

## ОСОБЕННОСТИ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ СТАТИКИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ ИЗ НИХ ЧАСТЬ 2. О ПРОБЛЕМАХ СТАТИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В первой части статьи [1] были проанализированы проблемы статики изолированных слоистых композитных материалов (КМ), хотя их отделение от конструкции весьма условно. Композитные материалы создаются одновременно с конструкцией, поэтому проблемы материала и конструкции тесно переплетены. С учетом особенностей КМ, перечисленных в [1], рассмотрим некоторые проблемы статики конструкций из слоистых композитов.

### 1. Проблема межслойных соединений

Монолитность слоистого композита зависит от качества межслойных соединений, поэтому важно уметь прогнозировать их напряженно-деформированное состояние в результате силовых и (или) температурных воздействий. В силу различных коэффициентов Пуассона и линейного температурного расширения, а также коэффициентов взаимного влияния для неортоотропных материалов в соединении слоев возникают соответствующие касательные напряжения в двух направлениях из-за свободных деформаций [2, 3]. Следует различать и исследовать два типа межслойных соединений – у кромок детали и у зон местного усиления (рис. 1).

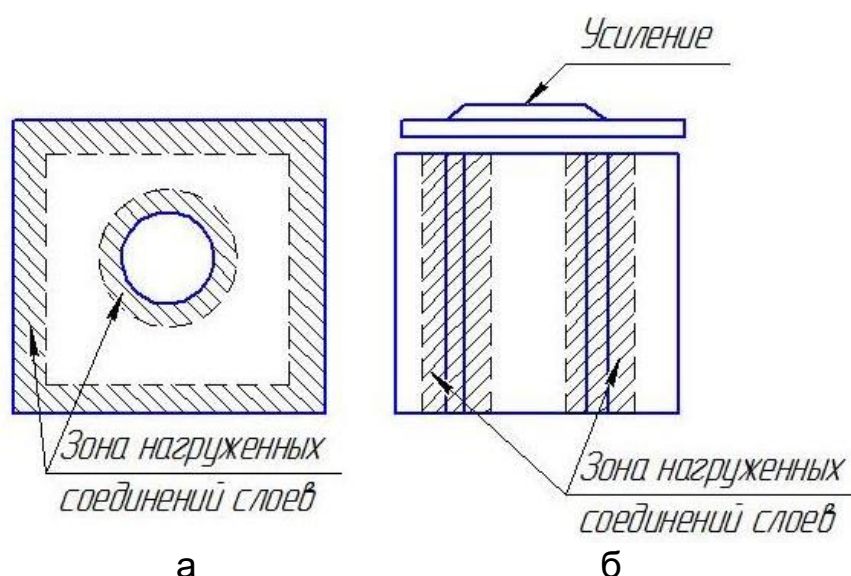


Рисунок 1 – Типы нагруженных межслойных соединений

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние слоистого композита у кромок пластины в одномерной постановке (см. рис. 1, а). Так как слои армирующего материала достаточно плотно прилегают друг к другу, трудно выделить клеевую прослойку в качестве отдельного структурного элемента, в связи с чем оправдано принятие гипотезы Фолькерсена [2, 3]. Таким образом, два любых соседних слоя моделируются двумя стержнями, между которыми расположен приведенный соединительный слой, состоящий из половины толщины слоев [2, 3]. Стержни наделяются жесткостью слоя, а соединительный слой – межслойной сдвиговой жесткостью этих двух слоев КМ.

На рис. 2 показана расчетная модель для исследования напряженно-деформированного состояния у кромки слоистого композита, возникающего в результате различающихся коэффициентов линейного температурного расширения слоев и из-за их различной ориентации при формировании гибридных пакетов слоев.

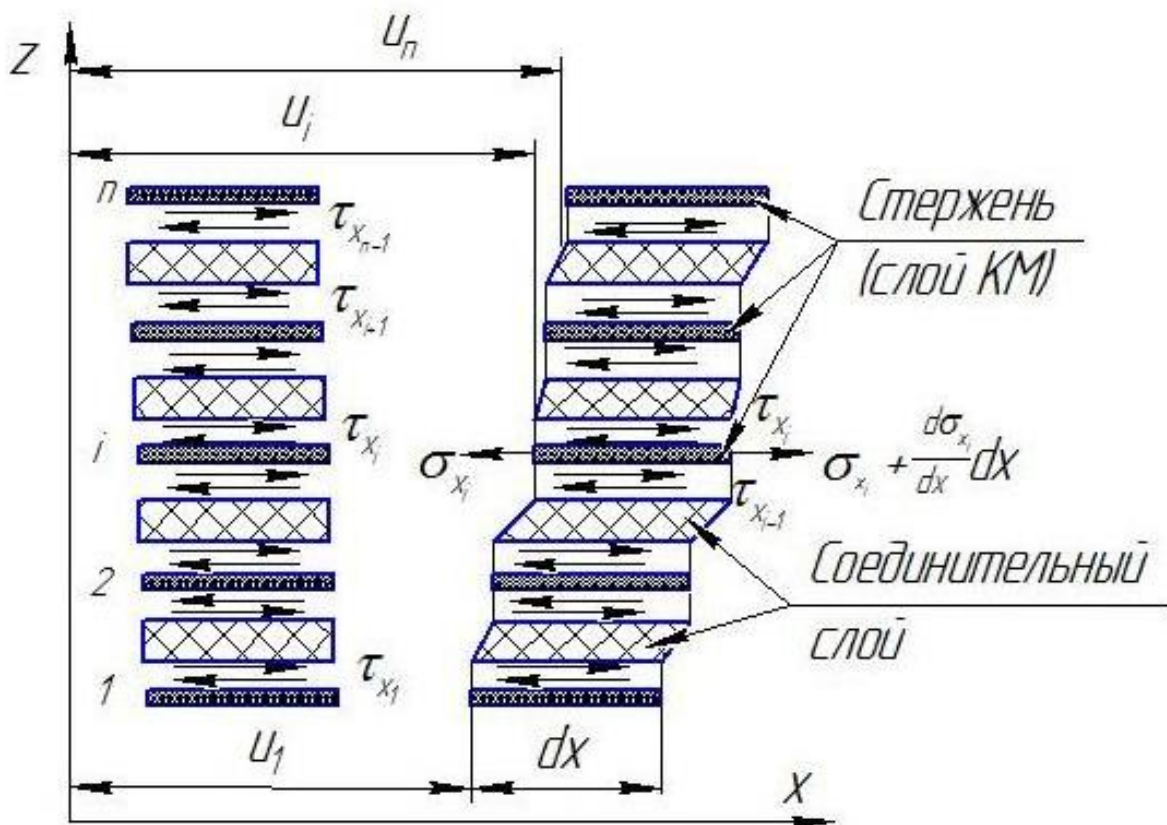


Рисунок 2 – Схема декомпозиции слоистого КМ

Уравнения равновесия выделенных элементов слоев имеют вид



$$\varepsilon_{xi} = \frac{\sigma_{xi}}{E_{xi}} + \alpha_{xi}\Delta T, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$\alpha_{xi} = \alpha_{1i} \cos^2 \varphi_i + \alpha_{2i} \sin^2 \varphi_i \quad (7)$$

и  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}$  – коэффициенты линейного температурного расширения материала  $i$ -го слоя в осях ортотропии;  $\varphi_i$  – угол армирования слоя.

С учетом выражений (6) уравнения (5) преобразуются к виду

$$\frac{\delta_{ci}}{G_{ci}} \frac{d\tau_{xi}}{dx} = \frac{\sigma_{x,i+1}}{E_{x,i+1}} - \frac{\sigma_{xi}}{E_{xi}} + \Delta T (\alpha_{x,i+1} - \alpha_{xi}), \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

После дифференцирования этих уравнений и подстановки выражения для  $\sigma_{xi}$  из системы (1) получим следующую полную систему дифференциальных уравнений относительно межслойных касательных усилий  $\tau_{xi}$ :

$$\Pi_{ci} \frac{d^2 \tau_{xi}}{dx^2} + \Pi_{xi} \tau_{x,i-1} - (\Pi_{xi} + \Pi_{x,i+1}) \tau_{xi} + \Pi_{x,i+1} \tau_{x,i+1} = 0, \quad (9)$$

где

$$\Pi_{ci} = \frac{\delta_{ci}}{G_{ci}}; \quad \Pi_{xi} = \frac{1}{\delta_i E_{xi}}; \quad \tau_{x,0} = \tau_{x,n} = 0, \quad (10)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Путем последовательной подстановки  $\tau_{x1}$  из первого уравнения во второе, далее  $\tau_{x2}$  из второго в третье и т.д. получим однородное дифференциальное уравнение порядка  $2(n-1)$  относительно  $\tau_{x,n-1}$ .

Граничными условиями системы (9) являются равенства:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad \sigma_{xi} &= 0; \\ \text{при } x = \ell \quad \sigma_{xi} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\ell$  – длина панели (пластины) по оси  $x$ .

При количестве слоев более четырех решение характеристического уравнения преобразованной системы (9) аналитически затруднительно. В целях получения инженерных результатов представляется непротиворечивой следующая расчетная схема. Исследуемый пакет разделяется на две части с границей по рассматриваемому межслойному соединению (рис. 3). Для такого «двухслойного» соединения существует аналитическое решение [3].

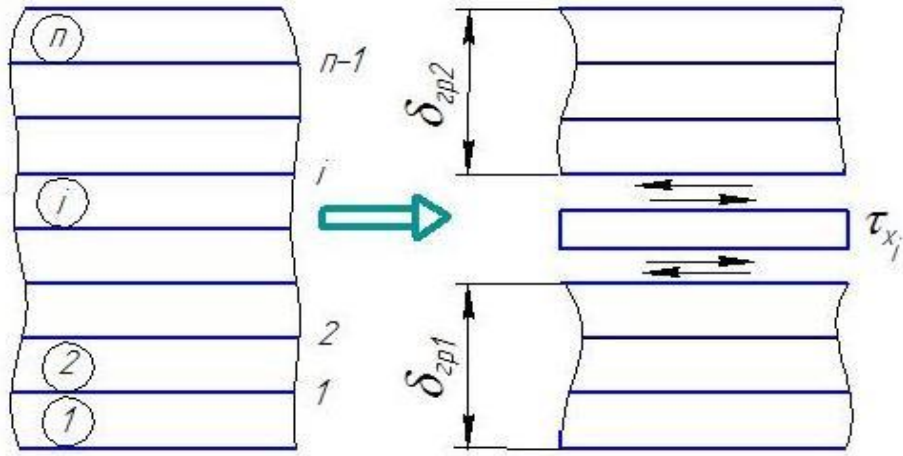


Рисунок 3 – К способу дискретизации пакета слоев КМ для исследования краевого эффекта

Запишем необходимые зависимости для расчета в соответствии с методикой [3]

$$\delta_{zp1} = \sum_{k=1}^i \delta_k; \quad \delta_{zp2} = \sum_{k=i+1}^n \delta_k = \delta_{\Sigma} - \delta_{zp1}; \quad (12)$$

$$\delta_{ci} = \frac{1}{2} \delta_{\Sigma}; \quad (13)$$

$$\frac{\delta_{ci}}{G_{ci}} = \frac{\delta_{zp1}}{2G_{zp1}} + \frac{\delta_{zp2}}{2G_{zp2}}; \quad (14)$$

$$G_{zp1} = \frac{\delta_{zp1}}{\sum_{k=1}^i \frac{\delta_k}{G_{xzk}}}; \quad G_{zp2} = \frac{\delta_{zp2}}{\sum_{k=i+1}^n \frac{\delta_k}{G_{xzk}}}; \quad (15)$$

$$P_{ci} = \frac{\delta_{ci}}{G_{ci}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i \frac{\delta_k}{G_{xzk}} + \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^n \frac{\delta_k}{G_{xzk}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{G_{xzk}}; \quad (16)$$

$$\frac{1}{G_{xzi}} = \frac{\cos^2 \varphi_i}{G_{13i}} + \frac{\sin^2 \varphi_i}{G_{23i}}; \quad (17)$$

$$E_{xep1} = \frac{1}{\delta_{zp1}} \left( B_{11ep1} - \frac{B_{12ep1}^2}{B_{22ep1}} \right); \quad E_{xep2} = \frac{1}{\delta_{zp2}} \left( B_{11ep2} - \frac{B_{12ep2}^2}{B_{22ep2}} \right), \quad (18)$$

где  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$  – жесткости пакета, вычисляемые по известным формулам при соблюдении соответствующих пределов суммирования [3].

Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_{ep1} &= \frac{1}{\delta_{ep1} E_{xep1}} = \left( B_{11ep1} - \frac{B_{12ep1}^2}{B_{22ep1}} \right)^{-1}; \\ \Pi_{ep2} &= \frac{1}{\delta_{ep2} E_{xep2}} = \left( B_{11ep2} - \frac{B_{12ep2}^2}{B_{22ep2}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Касательные напряжения в  $i$ -м межслойном соединении определяются по формулам, приведенным в [3]:

$$\tau_{xi} = \frac{k_i \Delta T (\alpha_{ep2} - \alpha_{ep1}) [chk_i x - chk_i (\ell - x)]}{(\Pi_{ep1} + \Pi_{ep2}) shk_i \ell}. \quad (20)$$

Здесь  $\alpha_{ep1}$ ,  $\alpha_{ep2}$  – коэффициенты линейного температурного расширения сформированных групп слоев (см. рис. 3), которые вычисляются по известным формулам, например [3]:

$$k_i = \sqrt{\frac{\Pi_{ep1} + \Pi_{ep2}}{\Pi_{ci}}}. \quad (21)$$

Искомые межслойные напряжения имеют максимум при  $x = 0$  и  $x = \ell$  и равны

$$\tau_{xi}(0) = -\tau_{xi}(\ell) = \frac{k_i \Delta T (\alpha_{ep2} - \alpha_{ep1}) (1 - chk_i \ell)}{(\Pi_{ep1} + \Pi_{ep2}) shk_i \ell}. \quad (22)$$

При достаточно больших размерах панели эти напряжения стремятся к величине

$$\tau_{xi\max} = \frac{k_i \Delta T (\alpha_{ep1} - \alpha_{ep2})}{\Pi_{ep1} + \Pi_{ep2}}. \quad (23)$$

Для определения протяженности кромочного эффекта примем, что касательные напряжения на границе зоны нерегулярности составляют наперед заданную малую величину.

$$\frac{\tau_{xi}(\ell_{пр})}{\tau_{xi}(0)} = \xi, \quad (24)$$

где  $\ell_{пр}$  – протяженность зоны краевого эффекта;

$\xi$  – коэффициент, который в инженерных расчетах может приниматься в пределах до 0,05 (до 5 %).

После подстановки сюда результатов (20) и (22) получим уравнение

$$\frac{chk_j l_{пр} - chk_j (\ell - l_{пр})}{1 - chk_j \ell} = \xi. \quad (25)$$

При достаточно больших значениях длины панели  $\ell cth \frac{k_j \ell}{2} \rightarrow 1$  и тогда это уравнение упрощается к виду

$$chk_j l_{пр} - shk_j l_{пр} = \xi \quad \text{или} \quad e^{-kl_{пр}} = \xi. \quad (26)$$

Отсюда

$$l_{пр} = -\frac{1}{k_j} \ln \xi. \quad (27)$$

При  $\xi = 0,05$  имеем

$$l_{пр} \approx \frac{3}{k_j}. \quad (28)$$

В зоне приформовки усиления (см. рис. 1, б), у его краев, также возникают кромочные эффекты. При нестесненном смещении краев панели касательные напряжения между слоями, связанные с кромочным эффектом, распределяются вовнутрь усиления. Тогда межслойное напряженное состояние можно рассчитывать по приведенным выше формулам и уравнениям. Если же смещения краев панели стеснены, то вместо нулевых граничных условий типа (11) необходимо использовать предварительно найденные нормальные напряжения в слоях (в группе слоев) (рис. 4).

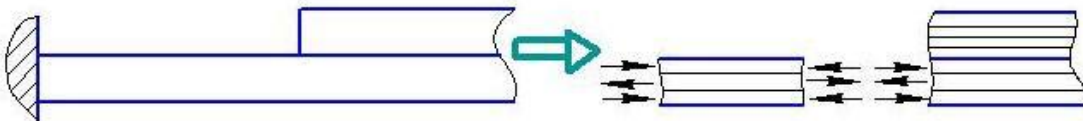


Рисунок 4 – Схема формирования граничных условий при расчете межслойных напряжений в панели с усилением

Явления типа исследуемых выше (по оси  $x$ ) имеют место и в поперечном направлении (по оси  $y$ ). В силу незначительной ширины зоны краевого эффекта (см. формулу (27)) в инженерных расчетах допустимо изолированное исследование напряжений в продольном и поперечном направлениях. Тогда формулы и уравнения, полученные выше, остаются в силе после соответствующей замены индекса осей.

В углах панели (см. рис. 1, а) имеет место наложение напряжений. В учебнике [3] получена система дифференциальных уравнений для определения напряжений в двумерных уравнениях для определения

напряжений в двумерной постановке, но она не имеет аналитического решения. Там же предложена приближенная методика определения напряженно-деформированного состояния в поперечном направлении на основе неучета коэффициентов Пуассона. Принимая во внимание, что нормальные напряжения в слоях от стеснения температурных деформаций имеют разный знак по осям  $x$  и  $y$  (если по оси  $x$  растягивающие, то по оси  $y$  – сжимающие, и наоборот), для инженерных задач напряжения в углах панели можно рассматривать как векторную сумму двух составляющих, найденных изолированно друг от друга. Это идет в запас прочности соединения слоев.

Отдельные слои или формируемые группы слоев (см. рис. 2, 3) могут быть неортотропными в осях  $x$ ,  $y$  и тогда при изменении температуры возникают сдвиговые напряжения и деформации, связанные с коэффициентом линейного температурного расширения  $\alpha_{xy}$  [3]. В учебнике [3] приведена методика определения напряжений в клеевом соединении нагруженном сдвигом. Эту методику можно применить для рассматриваемого случая термонагружения, для чего достаточно положить, что касательные деформации в неортотропных слоях, являющиеся, по сути внешней нагрузкой, вычисляются по формуле

$$\gamma_{xyi} = \frac{\tau_{xyi}}{G_{xyi}} + \alpha_{xyi} \Delta T . \quad (29)$$

Таким образом, в результате стеснения температурных деформаций в адгезионных соединениях слоев возникают касательные напряжения, связанные с линейными коэффициентами линейного температурного расширения  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  и направленные соответственно по осям  $x$  и  $y$ , и касательные напряжения, связанные со сдвиговым коэффициентом температурного расширения  $\alpha_{xy}$  и направленные соответственно по осям  $y$  и  $x$ .

Говоря о проблеме межслойных соединений, нельзя не упомянуть еще об одном аспекте. В балках из слоистых композитов межслойные касательные напряжения отличаются от определенных по формуле Журавского [4] (рис. 5, а). Особо следует обратить внимание на случай нагружения двумя силами в целях реализации чистого изгиба, где на самом деле в слоистых конструкциях присутствуют касательные напряжения (рис. 5, б) [4]. По этой причине экспериментальное исследование чистого изгиба слоистых балок [5] является недостаточно корректным. Кроме того, распределение касательных напряжений по длине балки зависит от способа заделки кромок [4], т.е. от степени взаимного смещения слоев у торца балки.



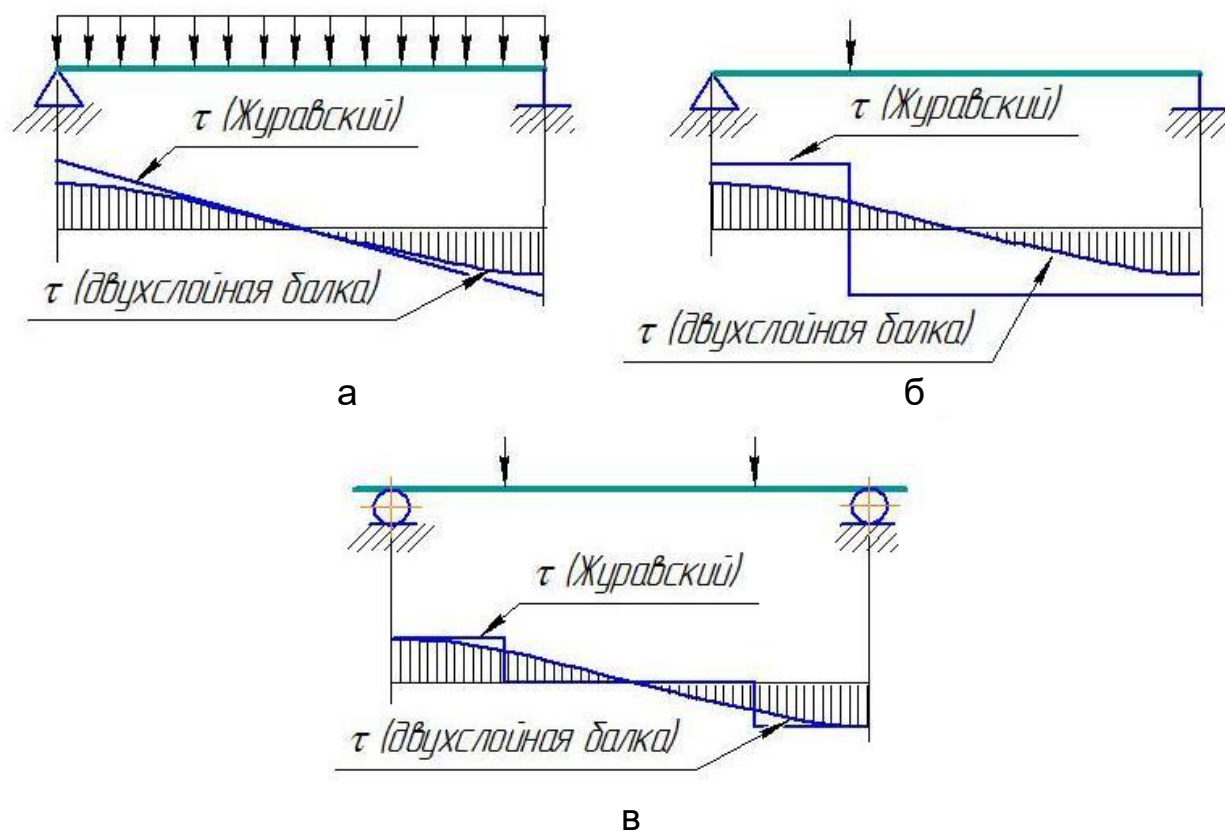


Рисунок 5 – Распределение касательных напряжений в двухслойной балке [4]

## 2. Проблема одноплоскостного закона распределения деформаций при изгибе балок и пластин из слоистых композитных материалов

Все инженерные расчетные зависимости для определения напряжений при изгибе балок и пластин получены на основе априорного признания справедливости гипотезы об одноплоскостном законе распределения деформаций по высоте балки или по толщине пластины, а также частично гипотезы Кирхгофа – Лява. Для конструкций из изотропных материалов масштабная инженерная деятельность подтвердила жизнеспособность этих фундаментальных гипотез механики. В слоистых композитах при четко выраженной клеевой прослойке между слоями сдвиговые деформации в ней отличаются от таковых в слоях, что равносильно распределению деформаций, как показано на рис. 6, и, как следствие, искажению линейного распределения деформаций [4]. Вероятно, впервые эта проблема на примере составных балок, являющихся аналогами слоистых композитов была поставлена и комплексно решена в работе А.Р. Ржаницына [4] и библиографии к этой монографии. После замены физического закона для изотропного материала, принятого в [4], а также после перехода к терминам и параметрам слоистых композитов на основе [4] можно построить адекватную теорию изгиба балок и пла-

стин из слоистых композитов. Следствием этого были бы уточненные зависимости для расчета на устойчивость и прогнозирования частот собственных колебаний. Вместо формулы Журавского, являющейся, по сути, следствием принятия одноплоскостного закона распределения деформации, появятся другие расчетные зависимости, которые будут учитывать слоистую структуру, а также характер и жесткость заделки торцов балки [4].

Согласно [4] в пределах толщины каждого слоя принят линейный характер распределения деформаций, а искажение общей картины происходит в пределах клеевых прослоек (см. рис. 6). Взаимный сдвиг слоев относительно друг друга в значительной степени зависит от структуры и конструкции торцов балки или краев пластин. На рис. 7 приведено распределение касательных напряжений в соединении слоев двухслойной балки с различной заделкой торцов. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании и конструировании балок и пластин из слоистых композитов.

В работе [4] не рассматриваются термомеханические взаимодействия из-за их неактуальности при одинаковых материалах частей составных балок. В слоистых композитах, как было показано выше, в соединении слоев присутствуют температурные напряжения, которые необходимо суммировать (вектор-

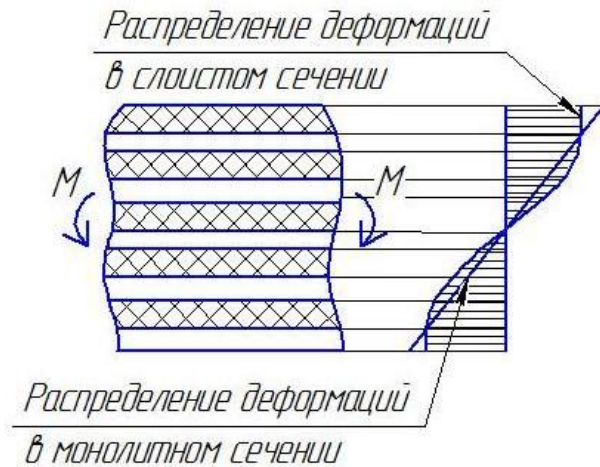


Рисунок 6 – Распределение деформаций по сечению монолитной и слоистой балки

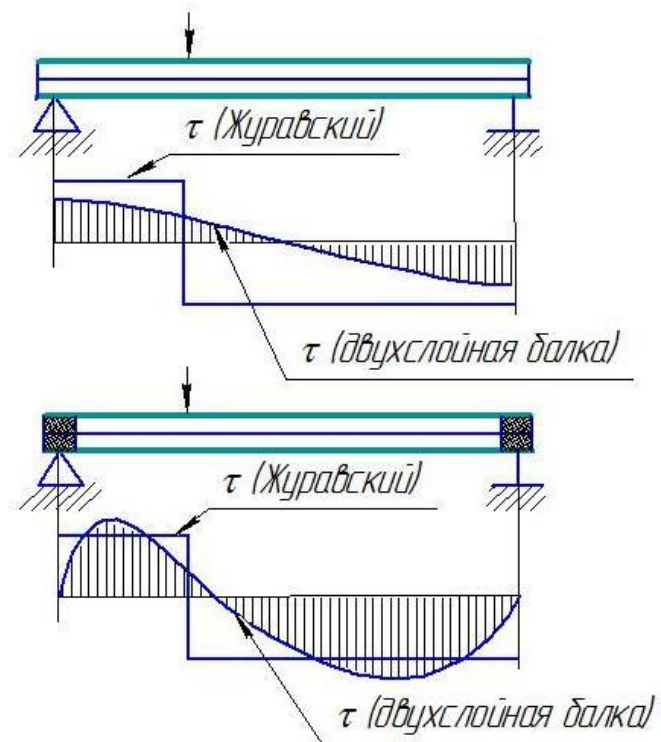


Рисунок 7 – Распределение касательных напряжений по длине двухслойной балки с различной заделкой торцов [4]

но или алгебраически) с касательными напряжениями от изгиба, которые могут быть как выше, чем по Журавскому, так и ниже (см. рис. 7).

Явления, аналогичные рассмотренным выше для балок, наблюдаются в пластинах и панелях из слоистых композитов. Их математическое описание также возможно на основе монографии [4].

### 3. Проблема симметрии структуры слоистого композитного материала

Разнообразие полуфабрикатов арматуры КМ (ленты, ткани различной толщины) позволяет формировать изделия почти требуемой (заданной) толщины. Чем тоньше ткань (лента), тем ближе к расчетной толщине можно формировать структуру, но в этом случае увеличивается трудоемкость выкладки пакета и могут также сказываться масштабные факторы. При проектировании структуры композита обращают внимание на два вида симметрии:

- симметрию, обеспечивающую ортотропность композита в рассматриваемой системе координат, что существенно упрощает методы расчета на прочность и проектирования [3, 6, 7]. Кроме того, отпадает необходимость экспериментального определения коэффициентов взаимного влияния 1-го и 2-го рода, для чего не существует стандартных методов испытаний;

- симметрию пакета слоев относительно срединной поверхности, которая исключает появление изгибных напряжений при нагреве (охлаждении) и при нагружении по контуру [6].

Ортотропный композит обладает симметрией относительно срединной поверхности тогда, когда количество слоев с армированием  $+\varphi$  и  $-\varphi$  ( $\varphi \neq 0^\circ$  и  $\varphi \neq 90^\circ$ ) является четным и слои расположены соответствующим образом по толщине. Количество слоев  $0^\circ$  или  $90^\circ$  может быть нечетным, но один слой в этом случае располагается посередине пакета.

Симметричный пакет относительно срединной поверхности может быть как ортотропным, так и анизотропным, например  $[0, \pm 45, \mp 45, 0]$  и  $[0, +45, +45, 0]$ . Желание обеспечивать ортотропию свойств композитов, как правило, связано с увеличением количества слоев относительно расчетного, т.е. конструкция переутяжеляется.

Для многих конструкций использование симметричного анизотропного пакета слоев вполне допустимо, тем более, что такой пакет может обладать преимуществами по сравнению с ортотропным композитом. Например, панели обшивки крыла самолета, в которых нормальные и касательные напряжения взаимосвязаны по направлениям действия (по знакам), будучи изготовленными из анизотропного КМ, но симметрично-

го относительно срединной поверхности, могут обладать большей несущей способностью за счет того, что одни напряжения уменьшают другие. Например, для структуры КМ  $[0, +\varphi, 90^\circ]$  или  $[0, -\varphi, 90^\circ]$  всегда можно добиться того, чтобы нормальные напряжения и изменения температуры вызывали касательные напряжения, обратные по знаку действующим. Это следует из физического закона:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y} + \eta_{xy,x} \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} + \alpha_x \Delta T; \\ \varepsilon_y &= -\mu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} + \eta_{xy,y} \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} + \alpha_y \Delta T; \\ \gamma_{xy} &= \eta_{x,xy} \frac{\sigma_x}{E_x} + \eta_{y,xy} \frac{\sigma_y}{E_y} + \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} + \alpha_{xy} \Delta T.\end{aligned}\quad (30)$$

После разрешения этих уравнений относительных напряжений получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_{11}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + a_{12}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + a_{13}(\gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T); \\ \sigma_y &= a_{21}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + a_{22}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + a_{23}(\gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T); \\ \tau_{xy} &= a_{31}(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + a_{32}(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + a_{33}(\gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T).\end{aligned}\quad (31)$$

Рациональным управлением анизотропией за счет формирования соответствующей структуры при тщательном учете характера эксплуатационного нагружения можно повысить несущую способность конструкции как по прочности, так и по устойчивости. Например, панель, нагруженную не меняющимися знак касательными усилиями, целесообразно армировать, как показано на рис. 8, а. При действии сжимающих усилий анизотропный композит также обеспечивает повышенные критические усилия потери устойчивости (рис. 8, б) за счет увеличения изгибной жесткости в направлении косоугольной укладки.

Таким образом, использование симметричных относительно срединной поверхности анизотропных пакетов является предпочтительным по отношению к симметричным, но ортотропным КМ. Симметрия расположения слоев по толщине исключает нерасчетное нагружение панели [6], а анизотропия позволяет управлять напряженным состоянием в определенных пределах. Заметим, что анизотропный КМ используется в конструкции панелей крыла летательных аппаратов для получения необходимого прогиба и повышения несущей нагрузки. Эти логические умозаключения нуждаются в количественной оценке, причем в совокупности с технологическими аспектами формирования пакета требуемой структуры.

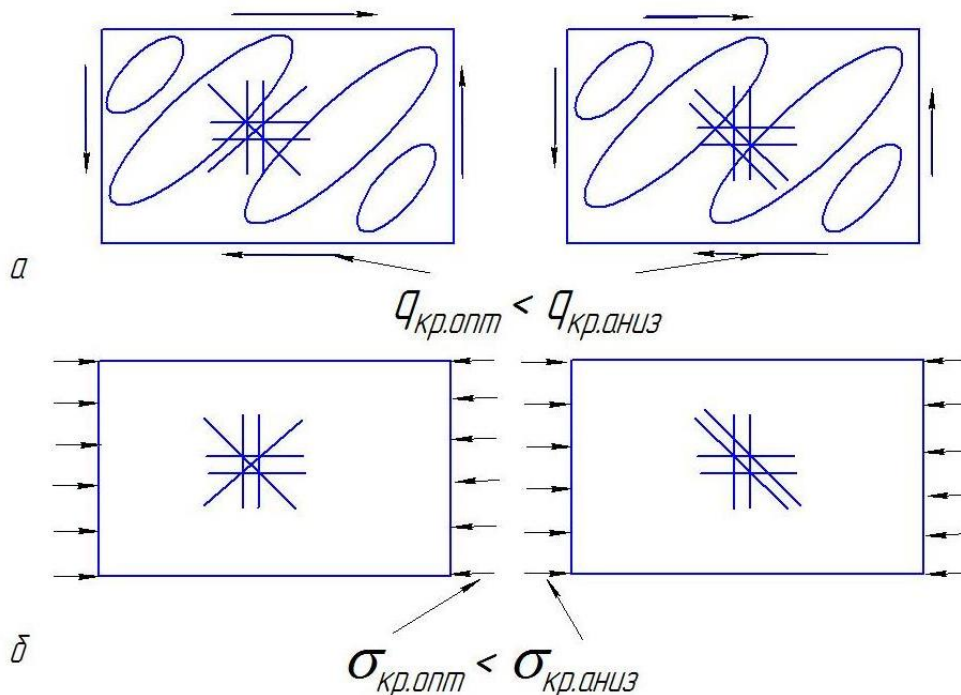


Рисунок 8 – Влияние симметрии и структуры КМ на критические усилия потери устойчивости

#### 4. Проблема протяженности зоны действия принципа Сен-Венана

Протяженность зоны затухания краевых эффектов, возникающих в окрестности приложения сил, в т.ч. опорных реакций, зависит в основном от сдвиговой жесткости элемента конструкции. Если для металлов, обладающих большим модулем сдвига (около  $0,3 \cdot E$ ), зона затухания имеет размеры порядка характерного размера сечения [8], то для слоистых композитов, у которых модуль сдвига составляет около  $0,1 \cdot E$ , этот эффект распространяется гораздо дальше. В зоне краевого эффекта напряженно-деформированное состояние отличается от регулярного, причем не в запас прочности, поэтому знание протяженности зоны затухания краевого эффекта позволяет спроектировать усиление детали в местах приложения эксплуатационных нагрузок и опорных реакций. Ввиду широкого многообразия способов приложения сил, от которых зависит напряженно-деформированное состояние краевого эффекта, практически отсутствуют аналитические решения таких краевых задач, которые позволили бы на этапе проектирования анализировать пути повышения несущей способности и минимизировать массу конструкции. Это усложняет процесс формирования структуры композита в зонах нерегулярного напряженно-деформированного состояния. Следует отметить, что таких зон в конструкции самолета очень много (например, места крепления нервюр к лонжеронам) и от их рационального проектирования зависит качество конструкции. Кроме того, разрушение конструкции начинается, как правило, в зонах нерегулярности напряженно-



деформированного состояния, что обуславливает необходимость тщательного проектирования усиления этих зон, а для слоистых КМ не исключено изменение структуры регулярной части при подходе к краевой зоне.

Таким образом, представляется целесообразным проведение численных параметрических исследований, например методом конечных элементов, для типовых зон краевого эффекта в целях оптимизации массы и структуры усиления, результатом которых были практические рекомендации с соответствующей количественной характеристикой.

#### 5. Проблема монтажных напряжений тонкостенных конструкций из слоистых композитных материалов.

В статье [9] показано, что задача прогнозирования монтажного напряженного состояния является фундаментальной проблемой слоистых КМ. Проведено достаточно много исследований по определению технологического напряженно-деформированного состояния (напряженно-деформированное состояние после извлечения из технологической оснастки), результаты которых служат для оценки и проектирования оснастки для формования. Характер и величина технологических поворотов позволяют косвенно судить о качестве структуры пакета. Для разработчиков изделия важны монтажные напряжения, которые остаются в детали после сборки агрегата и влияют на эксплуатационную несущую способность.

Задача деформирования покоробленной детали в целях ее прилегания к контуру каркаса относится к классу обратных задач статики и имеет бесконечное количество решений – прижать деталь к контуру возможно множеством вариантов приложения деформирующих сил, величина которых не может быть корректно спрогнозирована. В связи с этим можно предложить следующий способ расчета монтажных напряжений.

Зона кромочного эффекта имеет ширину, соизмеримую с размерами соединения детали к каркасу (см. формулу (27)). Отсекая зону кромочного эффекта и заменяя отсеченную часть на реакции в виде изгибающих и крутящих моментов (нормальных и перерезывающие силы отсутствуют у свободных краев), получаем новую задачу (рис 9), которая допускает решение классическими

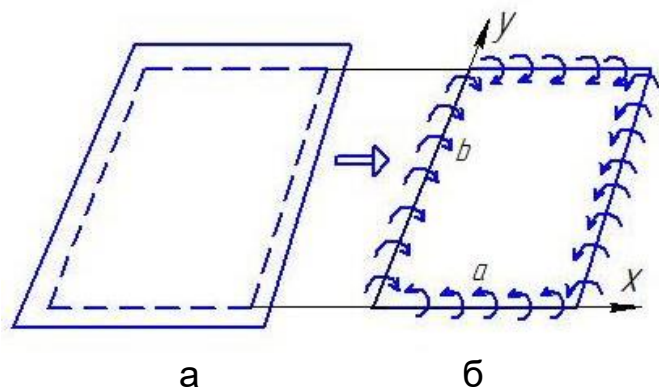


Рисунок 9 – К обоснованию метода расчета монтажных напряжений

методами классической теории упругости.

методами. Рассматривается панель требуемой формы с нагружением по контуру и с известными граничными условиями (рис. 9, б).

Если КМ панели ортотропный в осях  $x$  и  $y$ , то реакция отсеченной части представляет собой распределенный изгибающий момент, а для анизотропного материала изгибающий и крутящий распределенные моменты.

При прилегании панели к каркасу по всему контуру имеем следующие граничные условия дифференциального уравнения изгиба пластины:

$$\begin{aligned} - \text{при } x = 0 \text{ и } x = a & \quad \omega = \partial\omega / \partial x = 0; \\ - \text{при } y = 0 \text{ и } y = b & \quad \omega = \partial\omega / \partial y = 0. \end{aligned}$$

Если какая-либо сторона не крепится к каркасу, то для нее граничные условия соответствуют отсутствию изгибающих моментов и перерезывающих сил. Например, если свободен край ( $x=0$ ), то следует принять такие граничные условия:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = 0. \quad (33)$$

В этом случае формально можно не отсекал зону кромочного эффекта у свободного (незакрепленного) края. При изменении температуры в панели, закрепленной на жестком каркасе, могут возникнуть температурные мембранные усилия, а также напряжения, связанные с коэффициентами Пуассона и взаимного влияния.

Рассмотрим вначале случай, когда элементы каркаса представляют собой рамную систему (с возможностью передачи изгибающих моментов от одних элементов к другим) (рис. 10). При нагружении панели обшивки касательными усилиями и (или) при изменении температуры эксплуатации анизотропного композита жесткая взаимная заделка подкрепляющих элементов каркаса воспринимает часть касательных усилий. Это приводит к их изгибу (см. рис. 10, б, в) и деформированию контура панели (см. рис. 10, г).

Сдвиговая деформация системы «каркас–обшивка» определяется как

$$\gamma = \frac{\omega_x}{b} + \frac{\omega_y}{a} = \frac{ab(q_{xy} - q_{обш})}{24} \left( \frac{q}{(EI)_{nx}} + \frac{b}{(EI)_{ny}} \right), \quad (34)$$

где прогибы балок, заделанных с двух сторон и моделирующих элементы каркаса, при смещении опоры под действием силы (см. рис. 10, б, в) определяют по формулам

$$\omega_x = \frac{ab^3}{24(EI)_{nx}} (q_{xy} - q_{обш});$$

$$\omega_y = \frac{a^3b}{24(EI)_{ny}} (q_{xy} - q_{обш}).$$
(35)

Здесь

$q_{обш}$  – доля касательных усилий в обшивке;

$(EI)_{nx}$ ,  $(EI)_{ny}$  – изгибная жесткость продольных и поперечных элементов каркаса соответственно.

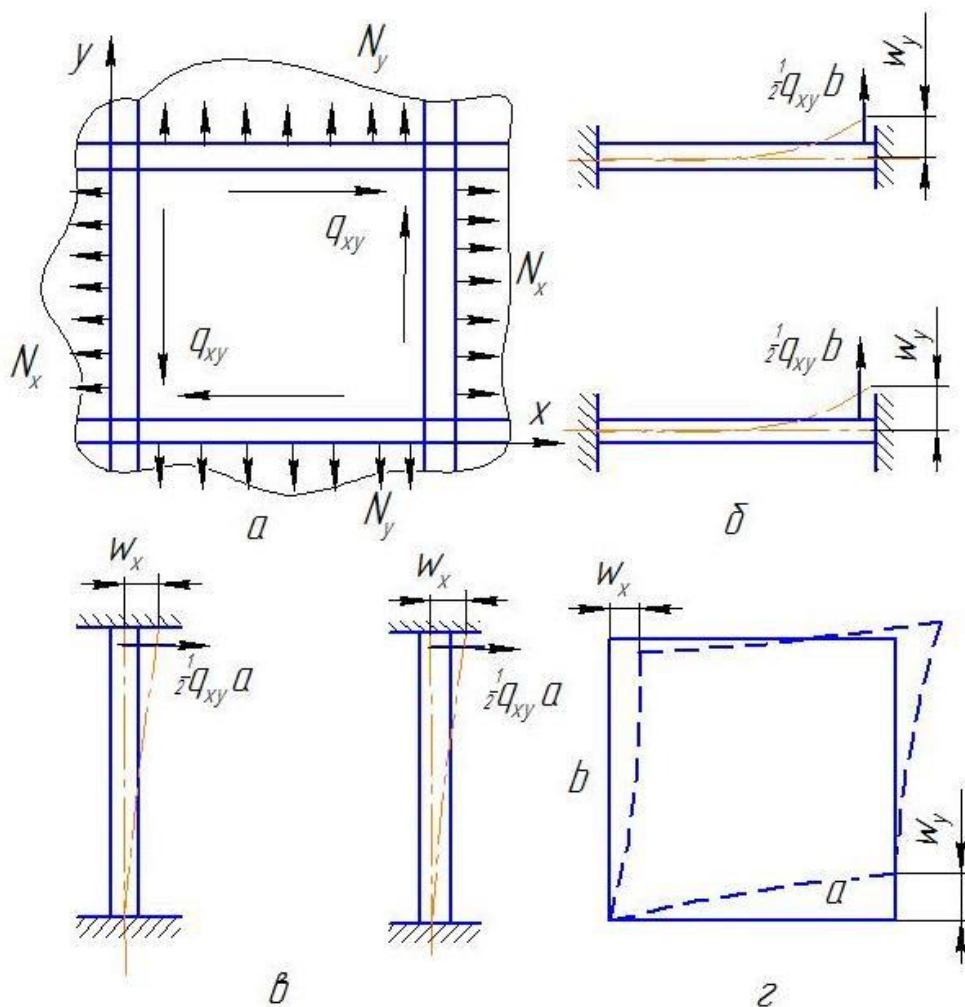


Рисунок 10 – Схема взаимодействия с каркасом рамного типа

С учетом (34) и уравнений равновесия и совместности деформаций каркаса и обшивки можно получить следующую систему уравнений для нахождения касательных усилий в обшивке  $q_{обш}$ , сил в элементах каркаса  $N_{nx}$  и  $N_{ny}$  и нормальных усилий в обшивке  $N_{xобш}$  и  $N_{yобш}$ :



$$\frac{ab(q_{xy} - q_{обш})}{24} \left( \frac{a}{(EI)_{nx}} + \frac{b}{(EI)_{ny}} \right) = \frac{N_{xобш}}{\delta E_x} \eta_{x,xy} + \frac{N_{yобш}}{\delta E_y} \eta_{y,xy} + \frac{q_{обш}}{\delta G_{xy}} + \alpha_{xy} \Delta T; \quad (36)$$

$$N_{nx} + N_{xобш}b = N_{xb}; \quad (37)$$

$$N_{ny} + N_{yобш}a = N_{ya};$$

$$\frac{N_{nx}}{(EF)_{nx}} + \alpha_{nx} \Delta T = \frac{N_{xобш}}{\delta E_x} - \mu_{yx} \frac{N_{yобш}}{\delta E_y} + \eta_{xy,x} \frac{q_{обш}}{\delta G_{xy}} + \alpha_x \Delta T; \quad (38)$$

$$\frac{N_{ny}}{(EF)_{ny}} + \alpha_{ny} \Delta T = -\mu_{yx} \frac{N_{xобш}}{\delta E_x} + \frac{N_{yобш}}{\delta E_y} + \eta_{xy,y} \frac{q_{обш}}{\delta G_{xy}} + \alpha_y \Delta T.$$

Здесь обозначено:

$\delta$  – толщина обшивки;

$E_x, E_y, G_{xy}, \mu_{xy}, \mu_{yx}, \eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}$  – упругие константы материала – обшивки;

$(EF)_{nx}, (EF)_{ny}$  – осевая жесткость продольных и поперечных подкрепляющих элементов;

$\alpha_{nx}, \alpha_{ny}$  – коэффициенты линейного температурного расширения элементов каркаса;

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$  – коэффициенты линейного температурного расширения материала обшивки.

Система уравнений (36) – (38) допускает аналитическое решение.

Если материал обшивки является ортотропным в осях  $x$  и  $y$  (см. рис. 10), то коэффициенты взаимного влияния и  $\alpha_{xy}$  равны нулю. Тогда разрешающая система уравнений (36) – (38) упрощается к виду

$$\frac{ab}{24} \left( \frac{a}{(EI)_{nx}} + \frac{b}{(EI)_{ny}} \right) = \frac{q_{обш}}{\delta G_{xy}}; \quad (39)$$

$$N_{nx} + N_{xобш}b = N_{xb}; \quad (40)$$

$$N_{ny} + N_{yобш}a = N_{ya};$$

$$\frac{N_{nx}}{(EF)_{nx}} + \alpha_{nx} \Delta T = \frac{N_{xобш}}{\delta E_x} - \mu_{yx} \frac{N_{yобш}}{\delta E_y} + \alpha_x \Delta T; \quad (41)$$

$$\frac{N_{ny}}{(EF)_{ny}} + \alpha_{ny} \Delta T = -\mu_{xy} \frac{N_{xобш}}{\delta E_x} + \frac{N_{yобш}}{\delta E_y} + \alpha_y \Delta T.$$

При незначительной изгибной жесткости соединения элементов каркаса между собой целесообразно рассматривать шарнирное соединение. В таком случае касательные усилия полностью воспринимаются обшивкой. Тогда для определения сил  $N_{nx}$  и  $N_{ny}$  и усилий  $N_{xобш}$  и  $N_{yобш}$  используют системы уравнений (37) – (38) для анизотропного композита или (40) – (41) – для ортотропного материала.

В конструкциях летательных аппаратов широко применяются стрингерные и вафельные панели, отличающихся тем, что технологическое напряженное состояние или эксплуатационное температурное имеют место как в обшивке такой панели, так и в подкрепляющих элементах [9]. Расчет монтажных напряжений в стрингерных панелях усложняется тем, что часть внутренних усилий приложены дискретно. В инженерных расчетах при достаточно густом расположении подкрепляющих элементов допустимо рассредоточение дискретных усилий по всему контуру и тогда панель рассматривается как гладкая с соответствующими изгибными жесткостями по описанной выше методике.

Для подкрепленных панелей с тонкой обшивкой допускается их эксплуатация после потери устойчивости обшивки. В этом случае используется методика редуцирования обшивки путем учета только присоединенной ее части к элементам подкрепления [6]. Методика определения редуцированного коэффициента приведена в [6]. Кроме того, рассмотрение только присоединенной части обшивки позволяет принять, что коэффициенты Пуассона и взаимного влияния равны нулю. Касательные усилия воспринимаются изгибом составной балки, составленной из подкрепляющих элементов с присоединенной обшивкой. С учетом сказанного и зависимости для ширины присоединенной обшивки [6] не составляет сложности получение уравнений для определения распределения усилий по редуцированной обшивке и подкрепляющим элементам.

В качестве заключения к статье отметим следующее:

- сформулированы и обоснованы основные особенности композитных материалов и конструкций из них, влияющих на различные аспекты статики;

- проанализированы основные проблемы статики композитных материалов (неоднородная (переменная) анизотропия, трансверсальный и межслоевой сдвиг, нелинейность диаграммы «напряжения – деформация», экспериментальное определение физико-механических свойств) и конструкций из них (межслойные соединения, одноплоскостной закон распределения деформаций по сечению балки, симметрия структуры пакета слоев, протяженность зоны действия принципа Сен-Венана, монтажное напряженно-деформированное состояние). Для каждой проблемы приведены методики их разрешения или возможные алгоритмы;

- обоснованы пределы применимости и проанализированы осо-

бенности использования базовых классических допущений и гипотез механики при анализе напряженно-деформированного состояния конструкций из слоистых композитов;

– приведены практические рекомендации к расчету напряженно-деформированного состояния ряда специфических конструктивно-технологических решений изделий из слоистых композитов.

### Список использованных источников

1. Карпов Я.С. Особенности практической реализации некоторых проблем статики слоистых композитных материалов и конструкций из них. Часть 1. О проблемах статики слоистых композитных материалов [Текст] / Я. С. Карпов, М. А. Шевцова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т». – Вып.4(92) – Х., 2017. – С.7- 26.

2. Карпов Я.С. Соединение деталей и агрегатов из композитных материалов: монография. [Текст] / Я. С. Карпов . – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.

3. Карпов Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник. [Текст] / Я. С. Карпов – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.

4. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. [Текст] / А.Р. Ржаницын – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.

5. Тарнопольский Ю.М. Методы статических испытаний армированных пластиков [Текст] / Ю.М. Тарнопольский, Т.Я. Кинцис. – М.: Химия, 1981. – 271 с.

6. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

7. Образцов И.Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов [Текст] / И.Ф. Образцов, В.В. Васильев, В. А. Бунаков – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.

8. Соппротивление материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А. Л. Квитка и др. /под общ. ред. Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.

9. Андреев А.А. Анализ некоторых фундаментальных проблем создания конструкций из композитных материалов и возможных путей их решения [Текст] / А.А. Андреев, Я.С. Карпов, И.М. Тараненко, М.А. Шевцова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т». – Вып.4(88) – Х., 2016. – С. 37-49.

*Поступила в редакцию 11.01.2018.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*