

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В типичных адгезионных соединениях клеевой слой, обеспечивая передачу усилий между деталями, работает в условиях сложного напряженно-деформированного состояния (НДС) – в элементарном объеме клея действуют все шесть компонентов напряжения, которые изменяются по длине, ширине и толщине соединительной прослойки. Сложность аналитической оценки такого трехмерного напряженного состояния обусловила появление ряда расчетных моделей адгезионных соединений, которые построены на различных предположениях, касающихся, как правило, характера распределения нормальных и касательных напряжений в деталях и клее. Описание этих моделей, а также вопросы влияния таких факторов, как ширина соединения, жесткость деталей (переменная, постоянная), температурное нагружение, и некоторых других можно найти, например, в работах [1 – 7].

Наиболее простая одномерная модель адгезионных соединений, согласно которой напряжения по толщине деталей и клея распределяются равномерно, достаточно хорошо описывает НДС соединения. Как отмечается в [3, 8], эта и более точная, двумерная, модель дают приблизительно одинаковые значения максимальных касательных напряжений в клее, хотя расположение этих экстремумов по длине соединения может существенно отличаться. В пользу одномерной модели говорит также тот факт, что экспериментальные данные, которые можно получить согласно действующим стандартам на испытания адгезионных соединений (здесь имеются в виду геометрия образцов, а также методики определения деформаций и напряжений в деталях и клее), физически логично использовать именно для верификации одномерной модели – до настоящего времени не предложены способы экспериментальной оценки касательных напряжений в клеевой прослойке, которые в то же время не меняли бы общей картины распределения этих напряжений в пределах соединения.

В работе [3] был разработан метод физической дискретизации для определения внутренних усилий в элементах соединения, который заключается в декомпозиции деталей и соединительного слоя на отдельные участки, в пределах которых НДС считается постоянным. Основное преимущество данного подхода заключается в том, что разрешающая система дифференциальных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Данная методика является во многом универсальной и позволяет маневрировать расчетной схемой соединения в

широких пределах, учитывая или отбрасывая из рассмотрения те или иные факторы и особенности НДС.

Например, используя данный метод для одномерной модели соединения (см. рис. 1, а, б), распределение напряжений по длине можно получить, решив следующую систему уравнений [3] (см. рис. 1, в, г):

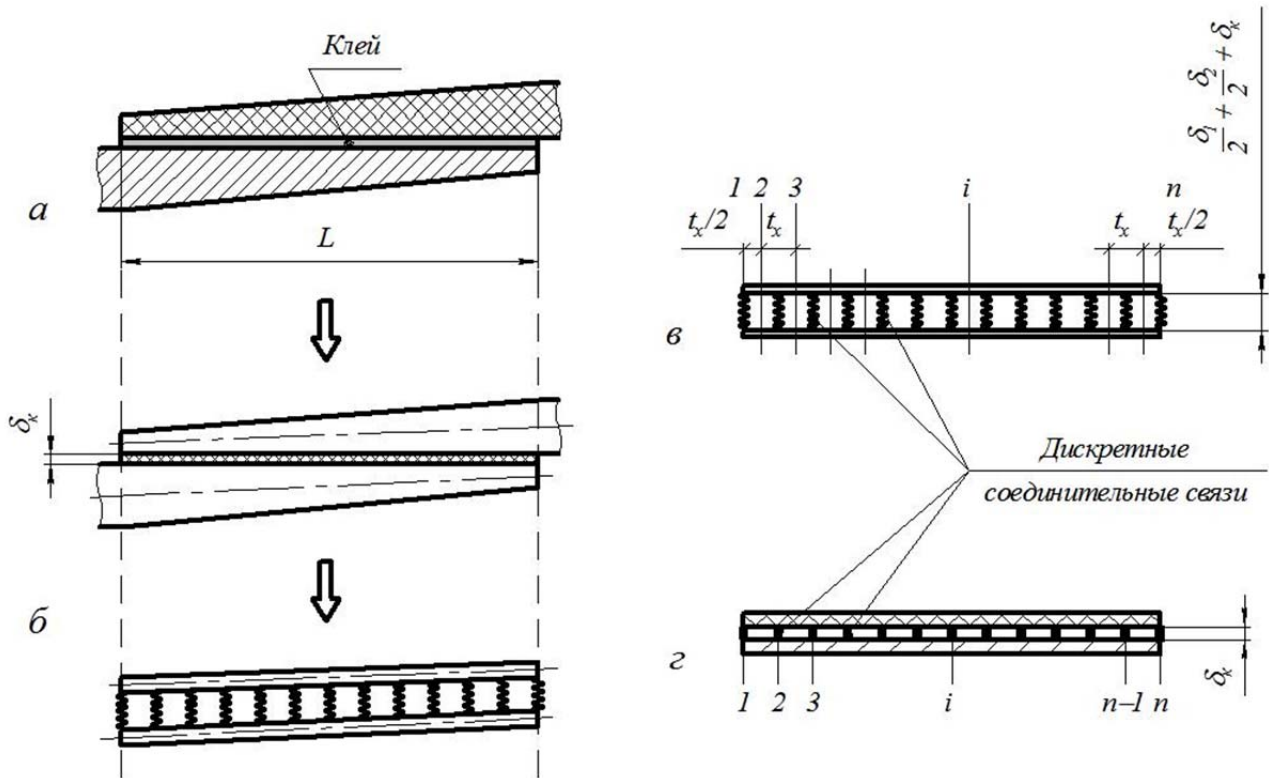


Рисунок 1 – Схема метода физической дискретизации

$$N_{2x,i-1}\Pi_{3xi} - N_{2xi} (t_x\Pi_{1xi} + t_x\Pi_{2xi} + \Pi_{3xi} + \Pi_{3x,i+1}) + \\ + N_{2x,i+1}\Pi_{3x,i+1} = -t_x\Pi_{1xi} (N_{1x0} + N_{2x0}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

где n – количество дискретных связей (дискретных крепежных элементов, ДКЭ), которыми заменяется клей;

L – длина соединения;

$$t_x = \frac{L}{n-1} \text{ – шаг ДКЭ;}$$

Π_{1xi}, Π_{2xi} – осевая податливость соединяемых деталей:

$$\Pi_{1xi} = \frac{1}{\delta_{1i}E_{1xi}}; \quad \Pi_{2xi} = \frac{1}{\delta_{2i}E_{2xi}}; \quad (2)$$

Π_{3xi} – сдвиговая податливость соединительного слоя:

$$\Pi_{3xi} = \frac{\delta_{ci}}{t_x G_{cxz}}; \quad (3)$$

$N_{2x,i}$ – осредненные по толщине нормальные напряжения в детали 2 на i -м участке (рис. 2).

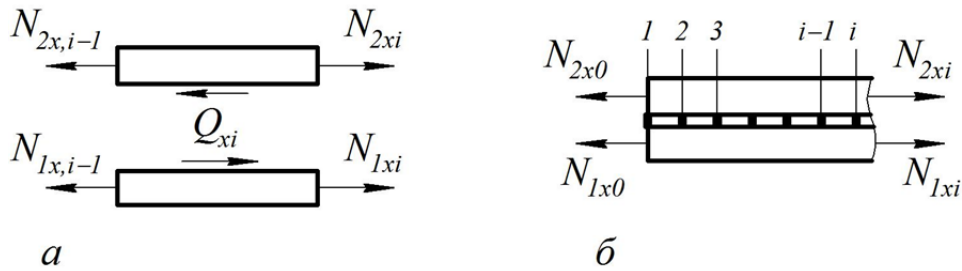


Рисунок 2 – Внутренние усилия на i -м участке соединения

В формулах (2), (3) обозначены [3]:

δ_{1i} , δ_{2i} – средняя толщина деталей на i -м участке;

δ_{ci} , G_{cxz} – толщина и модуль сдвига соединительного слоя; в классической модели прослойки (касательные напряжения действуют только в клее) эти параметры представляют собой соответствующие значения для клея (рис. 1, г):

$$\delta_{ci} = \delta_{\kappa}; \quad G_{cxz} = G_{\kappa}. \quad (4)$$

Согласно модели Фолькерсена (в передаче сдвиговых усилий, помимо клея, участвуют также прилегающие слои соединяемых деталей, рис. 1, в)

$$\delta_{ci} = \delta_{\kappa} + \frac{\delta_{1i}}{2} + \frac{\delta_{2i}}{2}; \quad (5)$$

$$G_{cxz} = \frac{\delta_{\kappa} + \frac{\delta_{1i}}{2} + \frac{\delta_{2i}}{2}}{\frac{\delta_{\kappa}}{G_{\kappa}} + \frac{\delta_{1i}}{2G_{1xz}} + \frac{\delta_{2i}}{2G_{2xz}}}; \quad (6)$$

N_{1x0} , N_{2x0} – усилия на кромке соединения (см. рис. 3), причем

$$N_{1x0} + N_{2x0} = N_{1xn} + N_{2xn}.$$

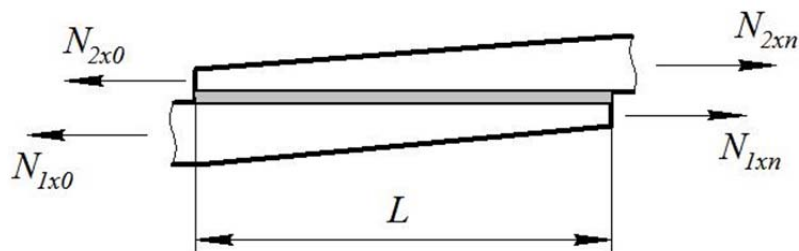


Рисунок 3 – Усилия, действующие на соединение

Система уравнений (1) представляет собой систему уравнений с трехдиагональной матрицей, для решения которой можно использовать, например, метод прогонки (алгоритм Томаса). Решая эту задачу относительно $n - 1$ неизвестных $N_{2x,i}$ и учитывая условия равновесия i -го участка соединения (рис. 2)

$$\begin{aligned} N_{1xi} &= N_{1x0} + N_{2x0} - N_{2xi}; \\ Q_{xi} &= N_{1x,i-1} - N_{1xi} = N_{2xi} - N_{2x,i-1}, \end{aligned}$$

находят распределение напряжений в деталях и в клее по n участкам:

$$\sigma_{1xi} = \frac{N_{1xi}}{\delta_{1i}}; \quad \sigma_{2xi} = \frac{N_{2xi}}{\delta_{2i}}; \quad \tau_{ki} = \frac{Q_{xi}}{t_x}. \quad (7)$$

Используя одномерную модель, можно найти распределение напряжений по длине соединения, непосредственно интегрируя дифференциальные уравнения равновесия (дополненные условиями совместности деформаций). Однако такие аналитические решения можно получить только для некоторых частных случаев. Например, при соединении деталей с постоянной толщиной в схеме полной передачи усилий с одной детали на другую ($N_{1x0} = N_{2xn} = N$, $N_{2x0} = N_{1xn} = 0$, см. рис. 4) распределение касательных напряжений в клее подчиняется закону

$$\tau_0(x) = kN \frac{\Pi_{1x} chk(L-x) + \Pi_{2x} chkx}{(\Pi_{1x} + \Pi_{2x}) shkL}, \quad (8)$$

где $k = \sqrt{\frac{\Pi_{1x} + \Pi_{2x}}{\Pi_{3x}}}$.

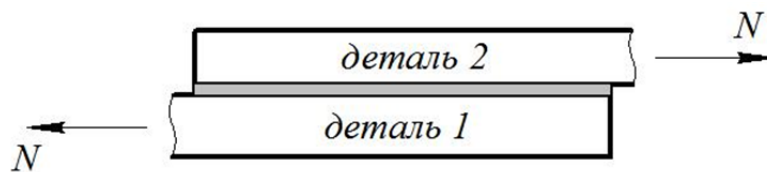


Рисунок 4 – Схема с полной передачей нагрузки

Очевидно, что основным параметром, влияющим на точность расчета соединения методом физической дискретизации, является параметр n , который определяет размерность задачи – системы линейных алгебраических уравнений (1). Графики, показанные на рис. 5, дают представление о степени сходимости численного решения (рассматривалась классическая модель соединительного слоя); для оценки таковой выбрано максимальное по длине соединения отношение значений касательных напряжений в клее, найденных с использованием дискретной модели (7) и аналитической формулы (8):

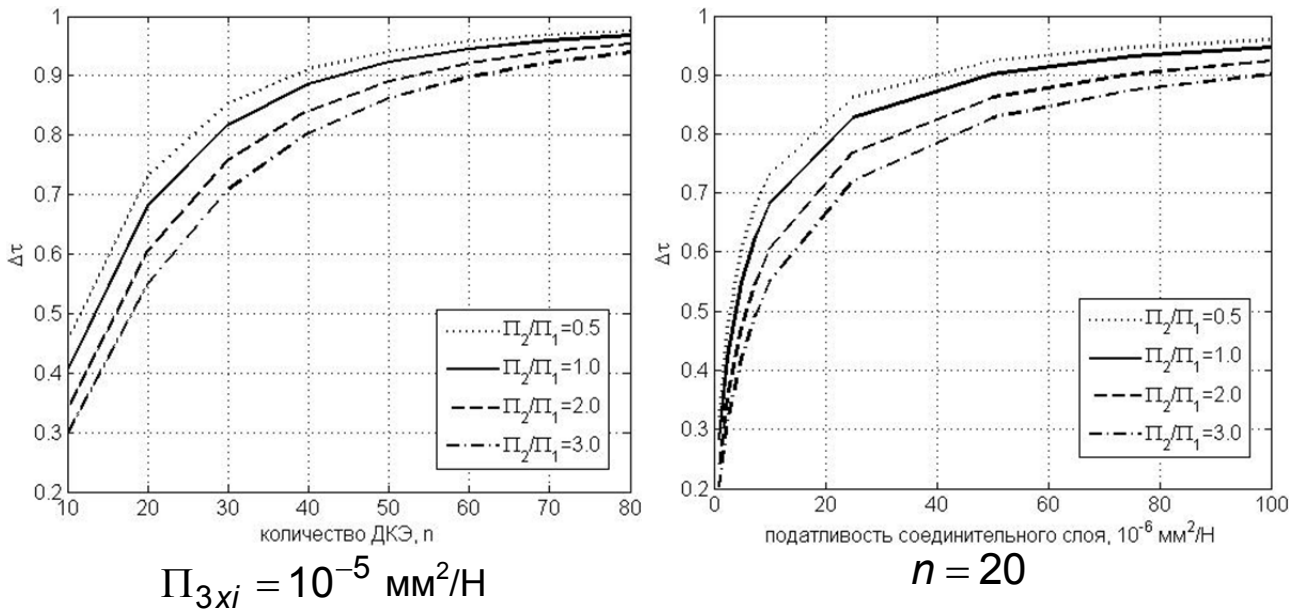


Рисунок 5 – Влияние податливости деталей и соединительного слоя на сходимость дискретной модели ($\Pi_{1xi} = \text{const} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ мм/Н}$)

$$\Delta\tau = \max_x \left\{ \frac{\tau}{\tau_0} \right\}.$$

Из графиков видно, что сходимость численного решения существенно зависит от соотношения осевых жесткостей соединяемых деталей и сдвиговой жесткости клея: при уменьшении жесткости одной из деталей и сохранении значений остальных параметров точность дискретной модели снижается. Напротив, при уменьшении сдвиговой жесткости клея (т.е. при увеличении его податливости) сходимость решения (1) улучшается. Такое влияние можно объяснить особенностями модели физической дискретизации: так как в пределах каждого отдельного участка внутренние осевые усилия в деталях считаются постоянными, то функции напряжений получаются дискретными, кусочными по длине соединения (см. рис. 6, а). Соответственно, чем выше неравномерность распределения напряжений в соединении, чем больше градиенты этих величин, тем ниже точность численного решения при одной и той же степени дискретизации n . На рис. 7, а показано влияние жесткости деталей на распределение касательных напряжений в клее. При $\Pi_{1xi} = \text{const}$ уменьшение жесткости второй детали приводит к увеличению концентрации напряжений в краевых зонах соединения. На рис. 7, б дано сравнение двух моделей соединительного слоя: классической и Фолькерсена – из формул (5), (6) следует, что податливость соединительного слоя Π_{3x} по Фолькерсену выше, чем в его классическом представлении. Это позволяет предположить, что сочетание метода физической дискретизации с моделью Фолькерсена более оправдано, чем

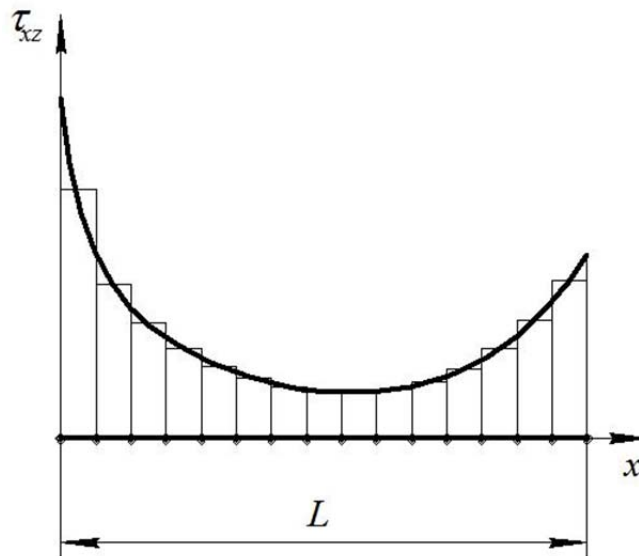


Рисунок 6 – Особенности определения НДС соединения по дискретной модели

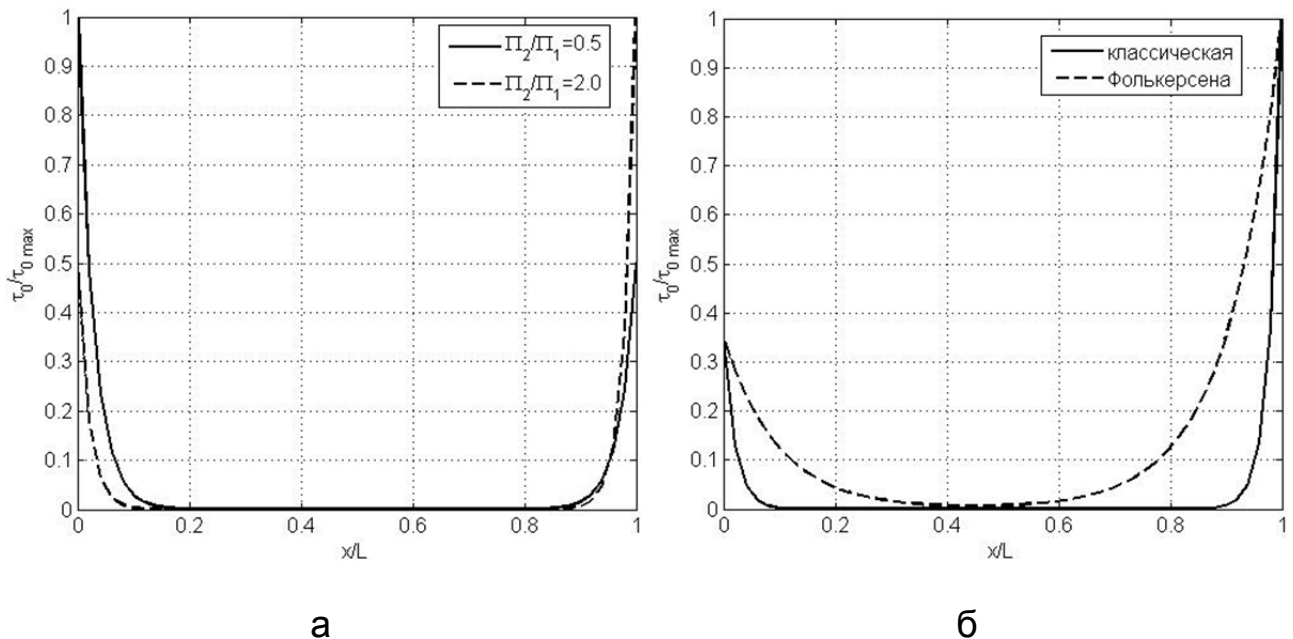


Рисунок 7 – Распределение касательных напряжений в клее по длине соединения

с классической моделью соединительного слоя. Эти графики наглядно поясняют эффекты, описанные выше при анализе рис. 5, 6.

Указанные особенности метода дискретизации можно учесть двумя способами. Во-первых, можно непосредственно увеличивать количество ДКЭ n , уменьшая тем самым шаг t_x и, соответственно, разницу между численными и теоретическими значениями напряжений (см. рис. 5, 6). Это, конечно, увеличивает размерность рассматриваемой задачи, что

при современном уровне развития ЭВМ особых проблем не создает. Однако необходимо помнить, что численные методы решения систем уравнений характеризуются своей погрешностью, которая имеет свойство накапливаться в процессе счета.

Второй способ заключается в варьировании шага ДКЭ: в зонах с большим градиентом напряжений шаг должен быть как можно меньшим, что позволит при сохранении того же значения n учесть дискретность компонентов НДС и повысить точность расчета. Например, для адгезионного соединения с полной передачей нагрузки (см. рис. 4) можно использовать схему разбиения интервала (длины), показанную на рис. 8.

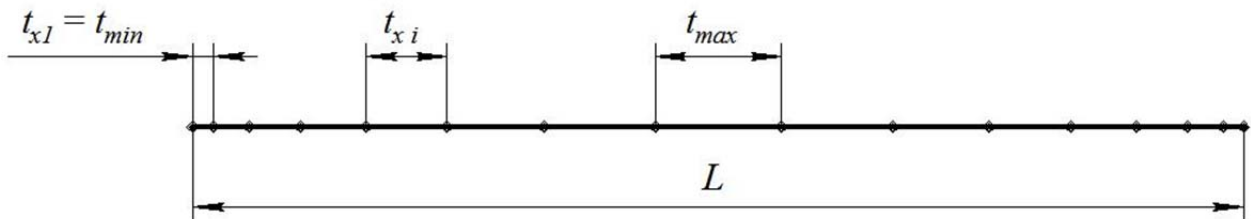


Рисунок 8 – Изменение шага ДКЭ по длине соединения

Если полагать, что изменение шага по длине L подчиняется закону геометрической прогрессии, участки t_{xi} увеличиваются симметрично от краев соединения к его центру ($t_{xi} = t_{xn-i}$), а неравномерность разбиения контролируется отношением длин наибольшего и наименьшего участков:

$$\lambda = \frac{t_{max}}{t_{min}},$$

то для каждой половины интервала

$$t_{xi} = t_{xn-i} = t_{min} \cdot r^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \quad (9)$$

где r – знаменатель прогрессии:

$$r = (\lfloor n/2 \rfloor - 1) \sqrt{\frac{t_{max}}{t_{min}}}; \quad (10)$$

$$t_{min} = L/S. \quad (11)$$

При четном n

$$S = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} r^{i-1} - r^{(\lfloor n/2 \rfloor - 1)}, \quad (12)$$

при нечетном

$$S = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} r^{i-1}. \quad (13)$$

На рис. 9 показано влияние неравномерности шага ДКЭ на сходимость решения (1) к теоретическому (8). Видно, что при постоянном количестве ДКЭ уменьшение размеров участков в местах с большими градиентами внутренних усилий положительно сказывается на точности метода физической дискретизации. При $n = 20$ и отношении $t_{max}/t_{min} = 8$ погрешность дискретной модели составила не более 10% для большинства расчетных случаев. При увеличении степени дискретизации до 40 и сохранении того же значения λ ($t_{max}/t_{min} = 8$) разница в решении не превышала 3%. Таким образом, указанный способ варьирования шага расположения ДКЭ оказывается довольно эффективным способом повышения точности расчета соединений методом физической дискретизации.

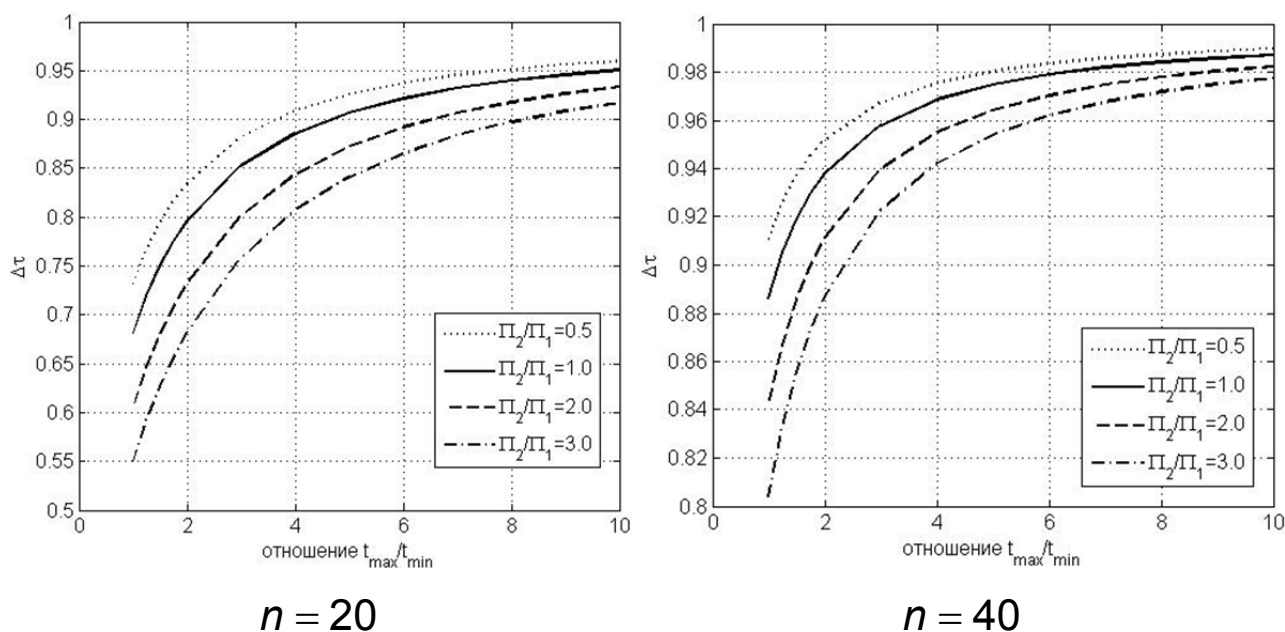


Рисунок 9 – Влияние неравномерности дискретизации на сходимость численного решения

Для оценки достоверности одномерной модели в целом был проведен сравнительный анализ этой модели с методом конечных элементов (МКЭ), при использовании которого рассматривалась двумерная постановка задачи, учитывающая распределение напряжений в деталях и клеевом слое как по длине, так и по толщине.

Следует отметить, что решение подобных задач с помощью МКЭ может строиться как с привлечением специальных дополнительных граничных условий, так и без них. Например, на модель могут накладываться дополнительные условия совместности деформаций в продольном направлении для узлов соединяемых деталей и клея в крайних точках (в сечениях $x = 0$ и $x = L$, см. рис. 10).

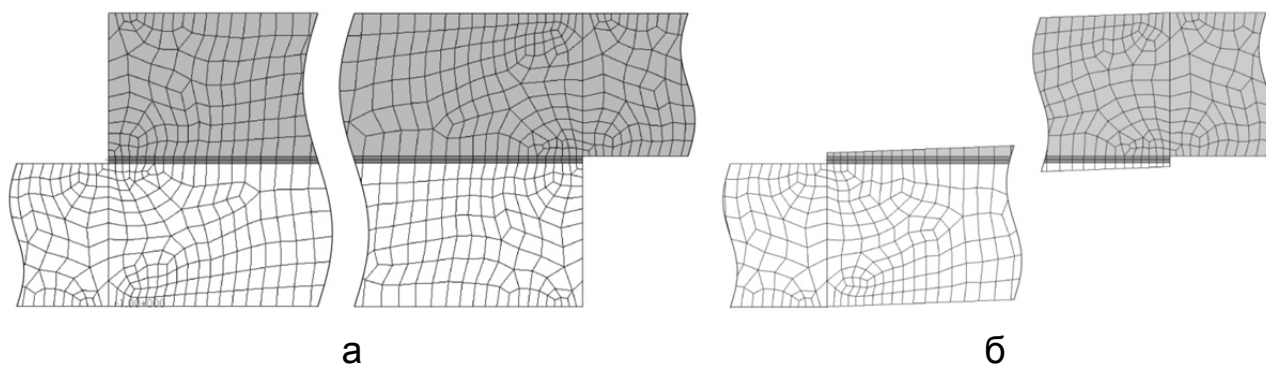


Рисунок 10 – Конечно-элементные модели нахлесточного соединения (а) и соединения со скошенными кромками (б)

Распределение касательных напряжений в клее для нахлесточного соединения показано на рис. 11, а, для соединения со скошенными кромками – на рис. 11, б. Параметры соединения были выбраны следующими:

- длина соединения $L = 50$ мм;
- деталь 1 – сталь, $E = 200$ ГПа, $\delta_1 = 2$ мм;
- деталь 2 – углепластик, $E_x = 70$ ГПа, $G_{xz} = 8$ ГПа, $\delta_2 = 2$ мм;
- клей – $E = 13,5$ ГПа, $G = 5$ ГПа; $\mu = 0,35$; $\delta_k = 0,1$ мм.

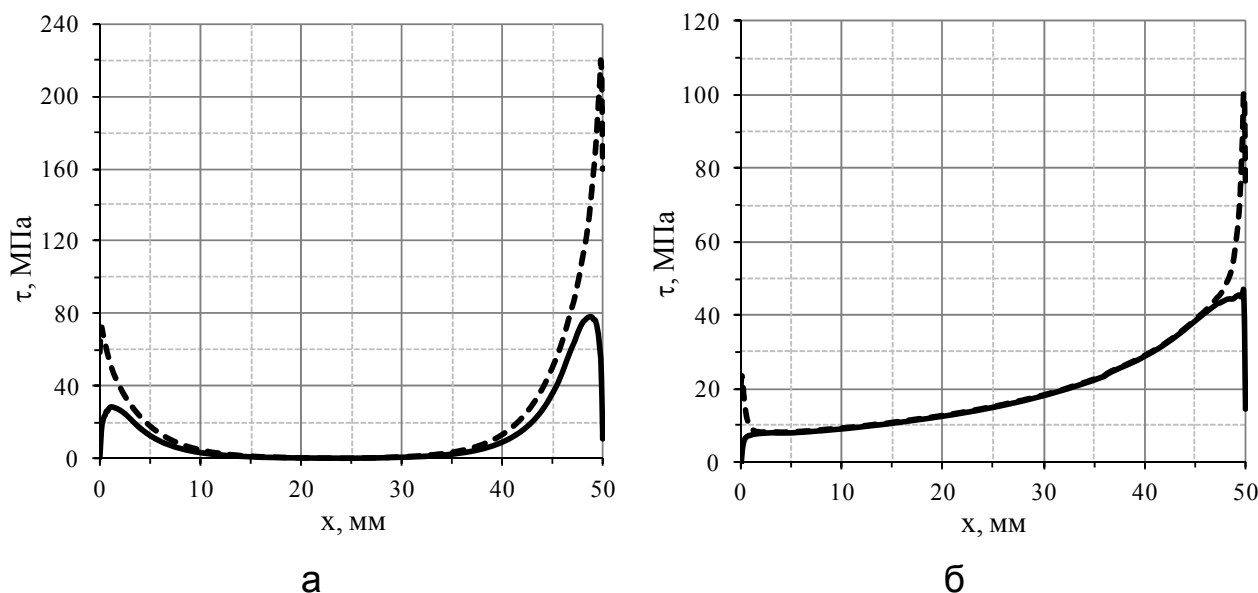


Рисунок 11 – Результаты расчета с помощью МКЭ двух типов соединения металлической и композитной деталей

Как показывает анализ полученных графиков, использование дополнительных условий совместности деформаций, о которых говорилось выше, существенно изменяет НДС на кромках соединения (см. рис. 11, сплошная линия, далее – случай 1) по сравнению с расчетом

без наложения этих ограничений (см. рис. 11, штриховая линия, далее – случай 2). Как видно из графиков, в случае 1 характер распределения касательных напряжений в клеевом слое во многом идентичен картине НДС согласно двумерной модели Кутьинова [6], а в случае 2 распределение касательных напряжений по МКЭ схоже с таковым в рассмотренной выше одномерной модели.

На рис. 12 показано сравнение трех моделей расчета адгезионного соединения: одномерной (с классическим представлением соединительного слоя, КМСС и согласно гипотезам Фолькерсена, МФСС) и МКЭ (описанный выше случай 2). Видно, что картина распределения касательных напряжений в клее получается в целом идентичной во всех трех случаях. Однако максимальные напряжения могут отличаться достаточно сильно. Для нахлесточного соединения (рис. 10, а) наиболее близким к МКЭ оказывается расчет по гипотезам Фолькерсена (см. рис. 12, а), а для соединения со скошенными кромками (рис. 10, б) – расчет по классической модели (см. рис. 12, б). Ряд дополнительных проведенных численных экспериментов показал, что:

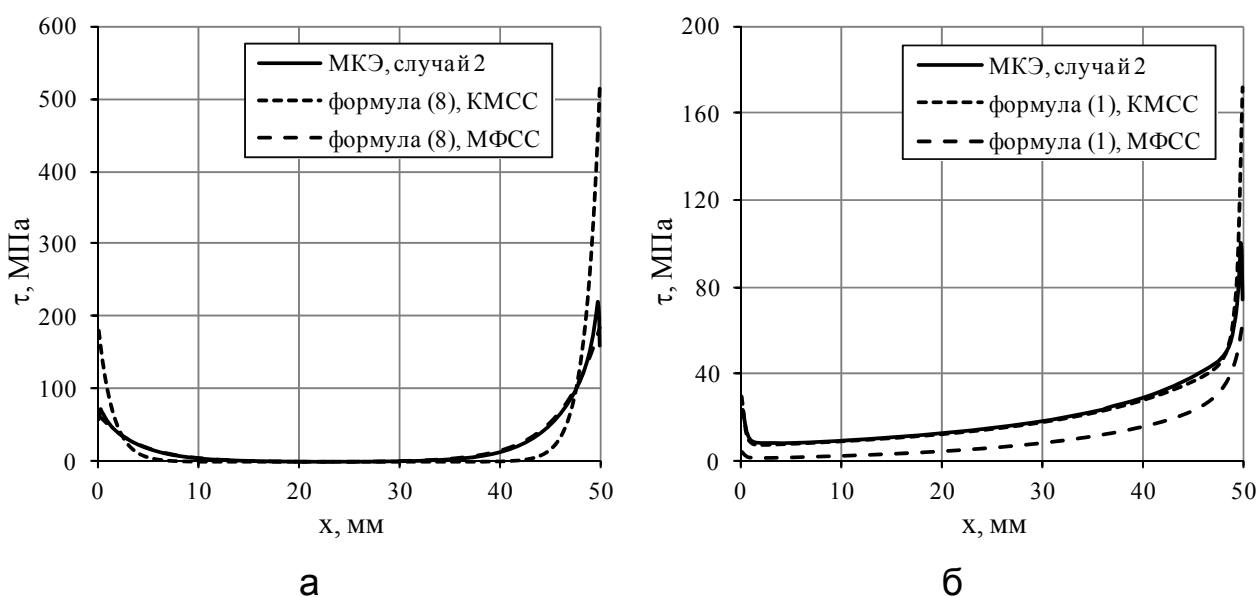


Рисунок 12 – Сравнение одномерной модели и МКЭ

- при соединении деталей с постоянной толщиной более близкой к двумерной модели оказывается одномерная модель в сочетании с гипотезами Фолькерсена для соединительного слоя. При этом расчет по одномерной модели дает более низкие значения пиковых напряжений в клее (примерно на 10...15%), т.е. завышает прочность соединения по сравнению с двумерной моделью;

- при соединении деталей с переменной толщиной целесообразнее использовать одномерную модель с классическим представлением соединительного слоя. В этом случае распределение касательных напря-

жений в клее будет наиболее близким к картине НДС, получаемой по двумерной модели, а расчет идет в запас прочности (экстремальные значения напряжений будут выше, чем в двумерной модели).

Список использованных источников

1. Артюхин, Ю.П. Напряжения в клеевых соединениях [Текст] / Ю.П. Артюхин // Исследования по теории пластин и оболочек: сб. науч. тр. – Казань: Изд-во КГУ, 1973. – Вып. 10. – С. 3 – 27.
2. Воробей, В.В. Соединения конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Воробей, О.С. Сироткин. – Л.: Машиностроение, 1985. – 168 с.
3. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.
4. Сироткин, О.С. Технология и механика соединений [Текст] / О.С. Сироткин, В.Б. Литвинов, В.И. Гришин. – М.: Арктика, 2000. – 314 с.
5. Белоус, А.А. Расчет клеемеханического соединения внахлестку [Текст] / А.А. Белоус, А.М. Хватан // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 49 – 56.
6. Кутьинов, В.Ф. Расчет клеевых соединений [Текст] / В.Ф. Кутьинов // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 14 – 30.
7. Куреннов, С.С. Напряженное состояние клеевого соединения. Учет многослойной структуры композита [Текст] / С.С. Куреннов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: НАКУ «ХАИ», 2014. – Вып. 1. – С. 49 – 60.
8. Карпов, Я.С. Соединение высоконагруженных деталей из композиционных материалов. Сообщение 2. Моделирование напряженно-деформированного состояния [Текст] / Я.С. Карпов // Проблемы прочности. – 2006. – № 5. – С. 48 – 60.

Поступила в редакцию 31.08.2015.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*