

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ФОРМЫ ДЕФЕКТОВ ЛИСТОВЫХ ДЕТАЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В работе [1] приведена классификация дефектов формы тонкостенных листовых деталей летательных аппаратов, которая является основой для разработки унифицированных и универсальных алгоритмов и процедур устранения дефектов и расчетов энергетических потребностей для этих целей.

Устранение дефектов формы осуществляется путем пластического деформирования, удельные характеристики которого – линейные и сдвиговые деформации – по величине определяются параметрами изогнутой поверхности. Согласно [2] деформации вычисляются по формулам

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

где $w = f(x, y)$ – функция прогиба срединной поверхности, а обозначение осей показано на рис. 1.

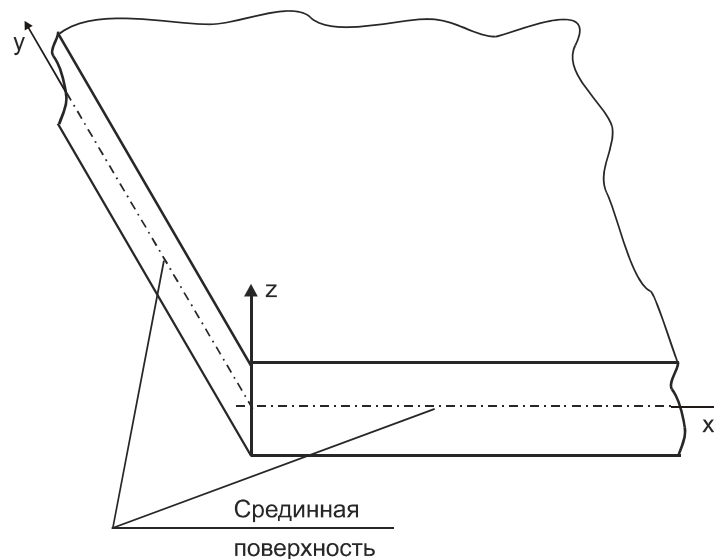


Рисунок 1 – Обозначение системы координат

Зная уравнения связи между деформациями и вызвавшими их напряжениями, которые имеют вид обобщенного физического закона

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy} \frac{2(1+\mu)}{E},$$

можно вычислить потенциальную энергию деформации, т.е. становится возможным прогнозирование энергетических потребностей для устранения дефекта формы.

Отсюда следует важность используемой для определения деформаций функции формы дефекта. Корректное задание возможно только по результатам статистической обработки данных измерений с привлечением математических методов аппроксимации. Более продуктивным представляется использование апробированных функций описания изогнутых поверхностей в строительной механике [3]. В целях упрощения расчетов, но без потери общности, целесообразно воспользоваться балочной аналогией [4,5], в соответствии с которой пластина состоит из большого количества элементарных балочек (рис. 2).

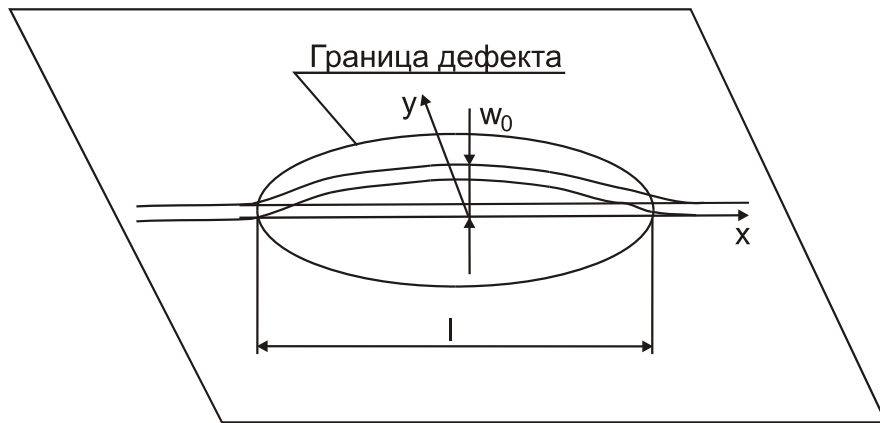


Рисунок 2 – Формирование балочной аналогии

Задав различные формы изогнутой оси балочки, можно вычислить накопленную внутреннюю энергию деформации, а взаимное сравнение найденных значений позволит выбрать адекватное описание формы дефекта. Рассмотрение именно энергетики процесса является оправданным из-за феноменологического характера энергии, зависящей только от начала и конца процесса.

Внутренняя энергия балки определяется зависимостью [6]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{K}{2} \int_0^l \frac{Q^2}{GF} dx, \quad (3)$$

где M , Q – изгибающий момент и перерезывающая сила соответственно; (EI) – изгибная жесткость балки; (GF) – сдвиговая жесткость балки; K – коэффициент формы поперечного сечения.

Предположив, что ось y (рис. 2) является осью симметрии, а жесткость постоянна по длине балки, формулу (3) можно записать так:

$$U = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(EI)} \int_0^{l/2} M^2 dx + \frac{K}{(GF)} \int_0^{l/2} Q^2 dx \right]. \quad (4)$$

Из общего дифференциального уравнения упругой оси балки

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{(EI)} \quad (5)$$

следует, что

$$M = (EI) \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (6)$$

Тогда для перерезывающей силы имеем зависимость

$$Q = \frac{dM}{dx} = (EI) \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (7)$$

Таким образом, искомая функция формы должна быть не менее трех раз дифференцируемой.

Дефекты формы могут характеризоваться «плавным» или «крутым» отрывом от исходной (правильной) поверхности (рис. 3).

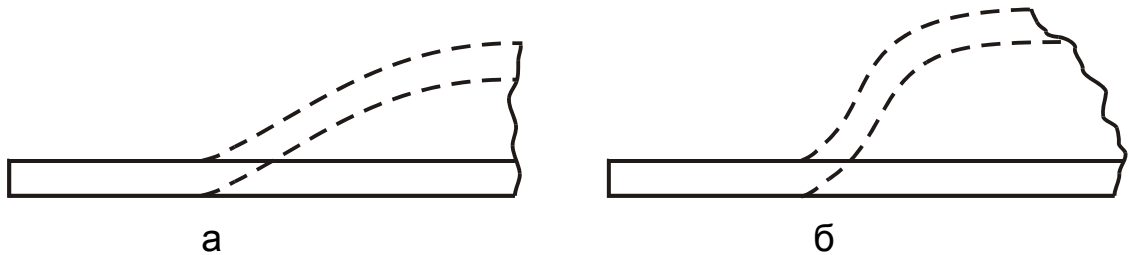


Рисунок 3 – Схемы формирования берегов дефекта

С учетом [2, 3, 6] форму изогнутой оси балки можно описать следующими функциями:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad (8)$$

$$w = w_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l}; \quad (9)$$

$$w = w_0 \sin^3 \frac{\pi x}{l}; \quad (10)$$

$$w = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (11)$$

где коэффициенты a , b , c , d определяются из очевидных граничных

условий: при $x = 0$, $w = 0$ $\frac{dw}{dx} = 0$; при $x = \frac{l}{2}$, $w = w_0$ $\frac{dw}{dx} = 0$.

Тогда

$$w = 4 \frac{x^2}{\ell^2} w_0 \left(3 - 4 \frac{x}{\ell} \right); \quad 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad (12)$$

В таблице приведены некоторые результаты исследований влияния вида функции формы дефекта на потенциальную энергию деформации. Поскольку любая система стремится минимизировать свою внутреннюю энергию, то есть основания полагать, что наиболее адекватно описывает реальное явление та функция из рассмотренных (8) – (12), которая приводит к накоплению меньшего количества внутренней энергии. Для сравнения значений энергии выполним следующие преобразования и упрощения. Элементарные балочки (рис. 2) имеют прямоугольное поперечное сечение и без ущерба качества можно принять, что стороны одинаковы. Тогда для момента инерции имеем зависимость:

$$I = \frac{b\delta^3}{12} = \frac{\delta f^2}{b 12} = |\delta = b| = \frac{f^2}{12}, \quad (13)$$

где b – ширина элементарной балочки; δ – толщина листа; f – площадь поперечного сечения.

$$\text{При } K = 1,2 \quad G = E / 2(1 + \mu) \quad \text{и} \quad \ell = 10\delta. \quad (14)$$

Из приведенных в таблице данных следует, что практически одинаковые результаты дают представления (9) и (12), т.е. форму дефекта целесообразно описать уравнением типа (9) или (12).

На основании этого вывода и учитывая, что подавляющее большинство предельных поверхностей состояний представляет собой эллипсоиды, можно принять, что контур дефекта формы описывается эллипсом. Для обозначений, показанных на рис. 4, уравнение контура принимает вид

$$\frac{x^2}{\ell_1^2} + \frac{y^2}{\ell_2^2} = 1. \quad (15)$$

Выразим из уравнения (15) ℓ_x и ℓ_y :

$$\ell_x = \frac{\ell_1}{\ell_2} \sqrt{\ell_2^2 - y^2}; \quad \ell_y = \frac{\ell_2}{\ell_1} \sqrt{\ell_1^2 - x^2}. \quad (16)$$

Тогда выпуклость дефекта формы можно описать формулами

$$w = w_0 \cos^2 \frac{\pi x}{\ell_x} \cos^2 \frac{\pi y}{\ell_y}; \quad (17)$$

$$w = w_0 \left(\frac{2x^3}{\ell_x^3} - \frac{3x^2}{\ell_x^2} + 1 \right) \left(\frac{2y^3}{\ell_y^3} - \frac{3y^2}{\ell_y^2} + 1 \right). \quad (18)$$

Функции параметров формы дефекта

| | | | | |
|---------------------------------|---|---|--|--|
| Вид функции формы | $w = w_0 \sin \frac{\pi X}{l}$ | $w = w_0 \sin^2 \frac{\pi X}{l}$ | $w = w_0 \sin^3 \frac{\pi X}{l}$ | $w = 4 \frac{x^2}{l^2} w_0 \left(3 - 4 \frac{x}{l} \right)$ |
| $\frac{dw}{dx}$ | $w_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi X}{l}$ | $w_0 \frac{\pi}{l} \sin \frac{2\pi X}{l}$ | $3w_0 \frac{\pi}{l} \left(\cos \frac{\pi X}{l} - \cos^3 \frac{\pi X}{l} \right)$ | $w_0 \left(\frac{24x}{l^2} - \frac{48x^2}{l^3} \right)$ |
| $\frac{d^2w}{dx^2}$ | $-w_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi X}{l}$ | $w_0 \frac{2\pi^2}{l^2} \cos \frac{2\pi X}{l}$ | $3w_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi X}{l} \left(3\cos^2 \frac{\pi X}{l} - 1 \right)$ | $24 \frac{w_0}{l^2} \left(1 - 4 \frac{x}{l} \right)$ |
| $\frac{d^3w}{dx^3}$ | $-w_0 \frac{\pi^3}{l^3} \cos \frac{\pi X}{l}$ | $-w_0 \frac{4\pi^3}{l^3} \sin \frac{2\pi X}{l}$ | $3w_0 \frac{\pi^3}{l^3} \cos \frac{\pi X}{l} \left(9\cos^2 \frac{\pi X}{l} - 7 \right)$ | $-96 \frac{w_0}{l^3}$ |
| $\frac{2U\ell^3}{(EI)^2 w_0^2}$ | $A_1 = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{(EI)} + \frac{K}{(GF) \ell^2} \right)$ | $A_2 = \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{1}{(EI)} + \frac{K}{(GF) \ell^2} \right)$ | $A_3 = \frac{9\pi^4}{64} \left(\frac{5}{(EI)} + \frac{K}{(GF) \ell^2} \right)$ | $A_4 = 48 \left(\frac{1}{(EI)} + \frac{K}{(GF) \ell^2} \right)$ |
| A_i с учетом 13 и 14 | $\frac{1197}{Ef^2}$ | $\frac{644}{Ef^2}$ | $\frac{995}{Ef^2}$ | $\frac{649}{Ef^2}$ |

| | | | | |
|----------------|--|--|--|--|
| График прогиба | | | | |
| Эюры M | | | | |
| Эюры Q | | | | |

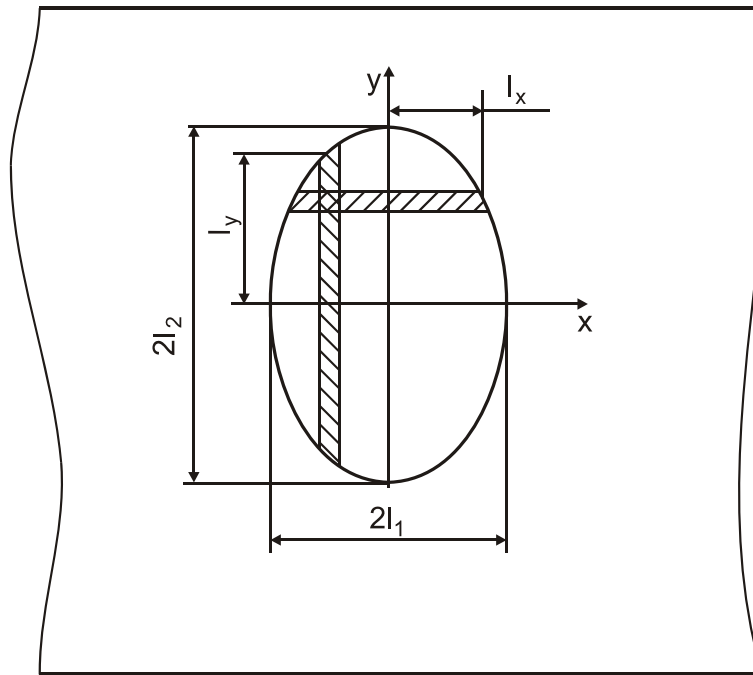


Рисунок 4 – Геометрия дефекта формы

Введя обозначения

$$\bar{x} = \frac{x}{l_1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l_2} \quad (19)$$

перепишем уравнения (17) и (18) через безразмерные координаты

$$w = w_0 \cos^2 \frac{\pi \bar{x}}{\sqrt{1 - \bar{y}^2}} \cos^2 \frac{\pi \bar{y}}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}}; \quad (20)$$

$$w = w_0 \left(\frac{2\bar{x}^3}{\sqrt{(1 - \bar{y}^2)^3}} - \frac{3\bar{x}^2}{\sqrt{1 - \bar{y}^2}} + 1 \right) \left(\frac{2\bar{y}^3}{\sqrt{(1 - \bar{x}^2)^3}} - \frac{3\bar{y}^2}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} + 1 \right). \quad (21)$$

Значения погонных изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил для рассматриваемого изогнутого состояния определяются известными зависимостями теории пластин, например, [6]

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

где

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (23)$$

Работу внутренних сил пластины вычисляют по формуле [2]

$$U = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left\{ D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + 2D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (24)$$

где

$$D_k = \frac{G\delta^3}{12}. \quad (25)$$

После подстановки выражения (20) или (21) в (22) и (24) получим очень громоздкие зависимости, включающие в себя не интегрируемые аналитически функции, что затрудняет инженерный анализ. Принимая во внимание, что в процессе калибровки устраняется дефект определенного объема, естественно предложить возможность замены эллипса основания дефекта на прямоугольник с такой же площадью и с отношением сторон, как у эллипса. Тогда для определения размеров нового основания дефекта (рис. 5) справедлива система уравнений

$$\begin{cases} \pi l_1 l_2 = 4ab; \\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{a}{b}, \end{cases} \quad (26)$$

где a, b – стороны приведенного прямоугольного контура дефекта. Решением этой системы являются формулы для определения a и b :

$$a = \frac{1}{2} l_1 \sqrt{\pi}; \quad b = \frac{1}{2} l_2 \sqrt{\pi}. \quad (27)$$

Это упрощение позволяет записать математические выражения (20) и (21) в следующем виде:

$$w = w_0 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}; \quad (28)$$

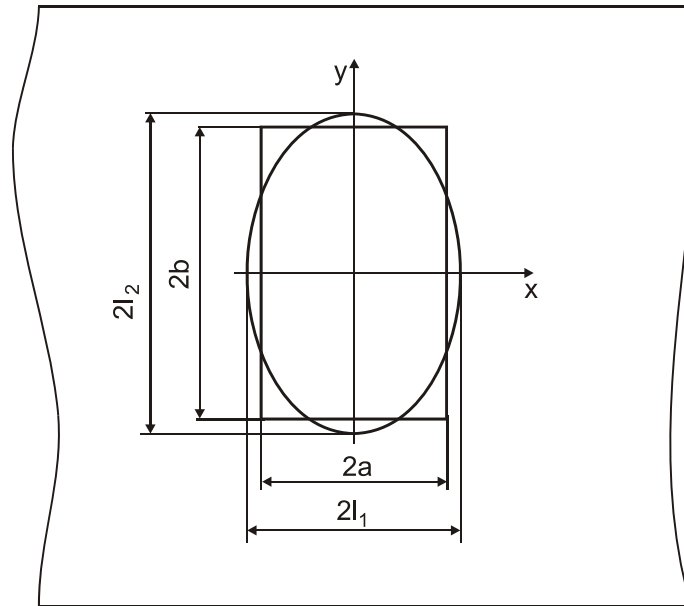


Рисунок 5 – Схема приведения контура дефекта

$$w = w_0 \left(\frac{2x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{2y^3}{b^3} - \frac{3y^2}{b^2} + 1 \right). \quad (29)$$

Выполнив соответствующее дифференцирование согласно (22) и подставив в (24), получим (с учетом (14))

$$U_1 = Dw_0^2 \frac{\pi^4}{32ab} \left(\frac{3}{\lambda^2} + 2\mu + 3\lambda^2 \right) + D_k w_0^2 \frac{\pi^4}{8ab}; \quad (30)$$

$$U_2 = \frac{2Dw_0^2}{ab} \left(\frac{4,46}{\lambda^2} + 2,88\mu + 4,46\lambda^2 \right) + D_k w_0^2 \frac{11,5}{ab}. \quad (31)$$

Сравнение этих результатов подтверждает сделанный ранее вывод об адекватности описания формы дефекта в виде (28) или (29). Выбор той или иной зависимости является чисто субъективным фактором и влияет на выбор процедур численного анализа.

В заключение заметим, что замена используемых вначале синусов (см. (9)) на косинусы (см. (28)) связана с применяемой системой координат (см. рис. 4 или 5). Если контур дефекта выходит на край детали, то необходимо добавлять неравенство типа

$$x \leq a_0; \quad y \leq b_0, \quad (32)$$

где a_0 и b_0 – соответственно расстояние от начала координат до краев детали.

Таким образом, выражения (28) и (29) с учетом неравенств (32) описывают пространственную форму дефекта листовой детали.

Выводы

Таким образом, разработано математическое описание геометрии формы дефекта тонкостенных листовых деталей летательных аппаратов, что позволит определить энергетические потребности для устранения таких дефектов.

Список использованных источников

1. Остапчук, В.В. Классификация вероятных дефектов формы листовых деталей летательных аппаратов / В.В. Остапчук // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 3(83). – Х.: НАКУ, 2015. – С. 41–44.

2. Образцов, И. Ф. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиац. спец. вузов [Текст] / И. Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

3. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С.Г. Лехницкий. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 355 с.

4. Карпов, Я.С. Методика эскизного проектирования дискретно опертых трехслойных панелей из композиционных материалов / Я.С. Карпов, В.П. Копычко // Вопросы оптимизации тонкостенных силовых конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-т им. Н.Е. Жуковского. – Вып. 4. – Х., 1983. – С. 3–7.

5. Гайдачук, В.Е. Методика предэскизного проектирования панельных конструкций летательных аппаратов с трубчатым наполнителем / В.Е. Гайдачук, А.В. Кондратьев, Е.В. Омельченко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 59(3). – Х.: НАКУ, 2009. – С. 73–84.

6. Писаренко, Г.С. Соппротивление материалов [Текст] / под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко – К.: Вища школа, 1986. – 736 с.

Поступила в редакцию 18.11.2015.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*