

Третя основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами

Багато проблем пов'язаних з проектуванням композитів у галузі машинобудування, прокладки тунелів або підземних комунікацій, зводяться до розв'язання змішаної задачі теорії пружності, коли на межах одних циліндричних порожнин задано напруження, а на інших – переміщення.

У науковій літературі розглядаються змішані задачі теорії пружності переважно для плоскої або контактної задачі. Є аналітичні підходи до розв'язання задач теорії пружності в напруженнях для однієї циліндричної порожнини в просторі [1 – 4]. Числові результати в вісесиметричному випадку наведено для періодичного навантаження порожнини вздовж її осі [3].

У роботі [5] розглянуто методику розрахунку простору з паралельними циліндричними порожнинами, на яких задано переміщення без аналізу напруженого стану.

В роботах [6 – 9] розглянуто просторову задачу для двох і більше циліндричних порожнин або включень із заданими напруженнями в пружному циліндрі, де наведено деякі результати числових розрахунків напружень, але не наведено детального аналізу впливу взаємного розташування порожнин та зовнішньої межі.

В роботі [10] виконано детальний аналіз напруженого стану простору з циліндричними порожнинами для крайових умов у переміщеннях.

У цій статті наведено аналітико - числове розв'язання третьої основної просторової задачі теорії пружності (на межах задано напруження та переміщення) для декількох паралельних кругових циліндричних порожнин у пружному просторі. Як приклад подано докладний числовий аналіз напружено - деформованого стану простору з двома порожнинами і вивчено взаємний вплив порожнин.

В основі методу розв'язання задачі, як і в [5 – 10], лежить узагальнений метод Фур'є [11].

Постановка задачі. Метод розв'язання

Пружний ізотропний простір має $N = N_1 + N_2$ кругових непересічних між собою циліндричних паралельних порожнин. На межах одних порожнин (N_1) задані переміщення, на інших (N_2) – напруження. Переміщення та напруження будемо вважати швидко спадними до нуля по координаті Z на далеких відстанях від початку координат.

Потрібно розв'язати рівняння рівноваги Ламе

$$\Delta \vec{U} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{U} = 0, \quad (1)$$

за умов:

$$\vec{U} = \vec{U}_0^{(p)} \text{ на } S_p, p = 1, 2, \dots, N_1; \quad (2)$$

$$F\vec{U} = \vec{F}_0^{(q)} \text{ на } S_q, q = 1, 2, \dots, N_2, \quad (3)$$

де S_p, S_q – поверхні порожнин з крайовими умовами у вигляді переміщень і напружень відповідно;

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right] \quad (4)$$

де \vec{U} – вектор переміщення, $F\vec{U}$ – вектор напруження;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \text{ – відповідно оператор Лапласа і градієнта; } \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \text{ – орти декартової системи координат; } \sigma \text{ – коефіцієнт Пуассона; } \vec{n} \text{ – орт нормалі до поверхні циліндра; } G \text{ – модуль зсуву.}$$

На нескінченності переміщення та напруження дорівнюють нулю.
Розв'язання задачі шукаємо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{p=1}^N \vec{U}_p(\rho_p, \phi_p, z); \quad (5)$$

$$\vec{U}_p = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{1,m}(M_p; \lambda) + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{3,m}(M_p; \lambda) \right], \quad (6)$$

де $x_m^{(p)}(\lambda), y_m^{(p)}(\lambda), z_m^{(p)}(\lambda)$ – невідомі функції; $\vec{S}_{k,m}$ – базисні розв'язки рівняння Ламе зовні циліндра:

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(s_m); \\ \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \cdot s_m; \\ \vec{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot}[\vec{e}_z \cdot s_m]; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$s_m(M_p; \lambda) = (\text{sign}(\lambda))^m \cdot K_m(|\lambda| \rho_p) \cdot e^{i(m \cdot \phi_p + \lambda \cdot z)}; M_p = (\rho_p, \phi_p, z).$$

При розв'язанні задачі також будуть використані базисні розв'язки рівняння Ламе, регулярні всередині циліндра $\rho < \rho_0$. Вони мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{1,m}(M_\rho; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(r_m); \\ \bar{R}_{2,m}(M_\rho; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4(\sigma - 1) \left(\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \bar{e}_\varphi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \cdot r_m; \\ \bar{R}_{3,m}(M_\rho; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot} [\bar{e}_z \cdot r_m]; \\ r_m(M_\rho; \lambda) &= I_m(\lambda \rho) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda \cdot z)}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

де $I_m(x), K_m(x)$ - функції Бесселя [2]

Розв'язання (7), (8) наведено в [11].

Напруження на поверхні пружного тіла з нормаллю \vec{n} обчислюються за допомогою оператора напруження (4). Для базисних векторів (7), (8) при $\vec{n} = \bar{e}_\rho$ та $\rho = \rho_0$ [1] маємо

$$\left. \begin{aligned} F\vec{U}_{1,m}^\pm &= \frac{2 \cdot G}{\rho_0} \cdot \left[\mp Du_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho + i \cdot \bar{e}_\varphi) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp Du_{m+1}^\pm \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho - i \cdot \bar{e}_\varphi) + Du_m^\pm \cdot \bar{e}_z \right]; \\ F\vec{U}_{2,m}^\pm &= \frac{2 \cdot G}{\rho_0} \cdot \left[\mp \left[a_m + (\lambda \rho_0)^2 + (2\sigma - 3)D \right] \times \right. \\ &\quad \times u_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho + i \cdot \bar{e}_\varphi) \mp \left[b_m + (\lambda \rho_0)^2 + (2\sigma - 3)D \right] u_{m+1}^\pm \times \\ &\quad \times \frac{e^{-i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho - i \cdot \bar{e}_\varphi) + i \left[m^2 + (\lambda \rho_0)^2 + (2\sigma - 1)D \right] \cdot u_m^\pm \cdot \bar{e}_z \left. \right]; \\ F\vec{U}_{3,m}^\pm &= \frac{G}{\rho_0} \cdot \left[\pm (D + m - 1) u_{m-1}^\pm \cdot \frac{e^{i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho + i \cdot \bar{e}_\varphi) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp (D - m - 1) u_{m+1}^\pm \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{2} (\bar{e}_\rho - i \cdot \bar{e}_\varphi) - i \cdot m \cdot u_m^\pm \cdot \bar{e}_z \right], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де $\vec{U}_{1,m}^{\pm} = \begin{pmatrix} \vec{S}_{1,m} \\ \vec{R}_{1,m} \end{pmatrix}$; $u_m^{\pm} = \begin{pmatrix} s_m \\ r_m \end{pmatrix}$; $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$; $a_m = (m-1) \cdot (m-1+2\sigma)$; $b_m = (m+1)(m+1-2\sigma)$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орти циліндричної системи координат.

При розв'язанні задачі узагальненим методом Фур'є будемо користуватися формулами переходу в базисних розв'язках від однієї циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером p , до іншої циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером q . Ці формули мають вигляд [11]:

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) \cdot \vec{R}_{1,n}(M_q; \lambda); \\ \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) \cdot \vec{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + H_{m,n}^{(2)}(\rho, q) \times \\ &\times \vec{R}_{1,n}(M_q; \lambda); \\ \vec{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) \cdot \vec{R}_{3,n}(M_q; \lambda), \end{aligned} \right\} (10)$$

де $H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}$;

$H_{m,n}^{(2)}(\rho, q) = \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} (-1)^{n+1} e^{i(m-n)\alpha_{pq}} [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})]$;

$\tilde{K}(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

ℓ_{pq}, α_{pq} – позначені на рис. 1.

Для знаходження переміщення або напруження на поверхні циліндра з номером q запишемо для переміщення (2), а для напруження (3) у вигляді

$$\vec{U} = \vec{U}_q + \sum_{p=1, p \neq q}^N \vec{U}_p. \quad (11)$$

Для циліндрів з крайовими умовами у вигляді переміщень перепишемо (11), застосувавши формули переходу (10):

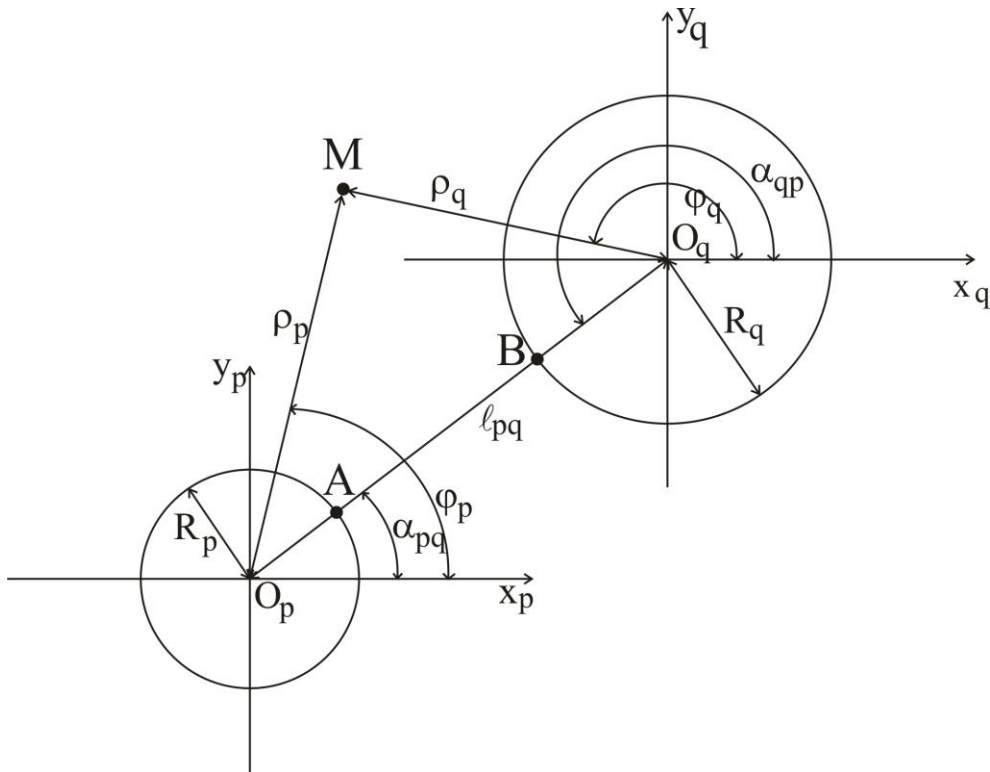


Рисунок1 – Циліндричні порожнини в пружному просторі

$$\begin{aligned}
 \vec{U} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_n^{(q)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{1,n}(M_q; \lambda) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{2,n}(M_q; \lambda) + \right. \right. \\
 \left. \left. + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{3,n}(M_q; \lambda) \right] + \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(x_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) + \right. \right. \\
 \left. \left. + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(2)}(p, q) \right) \cdot \vec{R}_{1,n}(M_q; \lambda) + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \times \right. \\
 \left. \left. \times \vec{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \vec{R}_{3,n}(M_q; \lambda) \right] \right\}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

В останній формулі всі базисні розв'язки записано в системі координат (ρ_q, φ_q, z) циліндра з номером q .

Для реалізації крайових умов на поверхні q -го циліндра відомі вектори $\vec{U}_0^{(q)}(\phi, z)$ подано у вигляді розкладання

$$\vec{U}_0^{(q)}(\phi_q, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{h}_n^{(q)}(\lambda) \cdot e^{i(\lambda\phi_q + \lambda z)}, \quad (13)$$

$$\text{де } \vec{h}_n^{(q)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi_q \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_0^{(q)}(\phi_q, z) \cdot e^{-i(\lambda z + n\phi_q)}, \quad q = 1, 2, \dots, N_1,$$

та прирівнюємо вираз (12) до крайових умов $\vec{h}_n^{(q)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
& x_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,n}(M_q; \lambda) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,n}(M_q; \lambda) + \\
& + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{3,n}(M_q; \lambda) \Big] + \sum_{\rho=1, \rho \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\left(x_m^{(\rho)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) + \right. \\
& + y_m^{(\rho)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(2)}(\rho, q) \Big) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda) + y_m^{(\rho)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) \cdot \bar{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + \\
& \left. + z_m^{(\rho)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(\rho, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_q; \lambda) \right] = \vec{h}_n^{(q)}(\lambda).
\end{aligned}$$

Якщо спроектувати ці векторні рівності на осі координат, то отримаємо сукупність $3 \cdot N_1$ нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для циліндрів з крайовими умовами у вигляді переміщень.

Для циліндрів з крайовими умовами у вигляді напружень застосуємо до (12) оператор напруження (4) та використаємо рівності (9) для базисних розв'язків. У результаті отримаємо вектор напруження від вектора (5) на поверхні циліндра з номером q (на тих циліндрах, де задано напруження). Прирівняємо цей вектор напруження при $\rho = R_q$ до заданого вектора напруження $\vec{F}_0^{(q)}$, який діє на поверхні порожнини з $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$:

$$\vec{F}_0^{(q)} = \vec{e}_\rho \cdot \sigma_\rho^{(q)} + \vec{e}_\varphi \cdot \tau_{\rho\varphi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \tau_{\rho z}^{(q)}, \quad (14)$$

де $\sigma_\rho^{(q)}$, $\tau_{\rho\varphi}^{(q)}$, $\tau_{\rho z}^{(q)}$ – задані функції. Розкладемо їх у ряди – інтеграли по ϕ і z :

$$\vec{F}_0^{(q)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \left(\vec{e}_\rho \cdot \tilde{\sigma}_{n,\rho}^{(q)}(\lambda) + \vec{e}_\varphi \cdot \tilde{\tau}_{n,\varphi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \tilde{\tau}_{n,z}^{(q)} \right) \quad (15)$$

В отриманій векторній рівності прирівняємо проєкції при \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ , \vec{e}_z . У результаті отримаємо три рівності, які після звільнення в них від рядів та інтегралів, дадуть три сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для циліндрів з крайовими умовами у вигляді напружень. Оскільки циліндричних порожнин з крайовими умовами у вигляді напружень всього N_2 ($q = 1, 2, \dots, N_2$), то таких сукупностей рівнянь буде $3N_2$.

Це буде розв'язувальна система рівнянь, яка складається з $3N_1 + 3N_2 = 3N$ рівнянь з $3N$ невідомими функціями $x_n^{(q)}(\lambda)$, $y_n^{(q)}(\lambda)$, $z_n^{(q)}(\lambda)$ задачі теорії пружності, що розглядається.

Необхідно зазначити, що нескінченні системи, до яких зведена проблема, припускають застосування до них методу редукції [11]. При цьому наблизені розв'язки сходяться до точного при збільшенні порядку системи.

Числовий аналіз задачі для двох циліндрів

Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у просторі, які розташовані на відстані $\ell_{pq} = 45$ см, під кутом $\alpha_{pq} = 0$. Радіуси порожнин

$R_p = 15$ см, $R_q = 10$ см, $\Delta\ell = \frac{R_p + R_q}{\ell_{pq}} = 0,55$. Простір – ізотропний

матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,35$, модуль пружності $E = 2$ кН / см². На межах циліндра (p) задано переміщення у вигляді

$U_p = u \cdot a^4 / (z^2 + a^2)^2$ (хвиля висотою u), $U_z = 0$, $U_\phi = 0$, $u = 1$,

$a = 10$. Застосувавши перетворення Фур'є, отримаємо ненульову проекцію $\bar{h}_n^p(\lambda)$ на вісь p у вигляді $u \cdot a \cdot e^{-a|\lambda|} \cdot (a \cdot |\lambda| + 1) / 4$. На межах ци-

ліндра q задано напруження $\sigma_\rho^{(q)} = \tau_{\rho\phi}^{(q)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої: $m = -8 \dots 8$, межі інтеграції від -12 до 12, обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурної формули Філона. Число вузлових точок – 2000. Це є достатнім при заданих розмірах і відстанях між циліндрами для виконання крайових умов з точністю 0,8%.

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь було знайдено невідомі функції та перевірено виконання крайових умов на межах циліндричних порожнин.

Під дією заданих переміщень і напружень на рис. 2 можна побачити вплив цих умов на циліндр (q).

На рис. 2, а показано, що найбільший вплив заданих умов на переміщення U_p відбувається в частині наближеної до «навантаженого» циліндра. На рис. 2, б можна побачити, що під дією заданих переміщень на циліндрі (q) відбувається досить складний напружений стан за рахунок того, що точки, які розташовані найближче до циліндра (p), наближаються до центра свого циліндра (q) значно більше за інших (рис. 2, а). В цій області відбувається розтягнення, ще й з максимальною величиною.

Щодо σ_z (рис. 3), то на циліндрі (q) відбуваються лише розтягнення в зоні, що наближена до циліндра (p).

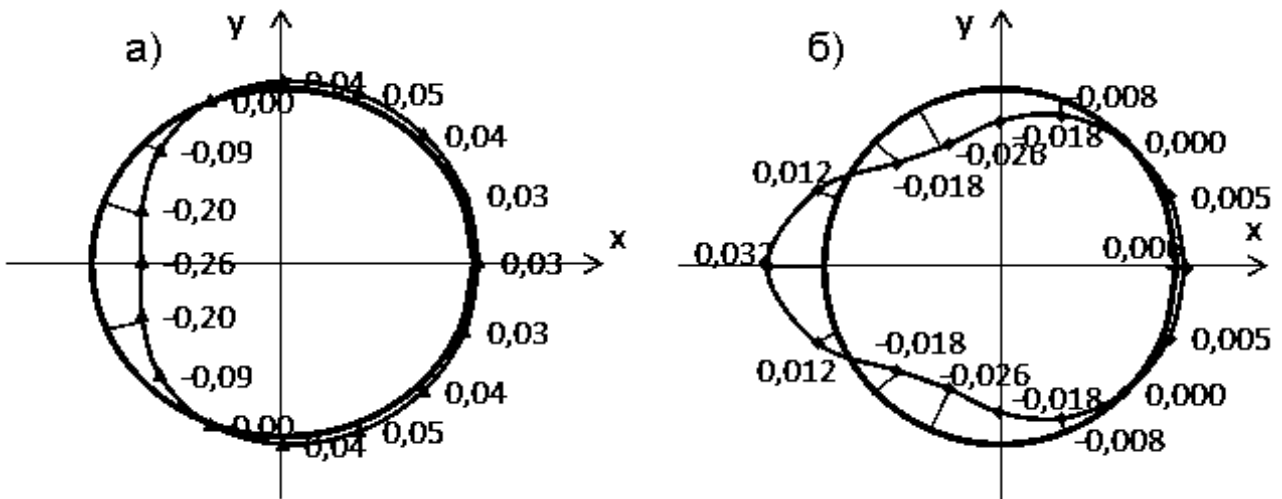


Рисунок 2 – Переміщення U_ρ та еюра σ_ϕ на циліндрі (q) у перерізі $z = 0$

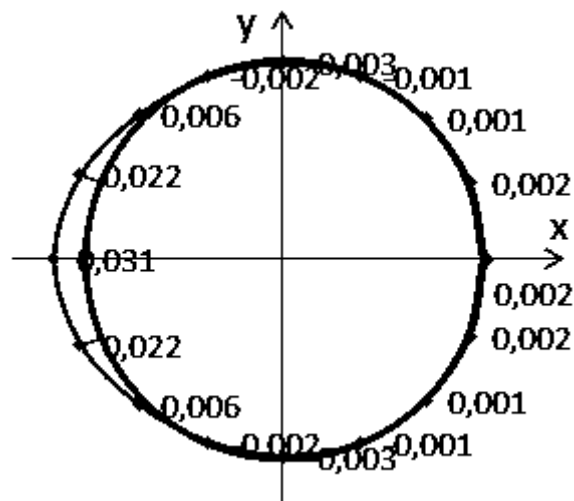


Рисунок 3 – Нормальні напруження σ_z у перерізі $z = 0$

Уздовж осі z (при $y = 0$) напруження σ_ρ показані на рис. 4, де можна побачити, що на циліндрі (q) вони дорівнюють нулю (згідно з крайовими умовами), а на циліндрі (p) напруження змінюються не тільки відповідно до хвилі переміщення, а ще й мають ділянки з розтягувальними зусиллями.

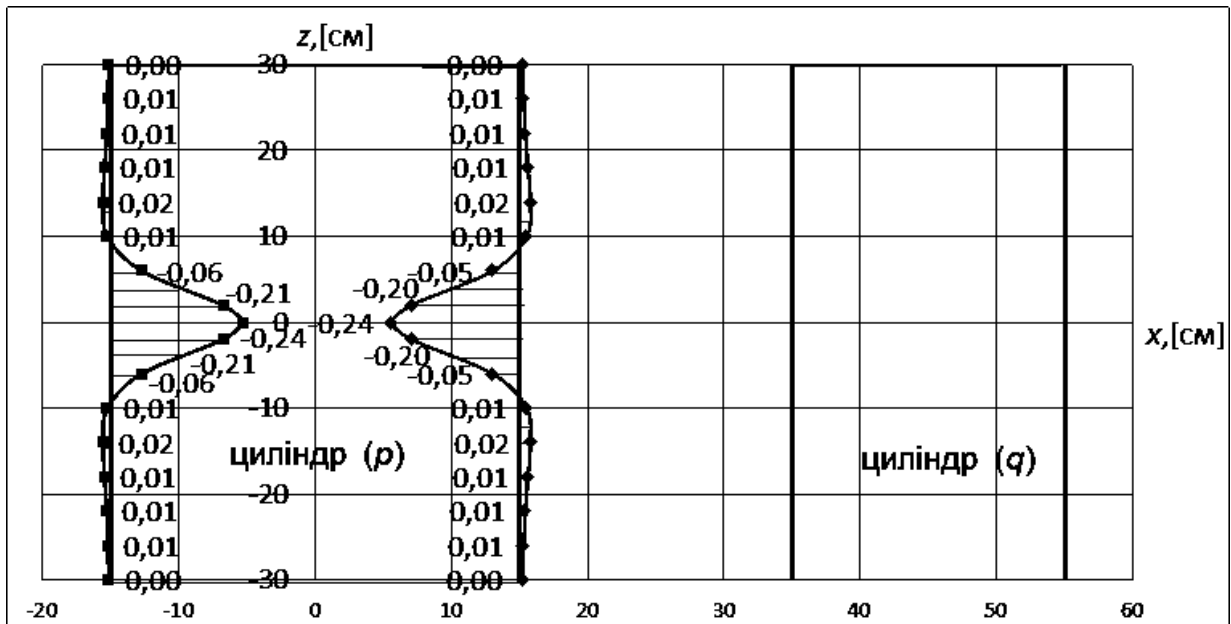


Рисунок 4 – Нормальні напруження σ_ρ вздовж осі Z

Епюра σ_ρ вздовж осі Z (рис. 5) ілюструє, що максимальні напруження на циліндрі (p) виникають при $z = \pm 6$ см, натомість на циліндрі (q) навпаки – максимальні переміщення.

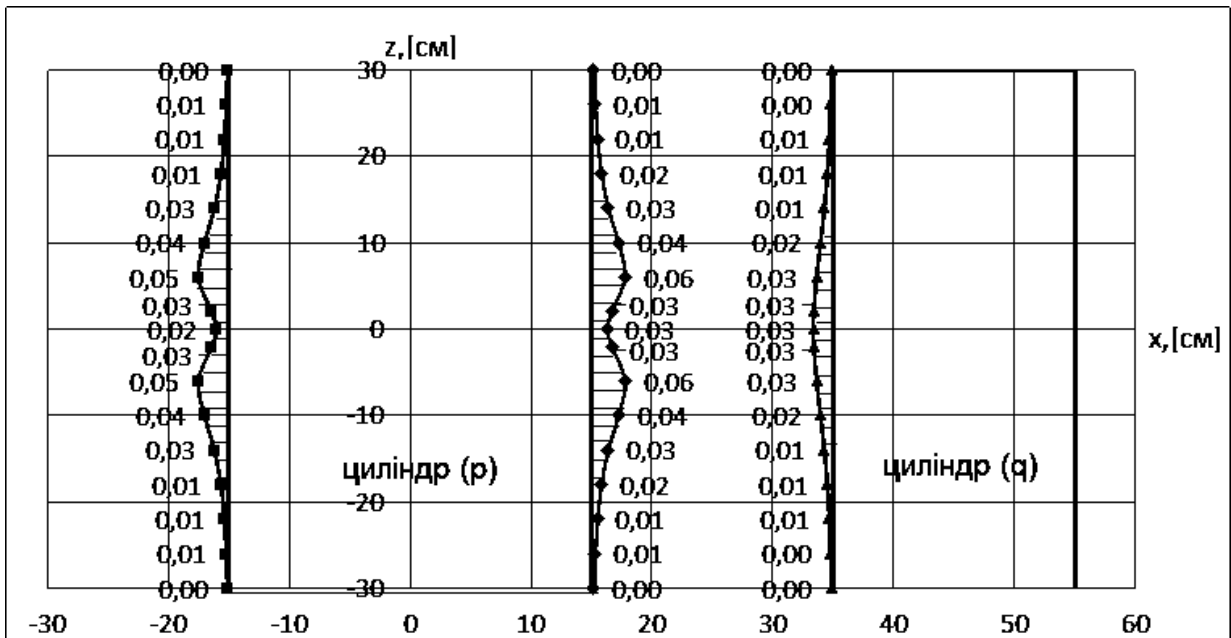


Рисунок 5 – Нормальні напруження σ_ϕ вздовж осі Z

Напруження σ_z на циліндрі (p) (рис. 6) крім стискальних (у зоні $z = 0$) мають розтягувальні значення (у зоні $z = 10$).

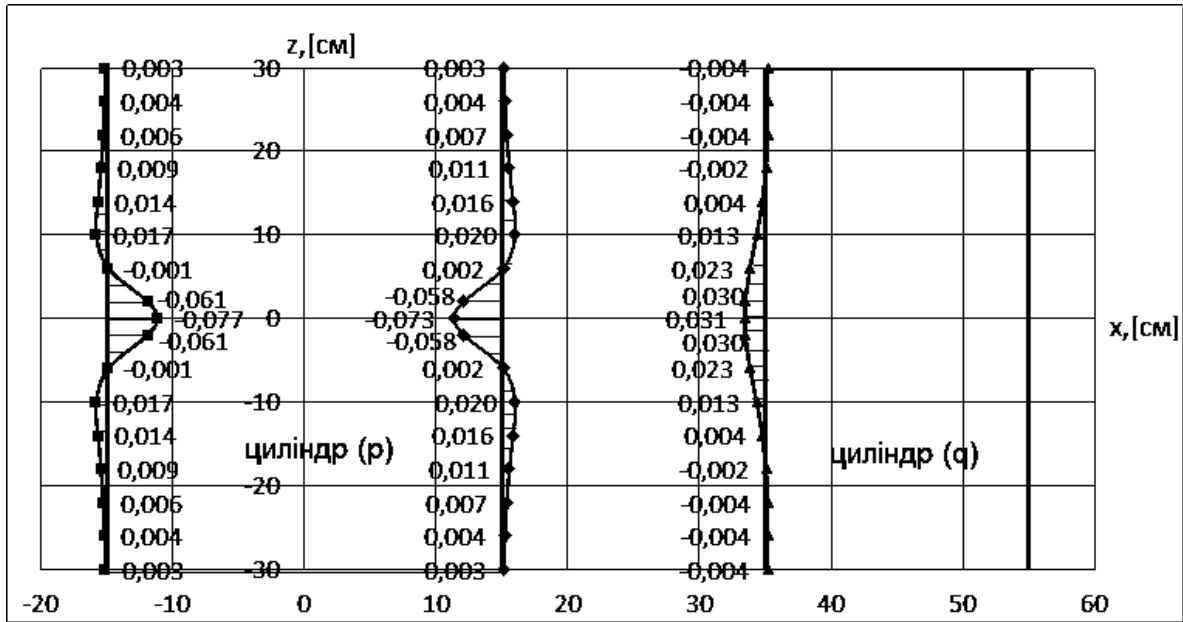


Рисунок 6 – Нормальні напруження σ_z вздовж осі Z

При наближенні або віддаленні циліндрів збільшується або зменшується їх вплив один на одного. На рис. 7 показано напружений стан на перешийку між циліндрами від т. А до т. В (рис. 1), з якого можна побачити, що при наближенні циліндра (q) до циліндра (p) напруження σ_φ і σ_z зростають, втім σ_ρ зменшується.

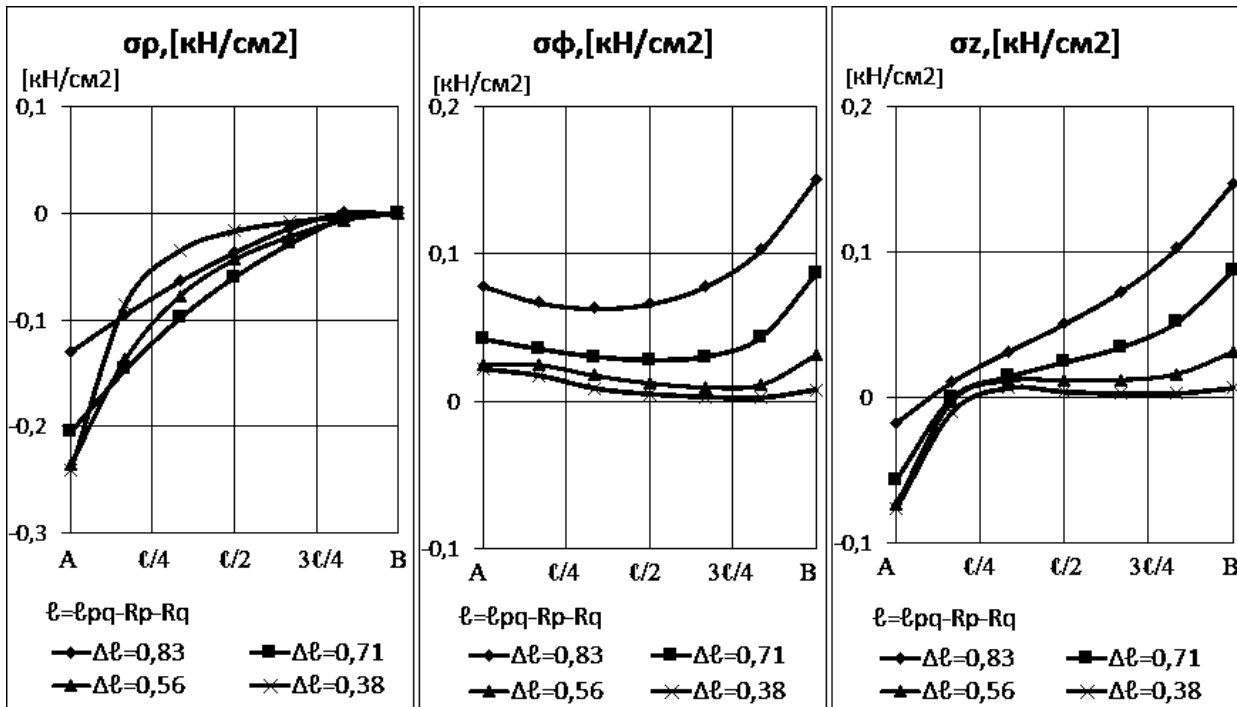


Рисунок 7 – Напружений стан на перешийку залежно від відстані l_{pq}

Якщо на циліндрі (ρ) переміщення прирівнюємо до нуля, а на циліндрі (q) напруження задамо у вигляді

$$\sigma_{\rho}^{(q)} = -1 \text{ кН/см}^2, |z| \leq z_1 = 20, \sigma_{\rho}^{(q)} = 0, |z| > z_1 = 20,$$

$$\tau_{\rho\varphi}^{(q)} = 0, \tau_{\rho z}^{(q)} = 0,$$

то застосувавши перетворення Фур'є, отримаємо

$$\tilde{\sigma}_{n,\rho}^{(q)}(\lambda) = \frac{-\sin(\lambda z_1)}{\pi\lambda}, \tilde{\tau}_{n,\varphi}^{(q)} = 0, \tilde{\tau}_{n,z}^{(q)} = 0.$$

У результаті розв'язання системи рівнянь одержимо епюри нормальних напружень (рис. 8), які показують вплив навантаженого циліндра (q) на закріплений циліндр (ρ).

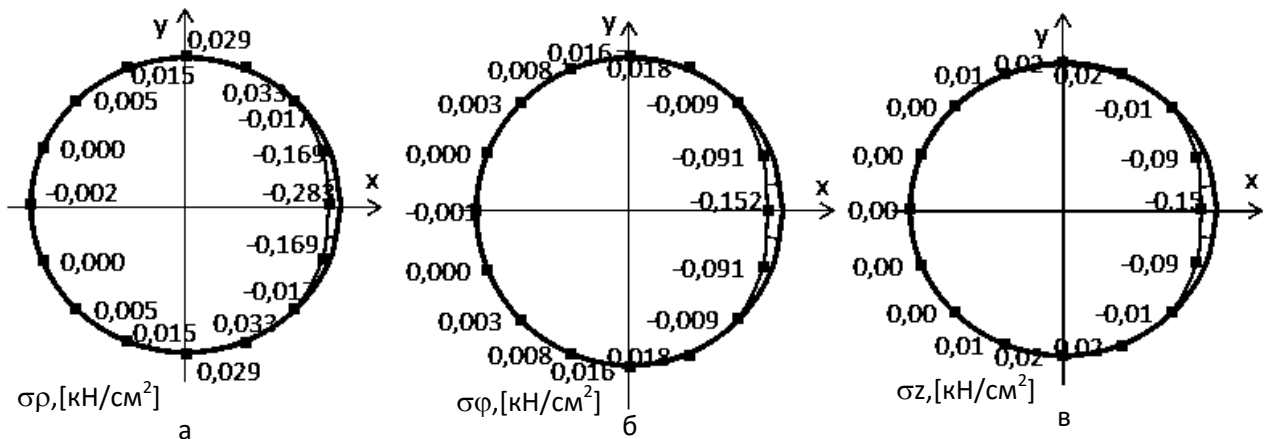


Рисунок 8 – Нормальні напруження на поверхні циліндра (ρ) в перерізі $z = 0$

На рис. 8, б через відсутність переміщень на циліндрі (ρ), на відміну від попередньої задачі, напруження σ_{φ} і σ_z на ненавантаженому циліндрі будуть стискальними.

Уздовж осі z (при $y = 0$) напруження σ_{ρ} показано на рис. 9, де можна побачити виконання заданих крайових умов на циліндрі (q), за яких на циліндрі (ρ) напруження мають постійне значення на інтервалі $-4 \dots 4$ см, а потім змінюються відповідно до навантаження суміжного циліндра.

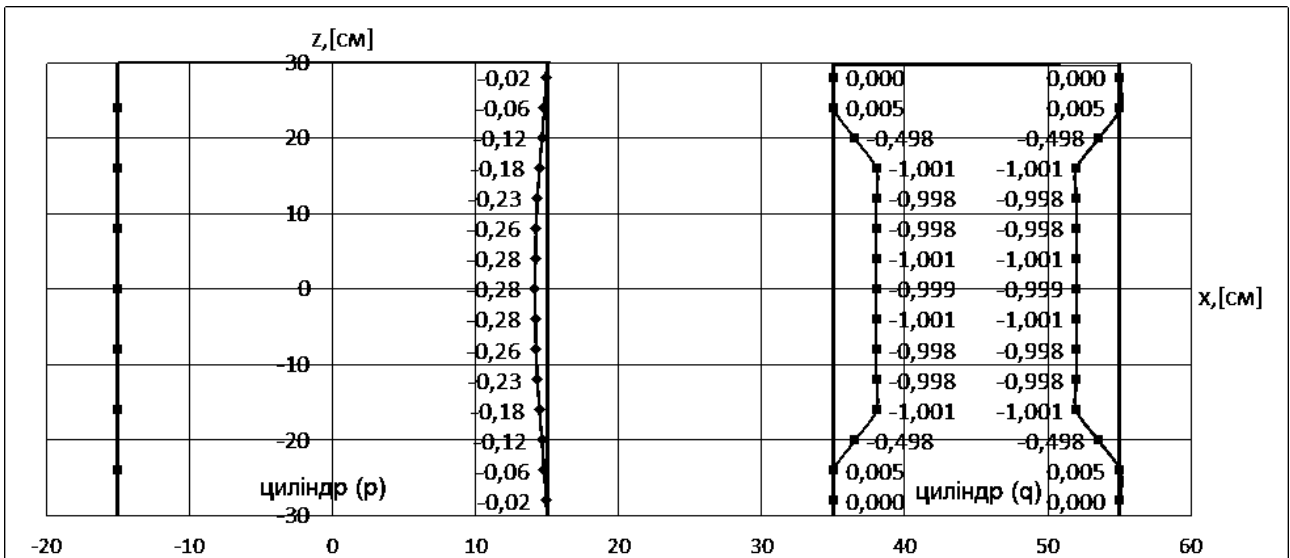


Рисунок 9 – Нормальні напруження σ_ρ вздовж осі Z

Вздовж осі Z еюра σ_ρ (рис.10) має максимальні напруження на циліндрі (q), які виникають при $z = 0$ см і мають постійне значення на інтервалі -2...2см, а при зближенні циліндрів мають тенденцію до зростання.

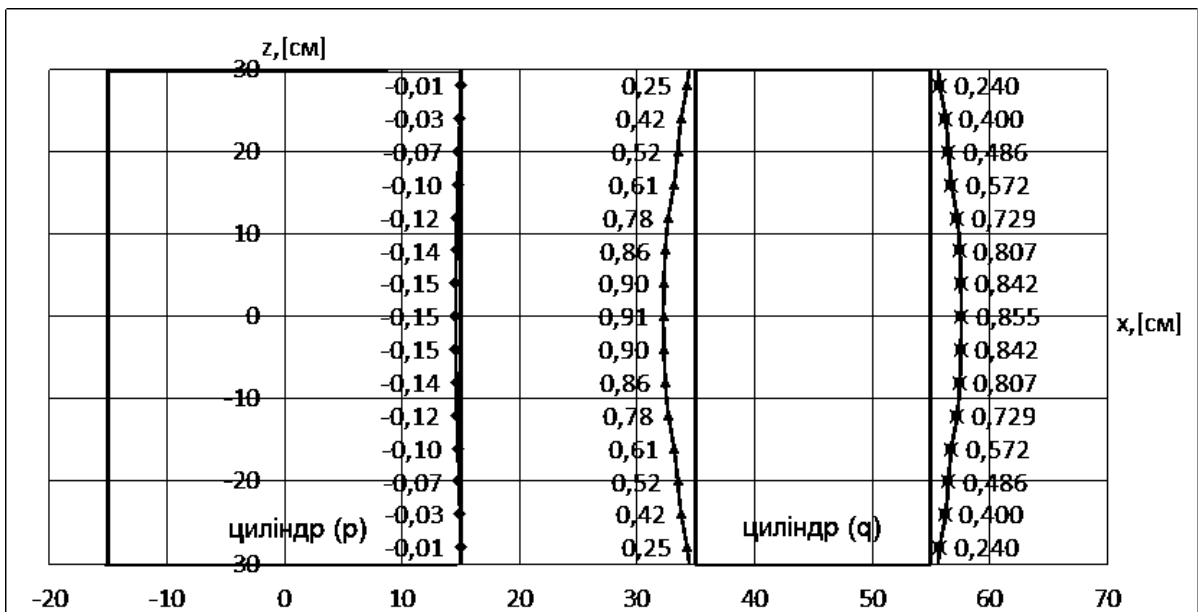


Рисунок 10 – Нормальні напруження σ_ϕ вздовж осі Z

Напруження σ_z на циліндрі (q), на відміну від циліндра (p), (рис.11.) мають максимальне значення на межі прикладення навантаження.

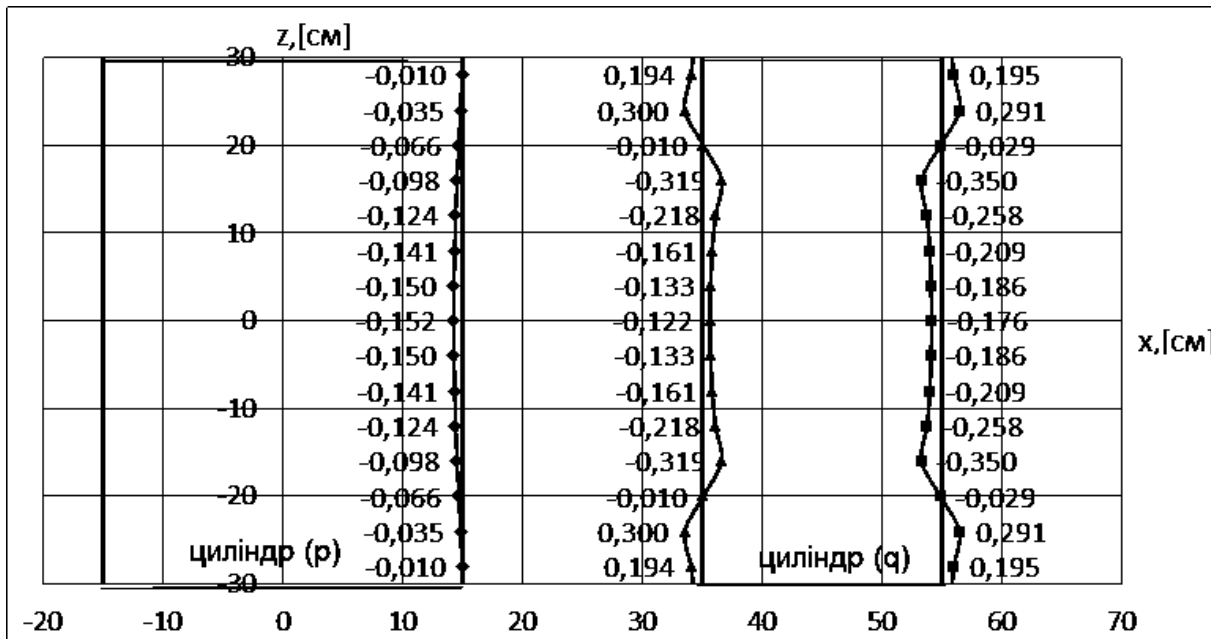


Рисунок 11 – Нормальні напруження σ_z вздовж осі Z

При наближенні або віддаленні циліндрів збільшується або зменшується їх вплив один на одного. На рис. 12 показано напружений стан на перешийку між циліндрами від т. А до т. В (рис. 1), з якого можна побачити, що при наближенні циліндра (q) до циліндра (p) всі напруження зростають.

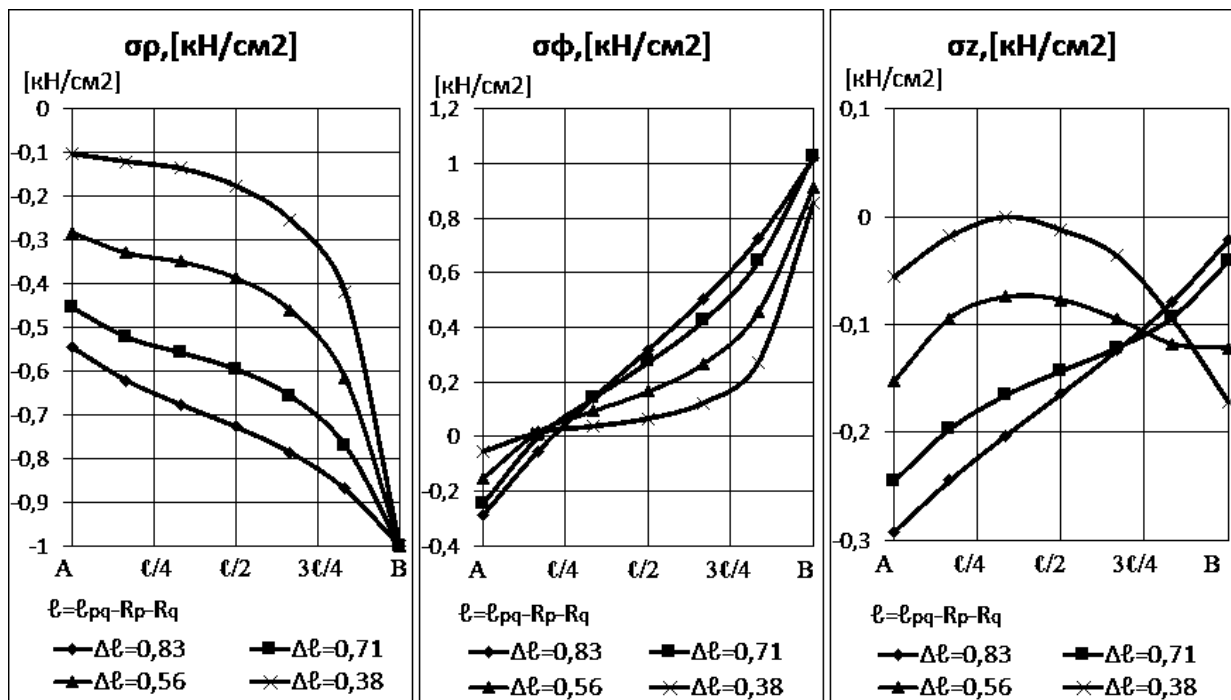


Рисунок 12 – Напружений стан на перешийку залежно від відстані l_{pq}

Висновки

Запропоновано метод розв'язання задачі теорії пружності в просторі з декількома паралельними циліндричними порожнинами, коли на межах одних порожнин задано напруження, а на межах інших – переміщення.

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

Наведені графіки дають уявлення про особливості розподілу переміщення і напружень у тілі у найбільш цікавих зонах і про взаємний вплив циліндрових порожнин.

Список літератури

1. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
2. Подильчук, Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости [Текст] / Ю.Н. Подильчук. – Киев.: Наук.думка, 1979. – 240 с.
3. Соляник-Краса, К.В. Осесимметричная задача теории упругости [Текст] / К.В. Соляник-Краса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336 с.
4. Васильев, В. З. Осесимметричная деформация упругого изотропного пространства с бесконечной цилиндрической выемкой [Текст] / В. З. Васильев. – Изв. АН СССР, МТТ, 1968. – Т.5. С. 124–129.
5. Мирошников, В.Ю. Определение тензора напряжений в пространстве с цилиндрическими полостями, на которых заданы перемещения [Текст] / В.Ю. Мирошников, В.С. Проценко. // Науковий вісник будівництва: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Харьков. нац. ун-т строительства и архитектуры. – Харьков, 2005. – Вып. 34.– С.151–156.
6. Николаев, А.Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков, 2013. – Вып. 4. – С. 40–49.
7. Николаев, А.Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков, 2013. – Вып. 6 (103). – С. 32–38.
8. Николаев, А.Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилін-

дрическими волокнами [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. // Вісник Одеського. нац. ун-ту. матем. і механіки. – Одеса, 2013. – Т.18. – Вип. 4(20). – С. 101–111.

9. Николаев, А.Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. // Сибирский журнал вычислительной математики. – Новосибирск, 2015. – Т. 18, – № 2. – С. 177–189.

10. Мірошніков, В. Ю. Друга основна задача теорії пружності в просторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст] / В.Ю. Мірошніков. – Зб. наук. праць Харків. ун-ту Повітряних Сил. – 2017. – Вип. 1. – С. 92–96.

11. Николаев, А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.

Поступила в редакцию 15.06.2017.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*