

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПО ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ

Область применения тонкостенных слоистых конструкций в аэрокосмической технике постоянно расширяется. Создание новых, более экономичных, многослойных конструкций требует применения эффективных методов анализа их напряженно-деформированного состояния (НДС) при силовом нагружении. К настоящему времени разработано достаточно много различных двумерных теорий для расчета слоистых конструкций [1 – 6]. Однако при использовании двумерных моделей всегда необходимо учитывать тот факт, что эти модели не являются универсальными и имеют определенные границы применимости, которые зависят не только от параметров самой конструкции (симметрия, толщина, степень разнородности механических характеристик слоев конструкции), но и условий ее нагружения (распределенная или локализованная, статическая или динамическая нагрузка). При этом необходимо учитывать, что в большинстве двумерных теорий значения компонент поперечных напряжений оцениваются приближенно. Именно неуниверсальностью двумерных теорий отчасти объясняется их большое количество, когда авторы для исследования определенных эффектов разрабатывают новые уточненные модели. Зачастую границы применимости этих теорий неизвестны, существуют только общие рекомендации по их применению или известен положительный опыт их использования для решения отдельных задач. Подробный анализ характеристик двумерных методов расчета дается в работах [7 – 10].

Наиболее точно поведение многослойных конструкций описывается в рамках трехмерной теории упругости. Получение аналитического решения и численных результатов при этом связано с преодолением значительных трудностей. Поэтому большинство задач в этой постановке решено для случая воздействия статических нагрузок. Наиболее известное решение трехмерной задачи для многослойных конструкций при статическом нагружении получено N.J. Pagano [11].

В настоящей работе предлагается аналитико-численный метод решения трехмерной задачи о нестационарных колебаниях многослойной ортотропной пластины при импульсном нагружении. Метод может быть полезен для оценки точности двумерных теорий, а также для исследования процесса распространения волн.

Постановка задачи. Слоистая пластина постоянной толщины отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1).

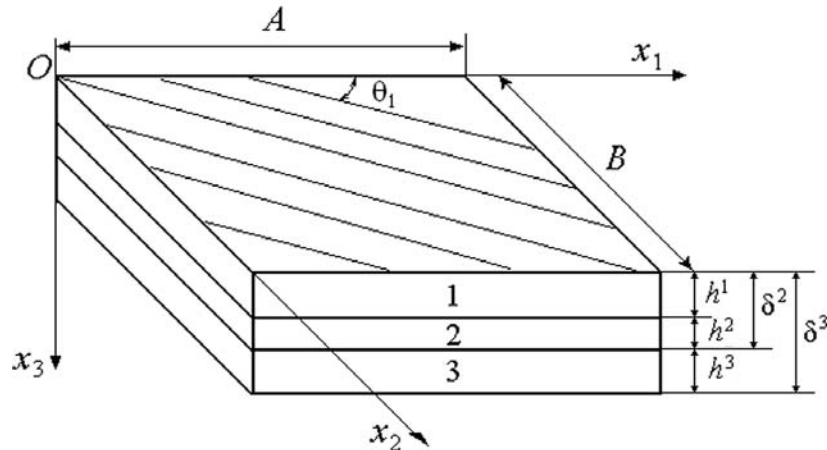


Рисунок 1 – Слоистая ортотропная пластина

Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Количество слоев в пакете равно l , h^i – толщина i -го слоя. Слои изготовлены из ортотропных материалов, θ_i – угол армирования в i -м слое. Считается, что направления армирования в каждом слое параллельны координатным осям Ox_1, Ox_2 .

К наружной поверхности первого слоя приложена поперечная нагрузка $q = q(x_1, x_2, t)$.

Поведение каждого слоя описывается трехмерными уравнениями равновесия [12]:

$$\frac{\partial p_{jk}^i}{\partial x_k} = \rho^i \frac{\partial^2 u_j^i}{\partial t^2}, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,l}. \quad (1)$$

Здесь i – номер слоя; p_{jk}^i – компоненты тензора напряжений i -го слоя; ρ^i – удельная плотность i -го слоя; $u_j^i = u_j^i(x_1, x_2, x_3, t)$ – проекция вектора перемещений \bar{u}^i точки i -го слоя на координатную ось Ox_j .

Система уравнений (1) дополняется граничными условиями на наружных поверхностях 1-го и l -го слоев:

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 0 & - p_{31}^1 = p_{32}^1 = 0, \quad p_{33}^1 = -q, \\ \text{при } x_3 = \xi^l & - p_{3k}^l = 0, \quad k = \overline{1,3}, \\ & \xi^i = \sum_{j=1}^i h^j; \end{aligned} \quad (2)$$

условиями контакта соседних слоев:

$$\text{при } x_3 = \xi^i - u_k^i = u_k^{i+1}, \quad p_{3k}^i = p_{3k}^{i+1}, \quad k = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad (3)$$

условиями на контуре опирания:

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 = 0, A - p_{11}^i = u_2^i = u_3^i = 0, \\ \text{при } x_2 = 0, B - p_{22}^i = u_1^i = u_3^i = 0, \quad i = \overline{1, l} \end{aligned} \quad (4)$$

и начальными условиями:

$$\bar{u}^i(x_1, x_2, x_3, 0) = \frac{\partial \bar{u}^i(x_1, x_2, x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, l}. \quad (5)$$

Деформации в каждом слое пластины предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого случая ортотропии имеет вид [3, 12]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2G_{12}^i} p_{12}^i, \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{1}{2G_{13}^i} p_{13}^i, \quad \varepsilon_{23}^i = \frac{1}{2G_{23}^i} p_{23}^i.$$

где $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для i -го слоя; $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модули сдвига для i -го слоя, $p_{\alpha\beta}^i$ – тензор напряжений.

Модули Юнга и коэффициенты Пуассона связаны соотношениями:

$$E_1^i \nu_{21}^i = E_2^i \nu_{12}^i, \quad E_2^i \nu_{32}^i = E_3^i \nu_{23}^i, \quad E_3^i \nu_{13}^i = E_1^i \nu_{12}^i.$$

Решив приведенное выше соотношение для деформаций (6) относительно компонент напряжений, получим

$$\begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \\ p_{12}^i \\ p_{13}^i \\ p_{23}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}^i & A_{22}^i & A_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ A_{13}^i & A_{23}^i & A_{11}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{44}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{55}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{66}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \\ \varepsilon_{12}^i \\ \varepsilon_{13}^i \\ \varepsilon_{23}^i \end{pmatrix},$$

где $A_{\alpha\beta}^i$ – модули упругости, которые выражаются через величины $E_{\alpha}^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ и $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ [3].

Метод решения. Перемещения и внешняя нагрузка разлагаются в двойные ряды Фурье по системе ортогональных функций, удовлетворяющих условиям опирания (4):

$$u_k^i = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{kmn}^i(x_3, t) \cdot B_{kmn}(x_1, x_2), \quad k = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, l},$$

$$q = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}(x_3, t) \cdot B_{3mn}(x_1, x_2); \quad (7)$$

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \cos \frac{n\pi x_2}{B},$$

$$B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}.$$

Далее частные производные от функций $\Phi_{kmn}^i(x_3, t)$ по координате x_3 заменяются их конечно-разностным представлением. Для этого в каждом слое строится регулярная сетка

$$x_3^{i(s)} = \xi^{i-1} + s\tau^i, \quad s = \overline{0, S^i}, \quad \tau^i = \frac{h^i}{S^i}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Для аппроксимации частных производных используется трехточечный шаблон

$$\frac{\partial \Phi_{kmn}^{i(s)}}{\partial x_3} = \frac{\Phi_{kmn}^{i(s+1)} - \Phi_{kmn}^{i(s-1)}}{2\tau^i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{kmn}^{i(s)}}{\partial x_3^2} = \frac{\Phi_{kmn}^{i(s+1)} - 2\Phi_{kmn}^{i(s)} + \Phi_{kmn}^{i(s-1)}}{(\tau^i)^2}.$$

Здесь $\Phi_{kmn}^{i(s)} = \Phi_{kmn}^i(x_3^{i(s)}, t)$.

В результате этих преобразований система (1) для каждой пары (m, n) приобретает вид

$$\frac{A_{55}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{1mn}^{i(s-1)} + \left[-A_{11}^i \frac{m^2 \pi^2}{A^2} - A_{44}^i \frac{n^2 \pi^2}{B^2} - \frac{2A_{55}^i}{(\tau^i)^2} \right] \Phi_{1mn}^{i(s)} + \frac{A_{55}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{1mn}^{i(s+1)} -$$

$$- (A_{12}^i + A_{44}^i) \frac{mn\pi^2}{AB} \Phi_{2mn}^{i(s)} + \frac{A_{13}^i + A_{55}^i m\pi}{2\tau^i A} (\Phi_{3mn}^{i(s+1)} - \Phi_{3mn}^{i(s-1)}) = \rho^i \frac{d^2 \Phi_{1mn}^{i(s)}}{dt^2},$$

$$- (A_{12}^i + A_{44}^i) \frac{mn\pi^2}{AB} \Phi_{1mn}^{i(s)} + \frac{A_{66}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{2mn}^{i(s-1)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2A_{66}^i}{(\tau^i)^2} + A_{44}^i \frac{m^2 \pi^2}{A^2} + A_{22}^i \frac{n^2 \pi^2}{B^2} \right] \Phi_{2mn}^{i(s)} + \frac{A_{66}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{2mn}^{i(s+1)} + \\
& + \frac{A_{23}^i + A_{66}^i}{2\tau^i} \frac{n\pi}{B} \left(\Phi_{3mn}^{i(s+1)} - \Phi_{3mn}^{i(s-1)} \right) = \rho^i \frac{d^2 \Phi_{2mn}^{i(s)}}{dt^2}, \\
& - \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{2\tau^i} \frac{m\pi}{A} \left(\Phi_{1mn}^{i(s+1)} - \Phi_{1mn}^{i(s-1)} \right) - \frac{A_{23}^i + A_{66}^i}{2\tau^i} \frac{n\pi}{B} \left(\Phi_{2mn}^{i(s+1)} - \Phi_{2mn}^{i(s-1)} \right) + \\
& + \frac{A_{33}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{3mn}^{i(s-1)} - \left[\frac{2A_{33}^i}{(\tau^i)^2} + A_{55}^i \frac{m^2 \pi^2}{A^2} + A_{66}^i \frac{n^2 \pi^2}{B^2} \right] \Phi_{3mn}^{i(s)} + \\
& + \frac{A_{33}^i}{(\tau^i)^2} \Phi_{3mn}^{i(s+1)} = \rho^i \frac{d^2 \Phi_{3mn}^{i(s)}}{dt^2}, \quad s = \overline{0, S^i}, i = \overline{1, I}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Условия (2), (3), (5) определяются выражениями

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_{1mn}^{1(1)} - \Phi_{1mn}^{1(-1)}}{2\tau^1} + \frac{m\pi}{A} \Phi_{3mn}^{1(0)} = 0, \quad \frac{\Phi_{2mn}^{1(1)} - \Phi_{2mn}^{1(-1)}}{2\tau^1} + \frac{n\pi}{B} \Phi_{3mn}^{1(0)} = 0, \\
& - A_{13}^1 \frac{m\pi}{A} \Phi_{1mn}^{1(0)} - A_{23}^1 \frac{n\pi}{B} \Phi_{2mn}^{1(0)} + A_{33}^1 \frac{\Phi_{3mn}^{1(1)} - \Phi_{3mn}^{1(-1)}}{2\tau^1} = -q_{mn}, \\
& \frac{\Phi_{1mn}^{I(S^I+1)} - \Phi_{1mn}^{I(S^I-1)}}{2\tau^I} + \frac{m\pi}{A} \Phi_{3mn}^{I(S^I)} = 0, \\
& \frac{\Phi_{2mn}^{I(S^I+1)} - \Phi_{2mn}^{I(S^I-1)}}{2\tau^I} + \frac{n\pi}{B} \Phi_{3mn}^{I(S^I)} = 0, \\
& - A_{13}^I \frac{m\pi}{A} \Phi_{1mn}^{I(S^I)} - A_{23}^I \frac{n\pi}{B} \Phi_{2mn}^{I(S^I)} + A_{33}^I \frac{\Phi_{3mn}^{I(S^I+1)} - \Phi_{3mn}^{I(S^I-1)}}{2\tau^I} = 0; \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\Phi_{kmn}^{i(S^i)} = \Phi_{kmn}^{i+1(S^i)}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\begin{aligned}
& A_{55}^i \left(\frac{\Phi_{1mn}^{i(S^i+1)} - \Phi_{1mn}^{i(S^i-1)}}{2\tau^i} + \frac{m\pi}{A} \Phi_{3mn}^{i(S^i)} \right) = \\
& = A_{55}^{i+1} \left(\frac{\Phi_{1mn}^{i+1(1)} - \Phi_{1mn}^{i+1(-1)}}{2\tau^{i+1}} + \frac{m\pi}{A} \Phi_{3mn}^{i+1(0)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{66}^i \left(\frac{\Phi_{2mn}^{i(S^i+1)} - \Phi_{2mn}^{i(S^i-1)}}{2\tau^i} + \frac{n\pi}{B} \Phi_{3mn}^{i(S^i)} \right) = \\
& = A_{66}^{i+1} \left(\frac{\Phi_{2mn}^{i+1(1)} - \Phi_{2mn}^{i+1(-1)}}{2\tau^{i+1}} + \frac{n\pi}{B} \Phi_{3mn}^{i+1(0)} \right), \\
& - A_{13}^i \frac{m\pi}{A} \Phi_{1mn}^{i(S^i)} - A_{23}^i \frac{n\pi}{B} \Phi_{2mn}^{i(S^i)} + A_{33}^i \frac{\Phi_{3mn}^{i(S^i+1)} - \Phi_{3mn}^{i(S^i-1)}}{2\tau^i} = \\
& = -A_{13}^{i+1} \frac{m\pi}{A} \Phi_{1mn}^{i+1(0)} - A_{23}^{i+1} \frac{n\pi}{B} \Phi_{2mn}^{i+1(0)} + A_{33}^{i+1} \frac{\Phi_{3mn}^{i+1(1)} - \Phi_{3mn}^{i+1(-1)}}{2\tau^{i+1}}; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\Phi_{kmn}^{i(s)}(0) = \frac{d\Phi_{kmn}^{i(s)}(0)}{dt} = 0. \quad (11)$$

Условия (4) выполняются точно соответствующим выбором координатных функций B_{kmn} (7).

Условия (9) и (10) позволяют исключить из системы (8) значения $\Phi_{kmn}^{i(-1)}$, $\Phi_{kmn}^{i(S^i+1)}$ ($i = \overline{1, I}$; $k = \overline{1, 3}$; $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N}$) искомым функций в “законтурных” точках.

В результате решение задачи (1) – (5) о динамическом отклике многослойной пластины на воздействие импульсной нагрузки сводится для каждой пары (m, n) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В настоящей работе для интегрирования полученной системы используется модифицированный метод разложения решения в ряд Тейлора [13].

Численные результаты. Для проверки эффективности предложенного метода решения проведен тестовый расчет НДС квадратной двухслойной толстой пластины ($A/\delta^2 = 5$) при импульсном нагружении [5, 6]

$$q = P_0 H(t) \sin \frac{\pi X_1}{A} \sin \frac{\pi X_2}{B}, \quad P_0 = 0,1 \text{ МПа},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Геометрические параметры пластины – $A = B = 25$ см, $h^1 = h^2 = 2,5$ см. Механические и физические характеристики – $E_1 = 525$ ГПа, $E_2 = E_3 = 21$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23}$ ГПа,

$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$, $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$. Углы армирования – $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$.

В табл. 1 приведены результаты расчета максимальных значений прогибов и напряжений по трехмерной теории, а также данные расчета по теории первого порядка [5], теории высокого порядка [6] и обобщенной теории {7,6} [14]. Первые две из упомянутых выше двумерных теорий основаны на гипотезах для всего пакета [5, 6], а третья – на гипотезах высокого порядка, применяемых для каждого слоя [14]. Значения прогибов и напряжений ρ_{11}^i приведены посередине тыльной стороны композита ($x_1 = x_2 = 12,5 \text{ см}$, $x_3 = 5 \text{ см}$), напряжений ρ_{12}^i – в верхнем углу пластины ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), а максимальные значения напряжений ρ_{13}^i выбирались среди соответствующих максимальных значений напряжений в точках, расположенных посередине боковой стороны по всей толщине пластины ($x_1 = 0$, $x_2 = 12,5 \text{ см}$, $x_3 \in [0, 5]$).

Таблица 1 – Максимальные значения прогибов и напряжений

Прогиб и напряжения	Двухмерные теории			Трехмерная теория
	первого порядка [5]	высокого порядка [6]	обобщенная [14]	
$u_3^2 \times 10^3, \text{ см}$	0,4604	0,4685	0,4635	0,4641
$\rho_{11}^2, \text{ МПа}$	3,5770	3,5526	3,7764	3,7548
$\rho_{12}^1, \text{ МПа}$	0,2627	0,2928	0,3020	0,3022
$\rho_{13}^2, \text{ МПа}$	0,1894	0,2172	0,3104	0,3001

Из табл. 1 видно, что максимальные значения прогибов, полученные по трехмерной теории, хорошо согласуются с данными расчета по всем двумерным теориям. Несколько хуже совпадают значения напряжений, что объясняется тем, что в теориях первого и высокого порядков не учитываются процессы обжатия по толщине и в них используют гипотезы, применяемые для всего пакета. С трехмерной теорией наиболее точно совпадают данные расчета по обобщенной теории, которая относится к дискретно-структурным теориям, позволяет точно выполнить условия контакта между слоями и учитывает поперечное обжатие каждого слоя.

Изменение напряжений ρ_{11}^2 во времени приведено в табл. 2. Результаты расчета по предложенному методу сопоставляются с данными расчета по указанным выше двумерным теориям. Отметим,

что в теориях первого и высокого порядков максимальные значения напряжений возникают при $t = 100$ мкс, а по обобщенной и трехмерной теориям – при $t = 102$ мкс.

Таблица 2 – Изменение изгибных напряжений во времени

t , мкс	Двухмерные теории			Трехмерная теория
	первого порядка [5]	высокого порядка [6]	обобщенная [14]	
20	0,3003	0,2848	0,3899	0,3877
40	1,1168	1,1360	1,1437	1,1436
60	2,2441	2,272	2,2669	2,2691
80	3,1678	3,191	3,1815	3,1806
100	3,5526	3,578	3,6644	3,6680
120	3,2687	3,231	3,4139	3,4132
140	2,3708	2,330	2,4945	2,4970
160	1,3017	1,196	1,3204	1,3354
180	0,3539	0,3040	0,2799	0,2676
200	0,0394	0,0742	-0,0540	-0,0435

Из табл. 2 видно, что результаты, полученные по трехмерной теории, хорошо согласуются с данными расчета по двухмерным теориям не только по максимальным значениям, но и по характеру изменения их во времени.

Выводы

Предложен аналитико-численный метод решения задачи о нестационарных колебаниях многослойных ортотропных пластин в рамках трехмерной теории упругости, являющийся простым в реализации.

Возможности предложенной теории и достоверность полученных результатов иллюстрируются на тестовом примере расчета НДС толстой двухслойной пластины при импульсном нагружении. Результаты сравниваются с аналогичными данными, полученными с помощью двухмерных теорий. Установлено хорошее их соответствие.

Данный метод может быть использован при оценке области применимости двухмерных теорий, при исследовании процесса распространения упругих волн, а также когда НДС исследуемой конструкции носит существенно трехмерный характер.

Список использованных источников

1. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с
2. Пискунов, В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.

3. Рассказов, А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.

4. Ferreira, A.J.M. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics / A.J.M.Ferreira, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge // Computers Structures. – 2005. – Vol. 83, Issue 27. – P. 2225–2237.

5. Reddy, J.N. On the solutions to forced motions of rectangular composite plates / J.N. Reddy // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 49, Issue 2. – P. 403–408.

6. Kant, T. Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on refined theory and implicit time integration schemes / T. Kant, J.H. Varaiya, C.P. Arora // Computers and Structures. – 1990. – Vol. 36, Issue 3. – P. 401–420.

7. Григолюк, Э.И. Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.

8. Григоренко, Я.М. Решение задач и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 11. – С. 3–37.

9. Chen, W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories / W. Chen, Z. Wu // Recent Patents on Mechanical Engineering – 2008. – Vol. 1, Issue 1. – P. 29–44.

10. Carrera, E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56, Issue 3. – P. 287–308.

11. Pagano, N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates / N. J. Pagano // Journal of Composite Materials. – 1970. – Vol. 4, No. 1. – P. 20–34.

12. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1950. – 300 с.

13. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Уgrimov. – Х.: ХНЭУ, 2004. – 252 с.

14. Ugrimov, S.V. Layered orthotropic plates. Generalized theory / S.V. Ugrimov, A.N. Shupikov // Composite structures. – 2015. – Vol. 129, Issue 1. – P. 224–235.

Поступила в редакцию 30.11.2015.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*