УДК 517.27 О.М. Прохорова, канд. физ.-мат. наук

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ В РАБОТАХ КИЕВСКОГО МАТЕМАТИКА Б.Я.БУКРЕЕВА

Введение

Актуальность данной темы определяется тем, что математическими моделями многочисленных задач технического и экономического содержания являются задачи оптимизации. Эти задачи, в свою очередь, могут быть сведены к задачам математического программирования. Например, в задачах проектирования летательных аппаратов и их двигателей это выбор оптимального проекта или оптимальной конструкции. Так задача определения оптимальных параметров турбореактивных двигателей может быть сведена к многокритериальной задаче параметрической оптимизации [1]. В настоящее время для решения задач оптимизации используются алгоритмы, связанные с нахождением экстремумов функций нескольких переменных [2, 3].

Ключевую роль в задачах оптимизации играет теория экстремумов функций многих переменных, как часть математического анализа. Она относится к математическим основам исследования операций. В общем виде задачу математического программирования можно записать, как известно, следующим образом: максимизировать целевую функцию $f(x_1,...,x_n)$ на допустимом множестве G, где G задается системой

$$g_i(x_1,...,x_n) \geq 0, i = 1,...,m, \quad (x_1,...,x_n) \in X,$$

где X - некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$. Таким образом, многие задачи оптимизации являются фактически задачами на условный экстремум функции многих переменных.

Эта статья продолжает исследования автора о развитии теории экстремумов функций многих переменных в 19 и 20 веках [4], [5]. В них установлено, что О. Коши внес существенный вклад в эту теорию, фактически впервые применив в задаче на экстремум функции многих переменных фактически критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм. Также исследован вклад в эту теорию его современников К. Гаусса, Н.-Х. Абеля, Б. Больцано, принадлежащих к пионерам в деле введения в математику повышенной строгости.

Указано, что в работах Коши наметилась та арифметизация анализа, которая станет позже сутью исследований К. Вейерштрасса. Установлено, что К. Вейерштрассом впервые дано определение экстремума функций многих переменных на языке «ε, δ» в том виде, в котором оно входит во все современные учебники математического анализа [14, 15]. Выяснено также, что им с математической точки зрения строго сформулированы и аргументированы все положения теории экстремумов функций многих переменных.

Несмотря на то, что после К.Вейерштрасса не осталось «белых пятен» в этой теории, интерес математиков к задачам на экстремум не угас. Для нас особый интерес представляют работы киевского математика Б.Я.Букреева.

Постановка задачи исследования

Целью данной статьи является исследование работ Б.Я.Букреева 1892, 1896, 1914 гг., посвященных нахождению экстремумов функций двух и трех переменных, и сравнение его результатов с изложением данной тематики в современных учебниках по высшей математике и математическому анализу. Метод исследования - историко-научный анализ первоисточника, позволяющий научные результаты, полученные в конце 19 - начале 20 века, оценить с позиций современного математического анализа.

О Б.Я.Букрееве

Ученик В.П.Ермакова и М.Е.Ващенко-Захарченко Борис Яковлевич Букреев (1859 – 1962) окончил Киевский университет в 1882г. Его докторская диссертация «О фуксовых функциях нулевого ранга» (1889) явилась первой отечественной работой по теории автоморфных функций, фундамент которой за несколько лет до этого заложили Ф.Клейн и А.Пуанкаре. Он также занимался исследованиями по теории рядов, вариационному исчислению, неевклидовой геометрии.

Б.Я.Букреев был сторонником обоснования анализа в соответствии с идеями К.Вейерштрасса, Р. Дедекинда, Л.Кронекера. Его лекции были значительно выше по уровню математической строгости, чем лекции Киевских математиков старшего поколения. Б.Я.Букреев является одним из основателей Киевского физико-математического общества. В Киевском университете он преподавал с 1885 года около 75 лет [6].

Исследование работ Б.Я.Букреева

В статье “К вопросу о maximum и minimum функций двух переменных” (1892 г.) [7] Букреев сводит задачу отыскания экстремумов функций двух переменных к вопросу о нахождении особых точек плоских кривых. Он замечает, что этот вопрос полностью решен 50 лет назад. При этом Букрееев имеет ввиду статью Шарля Брио (Ch.Briot, 1817 – 1882)

«Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques» [8]. Идея этой теории, по словам Букреева, принадлежит Ж. Штурму и Ж. Лиувиллю, а профессор математики в Сорбонне, ученик Лиувилля, Ш. Брио лишь усовершенствовал ее. И хотя в статье говорится только об алгебраических кривых, теория может быть без всяких изменений приложена вообще к любым кривым, в уравнении которых функция $\Phi(x,y)=0$ «способна разлагаться в ряд Тейлора». Причем метод этот настолько прост, что уже давно входит в учебники. В качестве примера Букреев указывает на курс Г. Лорана (1887) [9] (Paul Mathien Hermann Laurent (1841 – 1908), воспитанник Политехнической школы и ее репетитор.)

Пусть функция $F(x,y)=0$ может быть разложена в ряд Тейлора и требуется найти ее максимум и минимум. Если $a=0$, $b=0$ — одно из решений системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

то точка (a,b) будет особой для кривой

$$F(x,y)-F(a,b)=0. \tag{1}$$

На вопрос, какого характера должна быть эта особенность, Букреев отвечает следующим образом. Достаточное условие для того, чтобы функция $F(x,y)$ достигала в точке (a,b) экстремума состоит в том, чтобы приращение функции

$$\Delta F=F(a+\xi,b+\eta)-F(a,b)$$

не меняло знак при любых бесконечно малых ξ,η. Но это означает, что точка (a,b) есть изолированная (point isolé) для кривой (1). (У Букреева - сопряженная). Термин «особые точки» был введен в 1740 году французским математиком де Гюа де Мальвом (Jean Paul de Gua de Malves, 1712 – 1785).

В дальнейшем Букреев ограничивается самым важным, по его мнению, случаем, когда разложение приращения ΔF второго порядка. В этом случае будем иметь дело с обычной особой точкой (у Букреева – points singuliers ordinaires).

Если требуется определить экстремум функции $F(x,y,z)$ трех независимых переменных, которая может быть разложена в ряд Тейлора, то вопрос сведется к разысканию особых точек некоторых поверхностей.

Этому вопросу он предполагал посвятить отдельную статью. Эта статья «О некоторых частных случаях в вопросе о максимуме и минимуме функций трех переменных» [10] появилась в 1896 году.

В ней Букреев рассмотрел несколько частных случаев, в каждом из которых определитель

$$\begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где

$$A = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y^2},$$

$$C = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z^2}, D = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y},$$

$$E = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}, F = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y \partial z}$$

обращается в нуль, но при этом не все его миноры равны нулю. Отдельно он решает задачу, когда все миноры этого определителя обращаются в нуль. При этом в своих исследованиях он пользуется результатами В.П.Ермакова [11], обобщая их на случай трех переменных.

Если определитель (2) обращается в нуль, когда выполняются равенства

$$AB - D^2 = 0, AC - E^2 = 0, A \neq 0,$$

$$\left(AB - D^2\right)\left(AC - E^2\right) - \left(AF - DE\right)^2 = 0,$$

то вопрос приводится к случаю, когда в разложении приращения функции $F(x, y, z)$ члены второго порядка сводятся к первому из них. Изучению этого вопроса Букреев предполагал посвятить отдельную статью. Однако больше его статьи с исследованиями по этому вопросу в печати не появлялись.

Особые случаи, возникающие при разыскании экстремумов функций многих переменных, связанные с определением особых точек, стали исследоваться в связи с определением особых точек уравнений только в начале 20 века. Например, в учебнике Э.Гурса [12].

Продолжая исследования в области экстремальных задач, Букреев уже в начале 20 века опубликовал статью «Определение осей центрального конического сечения, как задача на maximum-minimum», в которой геометрическую задачу об определении осей центрального конического сечения привел к вопросу об условном экстремуме функции двух переменных (1914) [13].

Пусть дано центральное коническое сечение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \qquad (3)$$

здесь $AC - B^2 \neq 0$. Нахождение его осей приводится к вопросу о максимумах и минимумах функции $F(x, y) = x^2 + y^2$, в которой x и y связаны условием (3). Следуя Лагранжу, Букреев составляет функцию

$$u = x^2 + y^2 - \lambda\left(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1\right),$$

где λ - некоторый постоянный множитель.

Дифференцируя, получает

$$\frac{1}{2}u_x{}' = x - \lambda(Ax + By), \frac{1}{2}u_y{}' = y - \lambda(Bx + Cy),$$
$$\frac{1}{2}u''_{xy} = -\lambda B, \quad \frac{1}{2}u''_{xx} = 1 - \lambda A, \quad \frac{1}{2}u''_{yy} = 1 - \lambda C. \qquad (3.1)$$

Ввиду непрерывности функций, приравниваем нулю u'_x и u'_y, получаем

$$\begin{cases} (1 - \lambda A)x - \lambda By = 0, \\ -\lambda Bx + (1 - \lambda C)y = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решения этой системы $x = 0, y = 0$ не удовлетворяют условию (3). Поэтому мы должны иметь

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda A & -\lambda B \\ -\lambda B & 1 - \lambda C \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Обозначим λ_1, λ_2 - корни этого уравнения, тогда

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A + C}{AC - B^2}, \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{AC - B^2}. \qquad (6)$$

В силу уравнения (5), одно из уравнений (4) является следствием другого. Взяв поэтому какое-либо из них, например первое, и решая его совместно с (3), получим для каждого из корней уравнения (5) два значения для x (следовательно, и для y), равных, но противоположных по знаку. Для

$$\lambda = \lambda_1 : x = x_1, -x_1; y = y_1, -y_1;$$

для

$$\lambda = \lambda_2 : x = x_2, -x_2; y = y_2, -y_2. \qquad (7)$$

Очевидно, что два диаметра, определяемые точками $(x_1;y_1)$и $(-x_1;-y_1)$; (x_2,y_2)и $(-x_2;-y_2)$, взаимно перпендикулярны.

Действительно, из (4) находим

$$\frac{y}{x} = \frac{1-\lambda A}{\lambda B},$$

а с учетом (6), получим

$$\frac{1-\lambda_1 A}{\lambda_1 B} \cdot \frac{1-\lambda_2 B}{\lambda_2 B} = -1,$$

т.е. выполняется условие перпендикулярности.

Чтобы определить, что дает каждое из решений (7), изучим приращение функции $u(x,y)$

$$\Delta u = u(x,y) - u(x',y') = (x-x')u'_x(x',y') +$$
$$+(y-y')u'_y(x',y') + \frac{1}{2}\Big\{(x-x')^2 u''_{xx} +$$
$$+2(x-x')(y-y')u''_{xy} + (y-y')^2 u''_{yy}\Big\},$$

где (x',y')какое-либо из решений (7).

Подставим в систему (4) x',y' вместо x и y, а вместо λ то его значение (обозначим его λ'), которому соответствует решение (x',y'), получим тождества

$$(1-\lambda' A)x' - \lambda' B y' = 0,$$
$$-\lambda' B x' + (1-\lambda' C)y' = 0.$$

Из этих тождеств, с учетом условия связи, получим

$$x'^2 + y'^2 - \lambda' = 0,$$

т.е. $x_1^2 + y_1^2 = \lambda_1$; $x_2^2 + y_2^2 = \lambda_2$ являются квадратами полудиаметров сечений. Таким образом,

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}',\mathrm{y}') = \mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2 = \lambda'.$$

Вследствие этого, а также с учетом (3.1), (4), (5), можно записать приращение функции $u(x,y)$ следующим образом

$$u(x,y)-\lambda' = \frac{1}{2}(1-\lambda' A)\left\{x-x'-\frac{\lambda' B}{1-\lambda' A}(y-y')\right\}^2.$$

Таким образом, второй дифференциал представляет собой полный квадрат линейной относительно приращений аргументов формы. Следовательно, приращение функции сохраняет знак множителя $1-\lambda' A$.

Чтобы определить знак этого множителя, Букреев замечает, что

$$(1-\lambda_1 A)(1-\lambda_2 A) = 1-(\lambda_1+\lambda_2)A +$$
$$+\lambda_1\lambda_2 A^2 = \frac{-B^2}{AC-B^2}.$$

Следовательно, поскольку для эллипса должно выполняться неравенство $AC-B^2>0$, то множители $1-\lambda_1 A$ и $1-\lambda_2 A$ должны иметь противоположные знаки. А для гиперболы ($AC-B^2<0$) – одинаковые.

Для эллипса, таким образом, если

$$AC-B^2>0,\ 1-\lambda_1 A>0,\ 1-\lambda_2 A<0,$$

то диаметр, проходящий через точки $(x_1;y_1)$ и $(-x_1;-y_1)$, будет малой осью (т.к. λ_1, соответствующее этим значениям, доставляет минимум функции), а проходящий через точки $(x_2;y_2)$ и $(-x_2;-y_2)$ – большой осью эллипса.

Квадраты полуосей соответственно будут:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2(AC-B^2)}\left\{A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right\},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2(AC-B^2)}\left\{A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right\}.$$

Из (3) видно, что

$$(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2 = A,$$

т.е. $A>0$, а, следовательно, в силу условия, $AC-B^2>0$, будет и $C>0$. Оба корня уравнения (5) будут положительны, и поэтому меньшему из них соответствует знак «–» перед радикалом, а большему – «+».

Угловые коэффициенты этих осей соответственно будут:

$$\frac{1-\lambda_1 A}{\lambda_1 B}=\frac{-A+C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2B},$$

$$\frac{1-\lambda_2 A}{\lambda_2 B}=\frac{-A+C-\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2B}.$$

Далее Букреев рассматривает случай гиперболы:

$$AC-B^2<0.$$

Так как при этом

$$(1-\lambda_1 A)+(1-\lambda_2 A)=\frac{AC-B^2-\left(A^2+B^2\right)}{AC-B^2}>0,$$

то как $1-\lambda_1 A$, так и $1-\lambda_2 A$ имеют положительный знак. Корни уравнения (5) имеют противоположные знаки, а так как $x'^2+y'^2=\lambda'$, то из них следует взять только положительный. Для него функция $u(x,y)$, а, следовательно, и x^2+y^2 будут иметь минимум. Для отрицательного корня длина соответствующего диаметра будет чисто мнимой величиной.

Положительный корень дает секущую (действительную) ось гиперболы. Так как при этом $AC-B^2<0$, то $\lambda_2<\lambda_1$, то есть λ_1 будет представлять квадрат секущей полуоси.

Интересно отметить, что в начале статьи имеется эпиграф: «Из практических занятий по дифференциальному исчислению»

Сейчас эта задача также входит в современные сборники задач по математическому анализу, например, [16, с.338].

Выводы

Впервые в историко-математической литературе проанализирован вклад Б.Я. Букреева в теорию экстремумов функций многих переменных. Также впервые в историко-математической литературе исследована его статья «Определение осей центрального конического сечения, как задача на maximum-minimum”. Это одна из прикладных задач аналитической геометрии, которая и сейчас сохраняет свою актуальность и входит в современные задачники. Установлено, что Б.Я. Букреев занимался исследованием особых случаев, возникающих при отыскании экстремумов функций многих переменных, а также задачами на отыскание особых точек плоских кривых, тесно связанными с задачами на экстремум. К сожалению, дальнейшие исследования в том направлении он не продолжил.

Задачи на экстремум имеют широкое применение в математических моделях различных практических задач. Поэтому такой раздел математического анализа, как теория экстремумов функций многих переменных, всегда присутствует в учебниках по высшей математике и является неотъемлемой частью курса высшей математики в высших учебных заведениях для студентов различных специальностей.

Список использованных источников

1. Меняйлов, А. В. Применение эволюционных методов решения задач оптимизации компрессоров газотурбинных двигателей [Текст] / А. В. Меняйлов, А. А. Трончук, Е. М. Угрюмова // Авиационно-космическая техника и технологии. – 2008. – № 5(52). – С. 59-65.

2. Karakasis, M. K. Aerodynamic Design of Compressor Airfoils using Hierarchical Algorithms [Text] / M. K. Karakasis, K. C. Giannakoglu, D. G. Koubogiannis // Conference Proceedings of the 7-th European Conference on Turbomachinery. – Athens (Greece), 2007. – P. 567-576.

3. Li, Yi-Guang. Small-Scale Gas Turbine Performance Improvement Approach [Text] / Yi-Guang Li // Abstracts Book and CD-ROM Proceedings of the 18-th International Symposium on Air Breathing Engines. – Beijing (Chine). – 2007. – 9 p. (ISABE Paper No. 2007 – 1374).

4. Прохорова, О. М. Теория экстремумов функций многих переменных в учебнике О. Коши по дифференциальному исчислению [Текст] / О.М. Прохорова // Вісник ХНАУ. – 2014. – № 7. – С. 164 – 168.

5. Прохорова, О.М. О вкладе К.Вейерштрасса в теорию экстремумов функций многих переменных [Текст] / О.М. Прохорова // Радіоелектронні і комп’юторні системи. – 2015. – № 3(73). – С. 125 –128.

6. Штокало, И.З. История отечественной математики [Текст] / Под. ред. И.З.Штокало. – Киев: Наукова думка, 1967. – Т. 2. – 598 с.

7. Букреев Б.Я. К вопросу о maximum и minimum функций двух переменных [Текст] / Б.Я. Букреев // Математический сборник. – М.: Моск. ун-т. – 1893. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 813 – 822.

8. Briot, C. Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques [Text] / C. Briot. // Journal de Mathématiques pures et appliquées. - Paris. – Bachelier. – 1845. – T.X. – P. 368 – 378.

9. Laurent, H. Traité d`analyse [Text] / H. Laurent. – Paris. – Gauthier-Villars. – 1887. – T. 2. – 745 p.

10. Букреев, Б.Я. О некоторых частных случаях в вопросе о максимум и минимум функций трех переменных [Текст] / Б.Я. Букреев. // Математический сборник. – М.: Моск. ун-т, 1897. – Т. 20. – Вып. 1. – С. 92-104.

11. Ермаков, В.П. Maxima и minima функций двух переменных

[Текст] / В.П. Ермаков. // Математический сборник. – М.: Моск. ун-т, 1892. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 415-436.

12. Goursat, E. Cours d`analyse mathématique [Text] / E. Goursat. – Paris. – Gauthier-Villars. – 1902 – 1905. – T. 1, 2.

13. Букреев, Б.Я. Определение осей центрального конического сечения как задача на maximum-minimum [Текст] / Б.Я. Букреев. // Университетские известия. – Киев: изд-во унив. Св. Владимира. – 1916. – № 9-10. – С. 1-4.

14. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст] / Л. Д.Кудрявцев. – М. : Наука, 1990. – Т. 2. – 444 с.

15. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 616 с.

16. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1977. – 527 с.

Поступила в редакцию 23.01.2017.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.