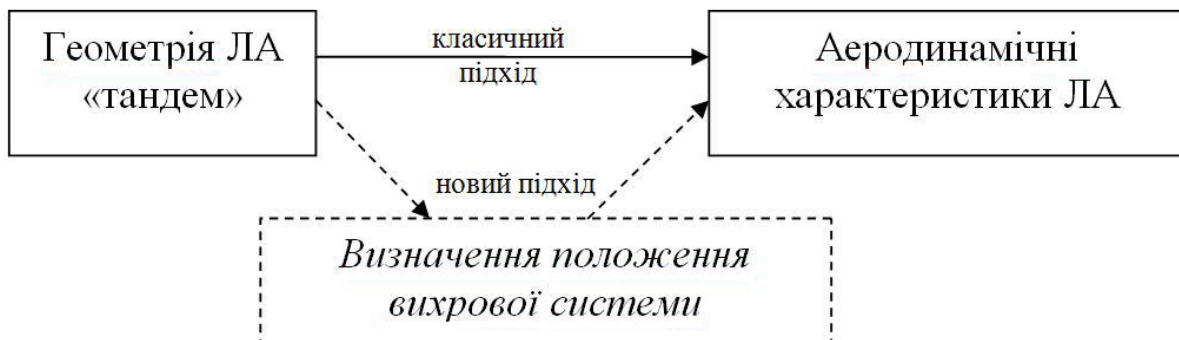


Рисунок 3 – Блок-схема визначення АХ ЛА схеми «тандем»

Тому доцільно спиратись на експериментальні дані та застосовувати їх інтерполяцію за умов *подібності вихрових систем*.

Отже, **мета поданої роботи** – визначення критеріїв подібності вихрових систем літальних апаратів схеми «тандем».

$$dY / dl = -\rho V \times \Gamma .$$

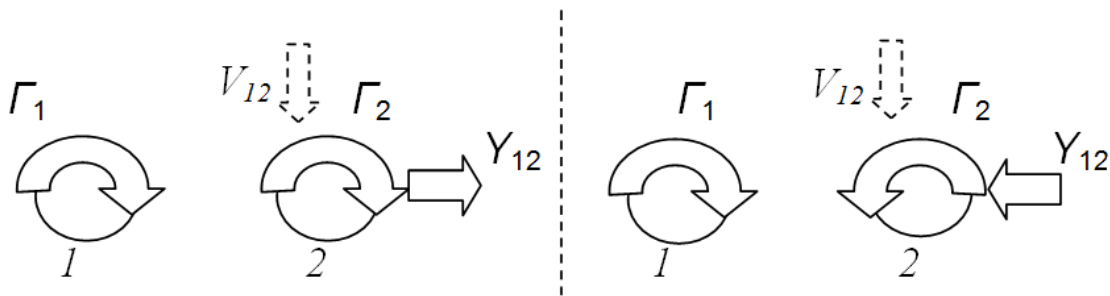


Рисунок 4 – Взаємодія одно- та різнонаправлених вихорів

#### Результати аналітичних досліджень

Вихрові системи літальних апаратів схеми «тандем» характеризуються інтенсивністю вихорів переднього та заднього крил ( $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  відповідно) та їх взаємним розташуванням – дистанціями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 5). Оскільки вихори мають складну нелінійну форму, то ці відстані неможливо визначити априорі, тому замість абсолютних відстаней використовуються інтервали  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , які були б між прямолінійними вихорами, тобто відстані між кінцями крил (початками вихорів) по трьох координатах.

Візуальні дослідження показують, що при близькорозташованих кінцевих вихорах (які характерні для схеми «тандем») відштовхування між однонаправленими вихорами значно сильніше, ніж притягування між різнонаправленими, адже останні при типових видовженнях крил ЛА схеми «тандем» розташовані на помітно більшій відстані. Дійсно, кінцевий вихор заднього крила притягується до двох вихорів з протилежного боку фюзеляжу і відштовхується лише від одного вихору переднього крила, при цьому щонайменше не наближається до фюзеляжу (див. рис. 2). Таким чином,  $x' = x$ , а внаслідок відштовхування  $y' < y$ ,  $z' < z$ . (див. рис. 5).

Слід зазначити, що в проведених візуальних випробуваннях кут установлення переднього крила на  $4^\circ$  менше, ніж заднього (кут деградації  $-4^\circ$ ), тому передній кінцевий вихор слабший, ніж задній. У реального ЛА кут деградації зазвичай дорівнює  $0 \dots +2^\circ$  задля забезпечення поздовжньої стійкості в широкому діапазоні кутів атаки. Тобто для реальних ЛА передній вихор буде ще інтенсивнішим, а задній вихор буде ще сильніше відштовхуватись від площини симетрії ЛА.

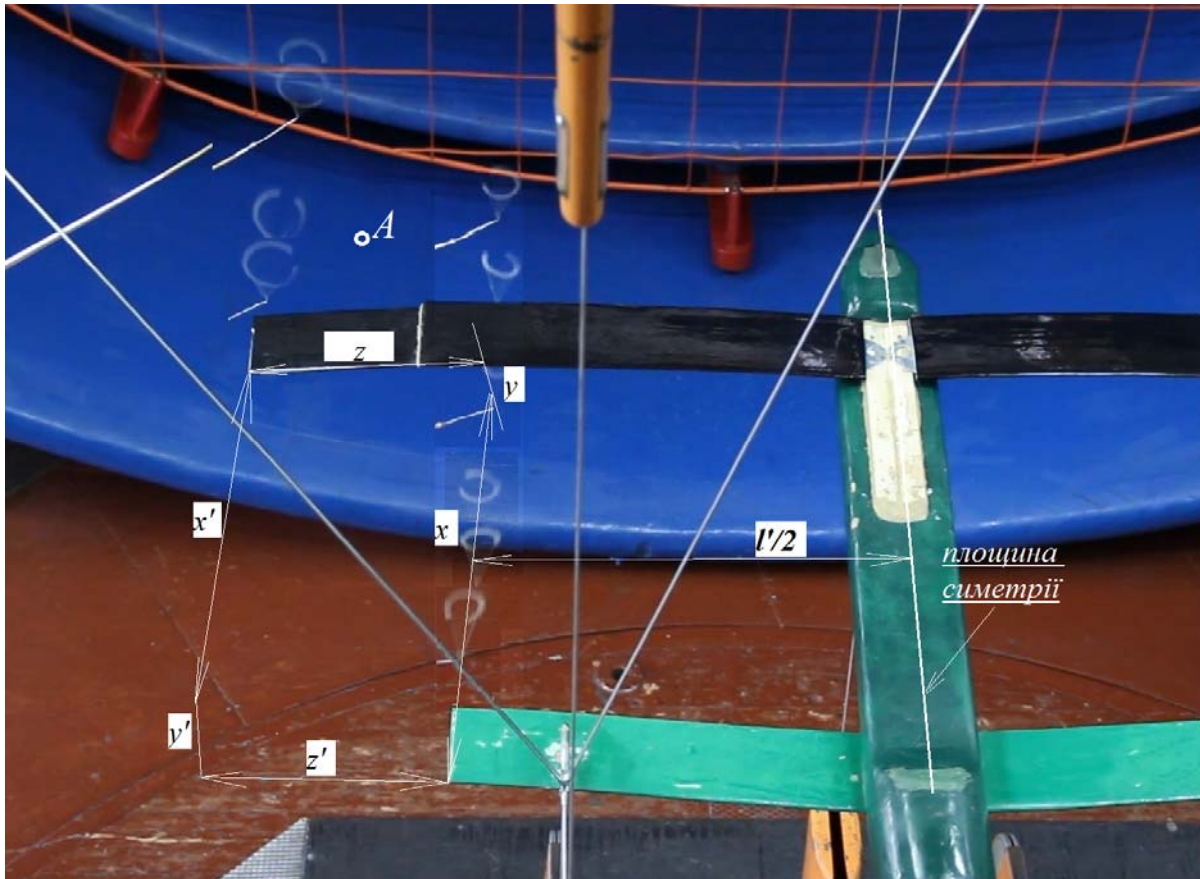


Рисунок 5 – Позначення характерних геометричних параметрів

Надалі розглядається насамперед взаємодія між однонаправленими кінцевими вихорами (з одного боку фюзеляжу).

Розглянемо подібність вихрових систем моделі (індекс «м») та природи (індекс «н»).

Як відомо, два явища є повністю фізично подібними, якщо спостерігаються геометрична, кінематична та динамічна подібності [7].

*Геометрична подібність* вихрових систем двох ЛА полягає у пропорційності відстаней  $x : y : z$  (або  $x' : y' : z'$ ) на моделі та природі:

$$x_M : y_M : z_M = x_N : y_N : z_N \quad (x'_M : y'_M : z'_M = x'_N : y'_N : z'_N)$$

$$\text{або} \quad \frac{x_N}{x_M} = \frac{y_N}{y_M} = \frac{z_N}{z_M} = \frac{x'_N}{x'_M} = \frac{y'_N}{y'_M} = \frac{z'_N}{z'_M} = \lambda_l,$$

де  $\lambda_l$  – лінійний масштаб.

Відношення  $y$  до  $z$  визначає напрям взаємодії між вихорами, а величина  $r_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$  – силу цієї взаємодії. Винесення крила  $x$  (наскільки передній вихор довший за задній) також впливає на напрям і силу взаємодії – чим більше значення  $x$ , тим менше вплив переднього приєднаного вихору, більше вплив вільного переднього вихору на задній і менше заднього на передній; крім того, при збільшенні параметра  $x$  перед-

ній вихор стягується до площини симетрії внаслідок взаємодії з протилежно направленим вихором з іншого боку. Таким чином, зростання винесення крила  $x$  призводить до збільшення відстані  $z$ , якщо розмах заднього крила більший (див. рис. 5), і до зменшення – якщо розмах заднього крила менший за розмах переднього.

В строгій постановці задачі потрібно враховувати також відстані до протилежно направлених вихорів  $l'$ , тобто має виконуватись пропорційність  $x : y : z : l'$ .

Для ізольованого крила з еліптичним розподілом циркуляції за розмахом теоретично відомо [8]:

$$l'_{i3} = \frac{\pi}{4} l_1 \approx 0,785 l_1.$$

Для трапецієподібного ізольованого переднього крила зі звуженням  $\eta$  можна наближено записати [9]

$$l'_{i3} = l_1 \left( 0,64 + \frac{0,25}{\eta} \right).$$

З урахуванням впливу фюзеляжу [8] отримаємо

$$l' = l_1 \left( 0,64 + \frac{0,25}{\eta} \right) k_d + d_{кр},$$

де  $d_{кр}$  – діаметр фюзеляжу в місці стику з крилом,  $k_d$  – поправковий коефіцієнт, який визначається залежно від відношення  $d_{кр} / l_1$  за таблицею:

$d_{кр} / l_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k_d$	1,0	0,980	0,970	0,968	0,968	0,970	0,972	0,980	0,985	0,995	1,0

Кінематична подібність, тобто постійність співвідношень швидкостей у відповідних точках і однаковість напрямлень векторів швидкостей, спостерігатиметься за умови геометричної подібності та пропорційності індукованих вихорами швидкостей. Дані швидкості в деякій точці  $A$  за формулою Біо-Савара дорівнюють [7]:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \theta dL,$$

де  $r$  – відстань від точки  $A$  до елемента вихору довжиною  $dL$ ;  $\theta$  – кут між відрізками  $r$  і  $dL$ ;  $\Gamma = c_y V b \frac{\eta}{1,285\eta + 0,5}$  – циркуляція кінцевого вихору

трапецієподібного крила [9];  $b = S / l$  – середня геометрична хорда крила.

Співвідношення швидкостей, індукованих одним вихором, для натури і моделі (масштаб швидкостей) дорівнює:

$$\lambda_V = \frac{dV_{1H}}{dV_{1M}} = \frac{\Gamma_{1H} r_M^2 dL_H}{\Gamma_{1M} r_H^2 dL_M} = \frac{c_{y1H} V_{1H} b_{1H}}{c_{y1M} V_{1M} b_{1M}} \frac{1}{\lambda_I^2} \frac{\lambda_I}{1} = \frac{c_{y1H}}{c_{y1M}} \lambda_V \lambda_I \frac{\lambda_I}{\lambda_I^2} = \frac{c_{y1H}}{c_{y1M}} \lambda_V,$$

тобто співвідношення має місце при  $C_{y1H} = C_{y1M}$ .

Для схеми «тандем» співвідношення швидкостей індукованих двома вихорами дорівнюють:

$$\begin{aligned} \lambda_V &= \frac{dV_{1H} + dV_{2H}}{dV_{1M} + dV_{2M}} = \frac{\frac{\Gamma_{1H} \sin \theta_1 dL_{1H}}{4\pi r_{1H}^2} + \frac{\Gamma_{2H} \sin \theta_2 dL_{2H}}{4\pi r_{2H}^2}}{\frac{\Gamma_{1M} \sin \theta_1 dL_{1M}}{4\pi r_{1M}^2} + \frac{\Gamma_{2M} \sin \theta_2 dL_{2M}}{4\pi r_{2M}^2}} = \\ &= \frac{\frac{c_{y1H} V_{1H} b_{1H} \sin \theta_1 dL_{1H}}{r_{1H}^2} + \frac{c_{y2H} V_{2H} b_{2H} \sin \theta_2 dL_{2H}}{r_{2H}^2}}{\frac{c_{y1M} V_{1M} b_{1M} \sin \theta_1 dL_{1M}}{r_{1M}^2} + \frac{c_{y2M} V_{2M} b_{2M} \sin \theta_2 dL_{2M}}{r_{2M}^2}} = \\ &= \frac{\frac{c_{y1H} \lambda_V V_{1M} b_{1M} \sin \theta_1 dL_{1M}}{r_{1M}^2} + \frac{c_{y2H} \lambda_V V_{2M} b_{2M} \sin \theta_2 dL_{2M}}{r_{2M}^2}}{\frac{c_{y1M} V_{1M} b_{1M} \sin \theta_1 dL_{1M}}{r_{1M}^2} + \frac{c_{y2M} V_{2M} b_{2M} \sin \theta_2 dL_{2M}}{r_{2M}^2}} \end{aligned}$$

Скоротивши обидві частини рівняння на  $\lambda_V$  і позначивши  $A_1 = \frac{V_{1M} b_{1M} \sin \theta_1 dL_{1M}}{r_{1M}^2}$  і  $A_2 = \frac{V_{2M} b_{2M} \sin \theta_2 dL_{2M}}{r_{2M}^2}$ , одержимо

$$\frac{c_{y1H} A_1 + c_{y2H} A_2}{c_{y1M} A_1 + c_{y2M} A_2} = 1.$$

Очевидно, це співвідношення виконується при  $\frac{c_{y1H}}{c_{y1M}} = \frac{c_{y2H}}{c_{y2M}} = \lambda_{cy}$ ,

тобто при постійності параметра  $\frac{c_{y1H}}{c_{y2H}} = \frac{c_{y1M}}{c_{y2M}}$ .

При цьому відношення швидкостей, індукованих вихорами, дорівнює відношенню швидкостей набігаючого потоку:

$$\lambda_V = \frac{dV_{1H} + dV_{2H}}{dV_{1M} + dV_{2M}} = \frac{V_H}{V_M} = \lambda_V,$$

тобто параметр  $\lambda_V$  є вільним для природи і моделі.

Таким чином, при збереженні геометричної подібності (пропорційні відстані та рівні кути) *кінематична подібність* вихрових систем ЛА схеми «тандем» забезпечується пропорційністю коефіцієнтів піднімальних сил переднього та заднього крил  $C_{y1} \cdot C_{y2}$ .

Треба зазначити, що для схеми «тандем» коефіцієнт піднімальної сили заднього крила  $C_{y2}$  залежить також від коефіцієнта  $C_{y1}$  переднього крила та відносного розташування крил. Тобто, нехтуючи впливом заднього крила на переднє [10], для останнього можна записати як для ізольованого [7]:

$$C_{y1} = \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{1 + \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}}} (\alpha - \alpha_{01}),$$

де  $C_{y\text{ пр1}}^\alpha$  – похідна від коефіцієнта піднімальної сили для *профілю* переднього крила, тобто для крила нескінченного видовження.

Для заднього крила потрібно враховувати середній кут скосу потоку за переднім крилом  $\Delta\alpha_{\text{ск сер}}$  і кут установлення відносно переднього крила (кут деградації  $\Delta\varphi$ , зазвичай, нульовий або від'ємний):

$$C_{y2} = \frac{C_{y\text{ пр2}}^\alpha}{1 + \frac{C_{y\text{ пр2}}^\alpha}{\pi e_2 \lambda_{\text{еф2}}}} (\alpha - \alpha_{02} - \Delta\alpha_{\text{ск сер}} + \Delta\varphi)$$

Наближена залежність кута скосу має вигляд [10]

$$\Delta\alpha_{\text{ск сер}} = 1,6 \frac{C_{y1}}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}}.$$

Тоді

$$C_{y2} = \frac{C_{y\text{ пр2}}^\alpha}{1 + \frac{C_{y\text{ пр2}}^\alpha}{\pi e_2 \lambda_{\text{еф2}}}} \left[ \frac{1 - 0,6 \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}}}{1 + \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}}} \alpha - \alpha_{02} + \Delta\varphi + \frac{1,6 \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}} \alpha_{01}}{1 + \frac{C_{y\text{ пр1}}^\alpha}{\pi e_1 \lambda_{\text{еф1}}}} \right].$$

Зазначимо, що отриманий вираз не залежить від винесення крила або вертикального інтервалу, тобто повна геометрична подібність літального апарата не є обов'язковою вимогою.



Точніша залежність може бути отримана шляхом інтегрування за розмахом заднього крила кута скосу, розрахованого за формулами Біо-Савара для приєднаного та вільних вихорів переднього крила.

Для динамічної подібності, тобто подібності сил, необхідною умовою є геометрична подібність, а також пропорційність сил. Розглянемо сили взаємодії між вихорами (див. рис. 5). Швидкості  $V_{12}$ , індуковані напівнескінченним вихором 1 в точці початку вихору 2, створюють силу на одиницю довжини [7]

$$dY_{12H} / dl = \rho_H V_{12H} \Gamma_{2H},$$

$$\text{де } V_{12H} = \frac{\Gamma_{1H}}{4\pi r_{0H}} (1 + \cos \theta_H);$$

$$\cos \theta_H = \frac{x'_H}{\sqrt{x'^2_H + y'^2_H + z'^2_H}} = \cos \theta_M;$$

$$r_{0H} = \sqrt{y'^2_H + z'^2_H} = \lambda_I r_{0M}.$$

Для моделі формули аналогічні при заміні індексу «H» на «M».

Тоді масштаб сил взаємодії вихорів для натури та моделі дорівнює:

$$\begin{aligned} \lambda_P &= \left| \frac{Y_{12H}}{Y_{12M}} \right| = \left| \frac{dY_{12H}}{dY_{12M}} \right| = \frac{\rho_H V_{12H} \Gamma_{2H} dl_H}{\rho_M V_{12M} \Gamma_{2M} dl_M} = \frac{\rho_H \frac{\Gamma_{1H} (1 + \cos \theta_H)}{4\pi r_{0H}} \Gamma_{2H}}{\rho_M \frac{\Gamma_{1M} (1 + \cos \theta_M)}{4\pi r_{0M}} \Gamma_{2M}} \lambda_I = \\ &= \frac{\lambda_I \rho_H \Gamma_{1H} \Gamma_{2H}}{\lambda_I \rho_M \Gamma_{1M} \Gamma_{2M}} = \lambda_\rho \frac{c_{y1H} V_{1H} b_{1H} c_{y2H} V_{2H} b_{2H}}{c_{y1M} V_{1M} b_{1M} c_{y2M} V_{2M} b_{2M}} = \lambda_\rho \frac{c_{y1H} V_{1M} b_{1M} \lambda_I \lambda_V}{c_{y1M} V_{1M} b_{1M}} \times \\ &\times \frac{c_{y2H} V_{2M} b_{2M} \lambda_I \lambda_V}{c_{y2M} V_{2M} b_{2M}} = \lambda_\rho \frac{c_{y1H} c_{y2H}}{c_{y1M} c_{y2M}} \lambda_I^2 \lambda_V^2 = \lambda_\rho \lambda_{cy}^2 \lambda_I^2 \lambda_V^2, \end{aligned}$$

де  $\lambda_\rho = \rho_H / \rho_M$  – масштаб густин.

Для сили дії вихору 2 на вихор 1 вираз записується так:

$$Y_{21H} = \rho_H V_{21H} \Gamma_{1H};$$

$$V_{21H} = \frac{\Gamma_{2H}}{4\pi r_{0H}} (1 - \cos \theta_H).$$

Тобто запис масштабу сил  $\lambda_P$  є аналогічним:

$$\lambda_P = \lambda_\rho \lambda_{cy}^2 \lambda_I^2 \lambda_V^2 a.$$

Якщо зміною густини можна знехтувати, то одержимо



$$\Lambda_P = \Lambda_{cy}^2 \Lambda_l^2 \Lambda_V^2.$$

Отже, за умови виконання геометричної ( $\Lambda_l$ ) та кінематичної ( $\Lambda_{cy}$ ) подібностей має місце динамічна подібність вихрових систем із відомим (при відомому  $\Lambda_V$ ) масштабом сил.

### Висновки

У поданій роботі визначено критерії подібності вихрових систем для літальних апаратів схеми «тандем». Отже, порівнювати результати визначення індуктивного опору аналітичними, числовими та експериментальними методами можна при виконанні даних критеріїв за відсутності повної геометричної та динамічної подібностей між літальними апаратами або їх моделями.

Розроблена математична модель базується на припущенні, що геометрія вихрової системи повністю задається інтенсивностями  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  вихорів, інтервалами  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  між початками однаково направлених вихорів (з одного боку фюзеляжу) та, меншою мірою, розмахом крила (інтервалом  $l'$  між початками протилежно направлених вихорів).

Дотримання динамічної подібності обумовлено чотирма незалежними параметрами  $\frac{x'}{y'}$ ,  $\frac{x'}{z'}$ ,  $\frac{x'}{l'}$  і  $\frac{C_{y1}}{C_{y2}}$  (параметр  $C_{y2}$  хоча і залежить від

$C_{y1}$ , може варіюватись параметром кута установлення). На практиці це означає необхідність проведення повного факторного експерименту і щонайменше  $3^4=81$  випробуванням для встановлення впливу вхідних параметрів і побудови кривих інтерполяції.

Окрім подібності вихрових систем, для ЛА схеми «тандем», як і для традиційної схеми, має враховуватись вплив чисел Рейнольдса, Маха та початкового ступеня турбулентності потоку (вплив останнього фактора на ЛА схеми «тандем» показано в [11]).

### Список використаних джерел

1. Лемко, О. Л. Математическая модель формирования аэродинамического облика летательного аппарата по критерию максимального аэродинамического качества [Текст] / О. Л. Лемко, В. В. Сухов // Вопросы проектирования и производства конструкции летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Х., 2011.– Вып. 1 (65) – С. 29 – 37.

2. Шахов, В. Г. Аэродинамические усовершенствования и схемы летательных аппаратов [Текст] / В. Г. Шахов. – Куйбышев, Куйбышев. авиац. инст. им. С. П. Королева, 1984. – 72 с.

3. Юрьев, Б. Н. Экспериментальная аэродинамика [Текст]: в 2 ч. / Б. Н. Юрьев. – М. : НК ОП СССР, 1938. Ч. 2. Индуктивное сопротивление. – 275 с.
4. Butler, G. F. Effect of Downwash on the Induced Drag of Canard-Wing Combinations [Text] / G. F. Butler // Engineering Notes. – Vol. 19, No. 5. – P. 410–411.
5. Кривохатко, І. С. Візуалізація вихрової системи літальних апаратів схеми «тандем» та визначення їх аеродинамічних характеристик [Текст] / І. С. Кривохатко, В. В. Сухов // Міжнар. наук.-техн. конф. «Проблеми та перспективи розвитку авіації та космонавтики», Київ, Національний авіаційний університет, 23–24 жовтня 2013 р. – К., 2013. – С. 88.
6. Masko, O. M. Experimental research of tandem-scheme UAV model aerodynamic characteristics [Text] / O. M. Masko, I. S. Kryvokhatko, V. V. Sukhov / Transactions of the Institute of Aviation. Prace Instytutu Lotnictwa – Warsaw, 2014. [in printing]
7. Мхитарян, А. М. Аэродинамика [Текст] / А. М. Мхитарян. – М. : Машиностроение, 1976. – 448 с.
8. Вотяков, В. Д. Аэродинамика летательных аппаратов и гидравлика их систем [Текст]: в 2 ч. / В. Д. Вотяков. – ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1972. Ч. 1 «Аэродинамика» – 654 с.
9. Остославский, И. В. Продольная устойчивость и управляемость самолета [Текст] / И. В. Остославский, Г. С. Калачев. – М. : Гос. изд-во оборон. промышленности, 1951. – 368 с.
10. Hoerner, S. F. Fluid-dynamic drag: practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance [Text] / Dr. Sighard F. Hoerner. – Hoerner Fluid dynamics, Bricktown, New Jersey, 1965.
11. Кривохатко, І. С. Дослідження впливу початкового ступеня турбулентності потоку на аеродинамічні характеристики системи двох профілів [Текст] / І. С. Кривохатко, О. М. Масько, В. В. Сухов // Вопросы проектирования и производства конструкции летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аерокосм. ун-та ім. М. Є. Жуковського «ХАІ». – Х., 2012.– Вип. 2 (70). – С. 107 – 116.

*Поступила в редакцію 16.10.2014.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.В. Лупкин,  
Національний аерокосмічний університет  
ім. Н.Е. Жуковського «ХАІ», г. Харків.*