

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА БАЛОК. ВЫВОД ОБЩИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Одной из важнейших инженерных задач при разработке авиационной техники является обеспечение высоких прочностных и жесткостных характеристик конструкции планера летательного аппарата при относительном сохранении определяющих показателей, таких, как вес, стоимость и др. Комплекс мероприятий, направленных на достижение данной цели, основан не только на методах, связанных с оптимизацией элементов конструктивно-силовой схемы, но и заключается в повышении механических характеристик материалов, используемых при изготовлении конструкции, в частности переходом на композиционные материалы (КМ). Как показывает опыт, применение последних наиболее эффективно в конструкциях, в которых распределение силовых потоков заранее известно, что позволяет заранее определить оптимальные схемы армирования и практически осуществить разделение функций конструктивных элементов по восприятию компонентов напряженного состояния. К таким элементам конструкции планера ЛА, в частности, можно отнести лонжероны крыла и оперения, балки пола отсеков фюзеляжа и т.п., поведение которых можно описать с использованием расчетной схемы балки. Однако, если методы проектирования композитных балок и лонжеронов по условию прочности уже известны и апробированы на практике [1], то при решении задач проектирования, направленных на обеспечение необходимой жесткости таких элементов конструкций, в распоряжении инженеров-конструкторов имеется достаточно ограниченное число методов и средств. Для восполнения указанного недостатка в работе [2] предложен новый метод исследования балок, основанный на представлении конструкции в виде совокупности участков, в пределах которых перемещения описываются через заданные аппроксимирующие функции. Как продолжение начатого исследования [2] получены общие зависимости для расчета статически определимых и неопределимых балок с произвольным характером изменения изгибной жесткости и нагружения по длине.

Как уже отмечалось, суть предлагаемой концепции заключается в дискретизации балки на участки, каждый из которых рассматривается как консольная балка с приложенными на свободном конце сосредоточенными усилиями (поперечной силой и изгибающим моментом). Размеры и количество участков зависит, с одной стороны, от заданного изменения изгибной жесткости по длине (который для композитных балок, как правило, имеет ступенчатый вид), а с другой – характером распределения внешних силовых факторов, которые в данной модели приводятся к эквивалентной системе сосредоточенных по границам участков усилий (рис. 1).

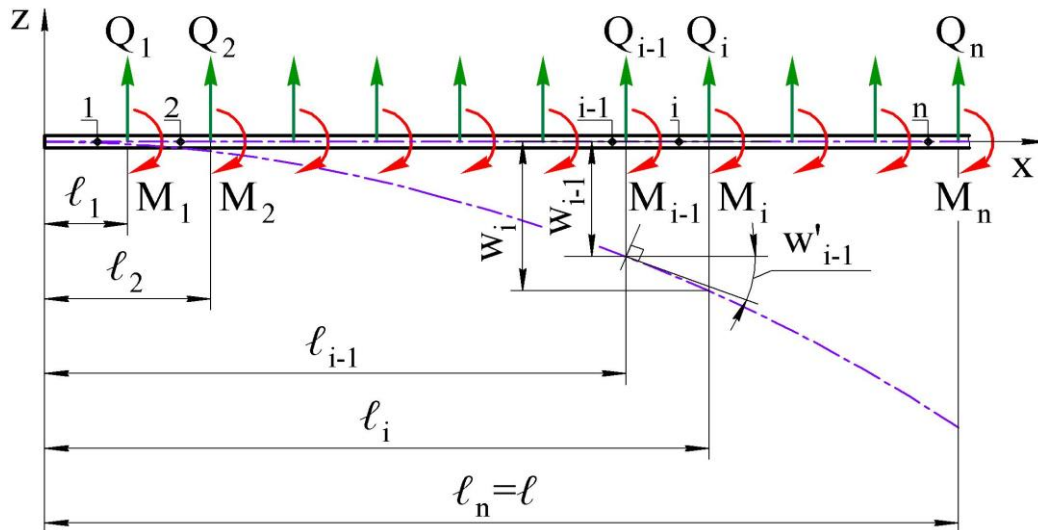


Рисунок 1 – Расчетная схема балки

С учетом основных уравнений расчетной схемы балки

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{EJ}; \quad (1)$$

$$Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial x}, \quad (2)$$

а также принятого допущения о замене распределенных усилий на сосредоточенные для получения решения о деформированном состоянии балки прогиб каждого участка будет описываться строго полиномом третьего порядка:

$$w_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad (3)$$

где коэффициенты полинома a_i , b_i , c_i и d_i находятся из граничных условий на границах участков. В частности, в сечении балки $x = \ell_{i-1}$ кинематические и статические граничные условия с учетом уравнений (1) и (2) примут следующий вид:

$$w_{i-1} = w_i; \quad (4)$$

$$w'_{i-1} = w'_i; \quad (5)$$

$$w''_i(EJ)_i - w''_{i-1}(EJ)_{i-1} = M_{i-1}; \quad (6)$$

$$w'''_i(EJ)_i - w'''_{i-1}(EJ)_{i-1} = Q_{i-1}, \quad (7)$$

где w'_i – тангенс угла наклона i -го участка в соответствующем сечении;

Q_i , M_i – сосредоточенные усилия (поперечная сила и изгибающий момент);

$(EJ)_i$ – изгибная жесткость i -го участка балки.

После подстановки выражения (3) в уравнения (4) – (7) и проведения некоторых преобразований получим зависимости для определения неизвестных коэффициентов a_i , b_i , c_i и d_i :

$$a_i = a_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_i} + \frac{1}{6(EJ)_i} \sum_{k=1}^{i-1} Q_k; \quad (8)$$

$$b_i = b_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_i} + \frac{1}{2(EJ)_i} \sum_{k=1}^{i-1} (M_k - Q_k l_k); \quad (9)$$

$$c_i = c_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \left[3l_k^2 (a_k - a_{k+1}) + 2l_k (b_k - b_{k+1}) \right]; \quad (10)$$

$$d_i = d_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \left[2l_k^3 (a_k - a_{k+1}) + l_k^2 (b_k - b_{k+1}) \right]. \quad (11)$$

С учетом выражений (8) и (9) зависимости (10), (11) для коэффициентов c_i и d_i принимают развернутый вид:

$$c_i = c_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 3l_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left(a_1 (EJ)_1 + \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right) - \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 2l_k \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left(b_1 (EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} (M_s - Q_s l_s) \right) - \frac{M_k - Q_k l_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\}; \quad (12)$$

$$d_i = d_1 - \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 2l_k^3 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left(a_1 (EJ)_1 + \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right) - \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ l_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left(b_1 (EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} (M_s - Q_s l_s) \right) - \frac{M_k - Q_k l_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\}. \quad (13)$$

Как видно из полученных выше уравнений, деформированное состояние балки на любом участке будет зависеть от коэффициентов функции прогиба на первом участке a_1 , b_1 , c_1 и d_1 . Записывая кинематические и/или статические граничные условия для сечений балки, в которых известны прогиб, угол наклона упругой линии, перерезывающая сила и изгибающий момент, можно получить систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_1 , b_1 , c_1 и d_1 .

Для определения обобщенных силовых факторов, действующих на i -м участке, и дальнейшего анализа прочности элементов балки преоб-

разуем зависимости (1) и (2). С учетом заданной функции прогиба (3) получим следующие формулы:

- для перерезывающей силы

$$Q_{zi} = -\frac{d^3 w_i}{dx^3} (EJ)_i = -6a_i (EJ)_i; \quad (14)$$

- для изгибающего момента

$$M_{yi} = -\frac{d^2 w_i}{dx^2} (EJ)_i = -(3a_i x + 2b_i) (EJ)_i. \quad (15)$$

В общем виде эти граничные условия для концевое сечения k -го участка ($X = l_k$) имеют следующий вид:

$$a_k l_k^3 + b_k l_k^2 + c_k l_k + d_k = w_k|_{x=l_k}; \quad (16)$$

$$3a_k l_k^2 + 2b_k l_k + c_k = \theta_k|_{x=l_k}; \quad (17)$$

$$(EJ)_k (6a_k l_k + 2b_k) = -M_{yk}|_{x=l_k}; \quad (18)$$

$$6a_k (EJ)_k = -Q_{zk}|_{x=l_k}. \quad (19)$$

После подстановки в уравнения (16) – (19) выражений для коэффициентов (8), (9), (12) и (13) получим линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных коэффициентов a_1 , b_1 , c_1 и d_1 в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & a_1 (EJ)_1 \left\{ \frac{l_k^3}{(EJ)_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j^2 \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) (3l_k - 2l_j) \right] \right\} + \\ & + b_1 (EJ)_1 \left\{ \frac{l_k^2}{(EJ)_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) (2l_k - l_j) \right] \right\} + c_1 l_k + d_1 + \\ & + \frac{l_k^2}{2(EJ)_k} \sum_{j=1}^{k-1} \left[M_j - \frac{1}{3} Q_j (3l_j - l_k) \right] - \\ & - \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \frac{l_j}{2(EJ)_{j+1}} \left[M_j (2l_k - l_j) - Q_j \frac{l_j}{3} (3l_k - l_j) \right] \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \frac{l_j}{2} (2l_k - l_j) \sum_{s=1}^{j-1} (M_s - Q_s l_s) \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \frac{l_j^2}{6} (3l_k - 2l_j) \sum_{s=1}^{j-1} Q_s \right\} = w_k|_{x=l_k}; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3a_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_k^2}{(EJ)_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\ell_j^2 \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \right] \right\} + \\
& + 2b_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_k}{(EJ)_k} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\ell_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \right] \right\} + c_1 + \\
& + \frac{\ell_k}{(EJ)_k} \sum_{j=1}^{k-1} \left[M_j - \frac{1}{2} Q_j (2\ell_j - \ell_k) \right] - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\ell_j}{(EJ)_{j+1}} \left(M_j - \frac{1}{2} Q_j \ell_j \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \ell_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \left[\sum_{s=1}^{j-1} (M_s - Q_s \ell_s) + \frac{\ell_j}{2} \sum_{s=1}^{j-1} Q_s \right] \right\} = \theta_k |_{x=\ell_k}; \quad (21)
\end{aligned}$$

$$6a_1 \ell_k (EJ)_1 + 2b_1 (EJ)_1 + \ell_k \sum_{j=1}^{k-1} Q_j + \sum_{j=1}^{k-1} (M_j - Q_j \ell_j) = -M_{yk} |_{x=\ell_k}; \quad (22)$$

$$6a_1 (EJ)_1 + \sum_{j=1}^{k-1} Q_j = -Q_{zk} |_{x=\ell_k}. \quad (23)$$

В случае необходимости постановки граничных условий для начального сечения k -го участка (см. рис. 1) параметр ℓ_k , входящий в формулы (20) – (23), следует заменить на ℓ_{k-1} .

Полученные на основе предложенной математической модели зависимости могут быть использованы для исследования жесткостных характеристик, расчета напряженно-деформированного состояния и оптимизации статически определимых и неопределимых балок с произвольным характером нагружения по длине.

Рассмотрим применение предлагаемого метода для анализа деформированного состояния балки со ступенчато-изменяющейся изгибной жесткостью по длине (рис. 2, а). В качестве исходных данных примем следующие значения: $\ell = 10$ м; $Q = 1$ кН; $M = 1$ кНм; $(EJ) = 350$ кНм². С учетом основных положений предлагаемой модели рассматриваемую балку следует разделить на шесть участков ($n = 6$) по сечениям, где приложены нагрузки, а также в местах изменения изгибной жесткости (см. рис. 2, б). Параметры участков (координаты концевого сечения и величины изгибной жесткости), а также значения сосредоточенных усилий с учетом знака приведены в табл. 1. Как уже отмечалось выше, синтезированная математическая модель может применяться как при анализе статически определимых балок, так и статически неопределимых, поэтому в целях подтверждения универсальности полученных формул в примере будут рассмотрены оба типа (рис. 3).

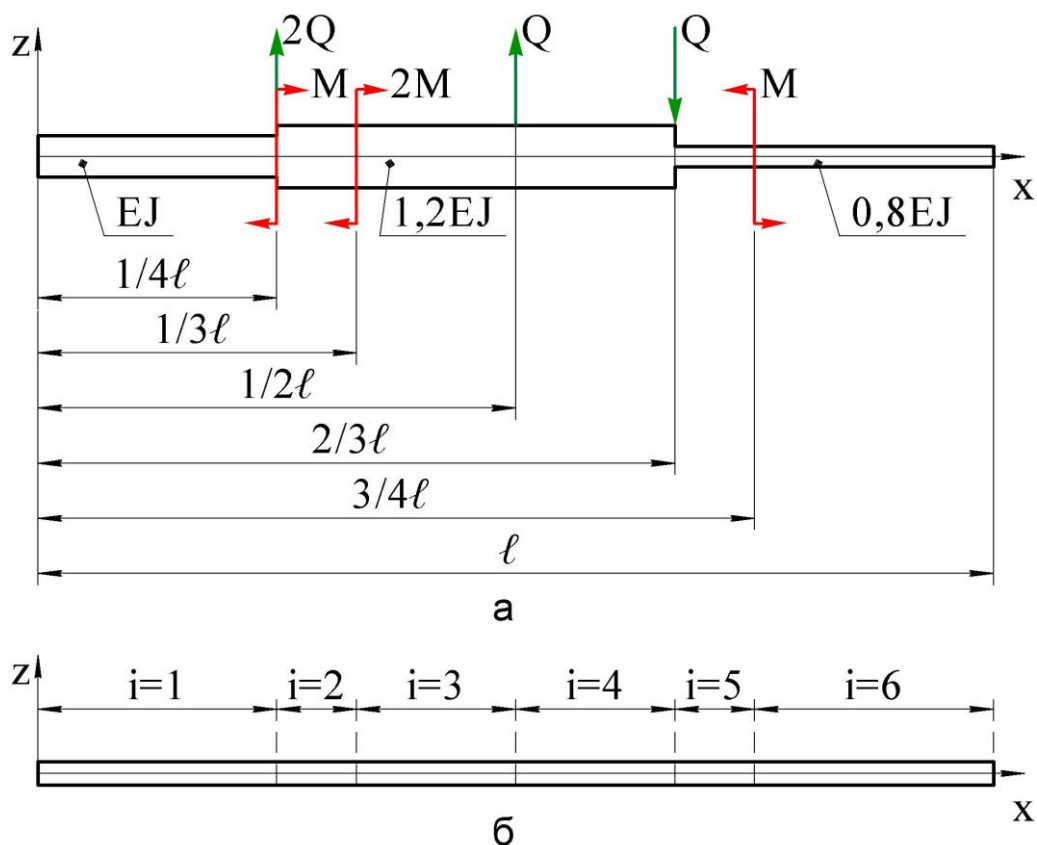


Рисунок 2 – Схема разбиения балки на участки

Таблица 1 – Параметры участков балки

| Номер участка, i | Координата концевое сечения $l_i, \text{м}$ | Изгибная жесткость $(EJ)_i, \text{кНм}^2$ | Нагрузки в концевом сечении | |
|--------------------|---|---|-----------------------------|-------------------|
| | | | $Q_i, \text{кН}$ | $M_i, \text{кНм}$ |
| 1 | 2,50 | 350 | 2 | 1 |
| 2 | 3,33 | 420 | 0 | 2 |
| 3 | 5,0 | 420 | 1 | 0 |
| 4 | 6,67 | 420 | -1 | 0 |
| 5 | 7,50 | 280 | 0 | -1 |
| 6 | 10,0 | 280 | 0 | 0 |

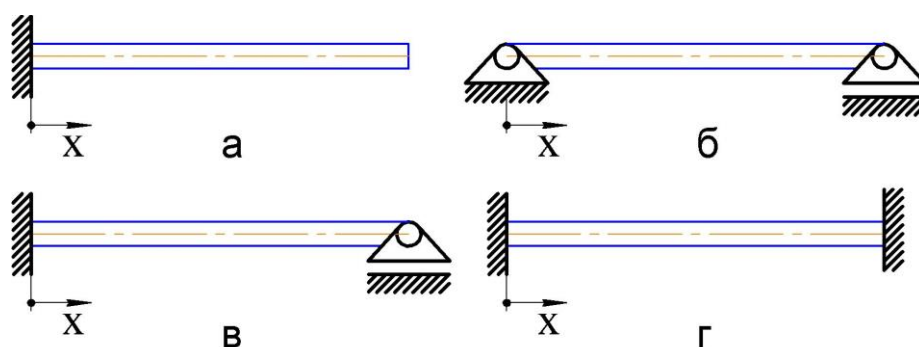


Рисунок 3 – Типы исследуемых балок

Рассмотрим систему разрешающих уравнений для определения коэффициентов a_1 , b_1 , c_1 и d_1 в матричном виде

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

где коэффициенты системы уравнений m_{ij} и правые части n_i определяются с использованием записанных ранее граничных условий (20) – (23). Следует отметить, что если граничные условия записываются для левого конца балки ($x = 0$), т. е. для начального сечения 1-го участка, то в выражениях (20) – (23) следует принять $k = 1$, $\ell_k \rightarrow \ell_{k-1} = 0$.

Для консольной балки (рис. 3, а) необходимо записать два кинематических и два статических граничных условия для защемленного конца балки. Коэффициенты системы уравнений (24) для рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{12} = m_{13} = 0; \quad m_{14} = 1; \\ m_{21} &= m_{22} = m_{24} = 0; \quad m_{23} = 1; \\ m_{31} &= m_{33} = m_{34} = 0; \quad m_{32} = 2(EJ)_1; \\ m_{42} &= m_{43} = m_{44} = 0; \quad m_{41} = 6(EJ)_1; \end{aligned} \quad (25 \text{ а})$$

$$n_1 = n_2 = 0; \quad n_3 = -\sum_{i=1}^n (M_i - Q_i \ell_i); \quad n_4 = -\sum_{i=1}^n Q_i. \quad (25 \text{ б})$$

Для шарнирно опертой балки (рис. 3, б) система разрешающих уравнений включает в себя по одному кинематическому (20) и статическому (22) граничному условию для обоих концов балки ($x = 0$; $x = \ell$), при этом коэффициенты системы уравнений принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{12} = m_{13} = 0; \quad m_{14} = 1; \quad m_{21} = m_{23} = m_{24} = 0; \quad m_{22} = 2(EJ)_1; \\ m_{31} &= (EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^3}{(EJ)_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\ell_j^2 \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) (3\ell_n - 2\ell_j) \right] \right\}; \\ m_{32} &= (EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^2}{(EJ)_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\ell_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) (2\ell_n - \ell_j) \right] \right\}; \quad (26 \text{ а}) \\ m_{33} &= \ell_n; \quad m_{34} = 1; \\ m_{41} &= 6\ell_n (EJ)_1; \quad m_{42} = 2(EJ)_1; \quad m_{43} = m_{44} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n_1 = 0; \quad n_2 = 0; \\
n_3 = & -\frac{\ell_n^2}{2(EJ)_n} \sum_{j=1}^{n-1} \left[M_j - \frac{1}{3} Q_j (3\ell_j - \ell_n) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\ell_j}{2(EJ)_{j+1}} \left[M_j (2\ell_n - \ell_j) - Q_j \frac{\ell_j}{3} (3\ell_n - \ell_j) \right] \right\} - \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \frac{\ell_j}{2} (2\ell_n - \ell_j) \sum_{s=1}^{j-1} (M_s - Q_s \ell_s) \right\} - \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \frac{\ell_j^2}{6} (3\ell_n - 2\ell_j) \sum_{s=1}^{j-1} Q_s \right\}; \\
n_4 = & -\ell_n \sum_{j=1}^{n-1} Q_j - \sum_{j=1}^{n-1} (M_j - Q_j \ell_j).
\end{aligned} \tag{26 б)$$

Для балки, показанной на рис. 3, в, необходимо записать два кинематических граничных условия (20), (21) для защемленного конца, а также одно кинематическое (20) и одно статическое (22) граничное условие для шарнирно опертого конца. Таким образом, первые два уравнения разрешающей системы для этой задачи будут содержать коэффициенты, аналогичные соответствующим уравнениям (25), а последние два – уравнениям (26).

Для балки, защемленной с обоих концов (рис. 3, г), необходимо удовлетворить по два кинематических граничных условия (20), (21) для обоих концов балки. Очевидно, что при этом первые три уравнения будут иметь вид, аналогичный системе уравнений для решения предыдущей задачи, а для коэффициентов четвертого уравнения справедливы следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
m_{41} = & 3(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^2}{(EJ)_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\ell_j^2 \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \right] \right\}; \quad m_{43} = 1; \\
m_{42} = & 2(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n}{(EJ)_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\ell_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \right] \right\}; \quad m_{44} = 0; \\
n_4 = & -\frac{\ell_n}{(EJ)_n} \sum_{j=1}^{n-1} \left[M_j - \frac{1}{2} Q_j (2\ell_j - \ell_n) \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ell_j}{(EJ)_{j+1}} \left(M_j - \frac{1}{2} Q_j \ell_j \right) - \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \ell_j \left(\frac{1}{(EJ)_j} - \frac{1}{(EJ)_{j+1}} \right) \left[\sum_{s=1}^{j-1} (M_s - Q_s \ell_s) + \frac{\ell_j}{2} \sum_{s=1}^{j-1} Q_s \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{27 а) \quad (27 б)}$$

После решения системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_1, b_1, c_1 и d_1 по выражениям (8), (9), (12) и (13) определяются коэффициенты функции прогиба балки в пределах остальных участков a_i, b_i, c_i и d_i .

На рис. 4 приведены результаты исследования деформированного состояния для рассматриваемой балки (рис. 2) с различными условиями закрепления (см. рис. 3).

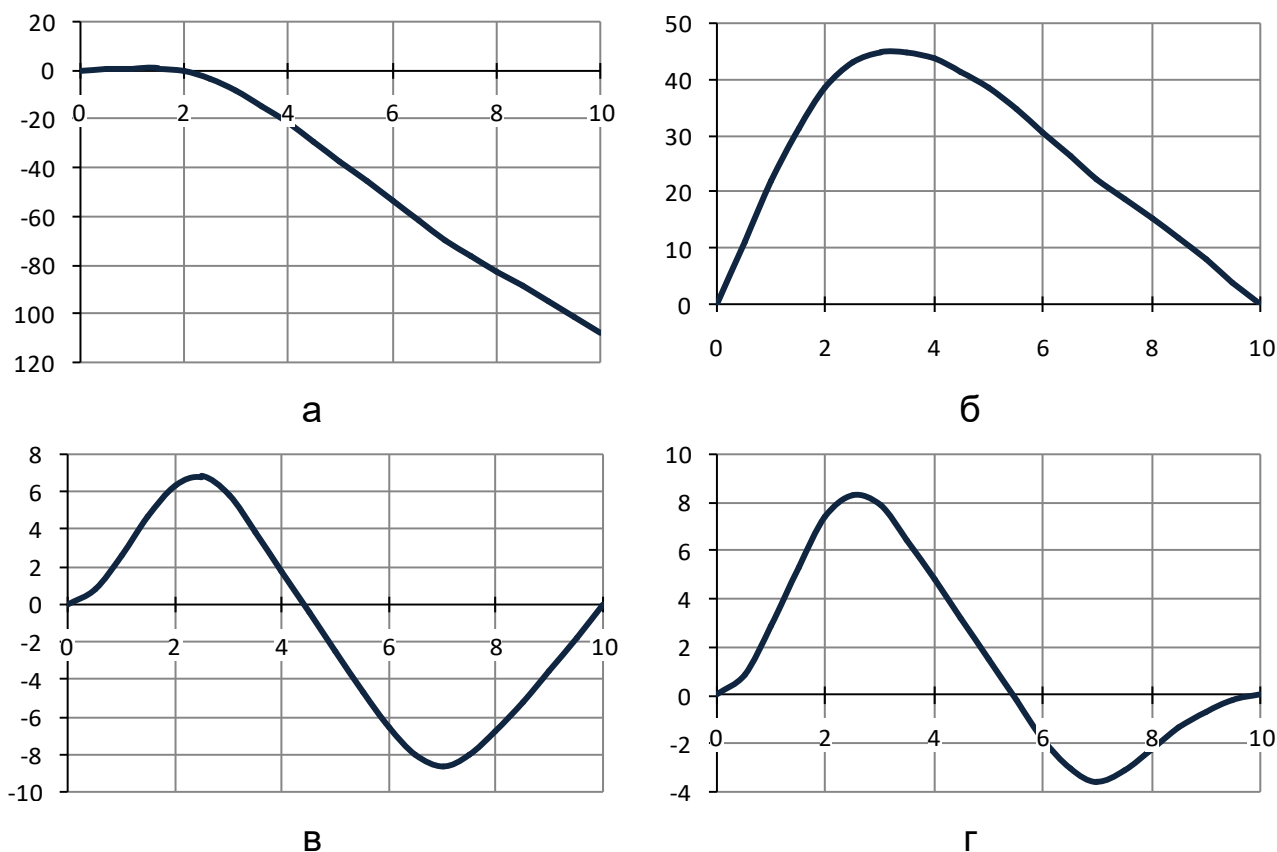


Рисунок 4 – Деформированное состояние балки (прогиб в мм)

Таким образом, в статье предложен новый метод исследования жесткостных характеристик и расчета напряженно-деформированного состояния статически определимых и неопределимых балок с произвольным характером нагружения по длине, который основан на дискретизации балки на участки, в пределах которых изгибная жесткость является постоянной величиной, что обуславливает возможность аппроксимации функции прогиба на участке в виде полинома третьей степени. На основе граничных условий получены общие зависимости для формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов функции прогиба.

К преимуществам предлагаемого метода следует отнести:

- его универсальность, поскольку метод является общим как для статически определимых, так и статически неопределимых балок;

- формирование дискретных моделей существенно меньшей размерности по сравнению с другими известными методами. Это обусловлено тем, что деформированное состояние балки в целом будет определяться через четыре коэффициента функции прогиба, найденных для первого участка. Из этого следует, что матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений будет иметь размер 4x4;

- возможность использования для исследования оптимального распределения изгибной жесткости балок по длине в задачах, связанных с обеспечением требуемого (регламентированного) прогиба. Изгибная жесткость композитных балок или лонжеронов преимущественно формируется полками и может быть вычислена по упрощенной формуле

$$(EJ) = H_{ef}^2 \frac{E_u f_u E_b f_b}{E_u f_u + E_b f_b},$$

где H_{ef} – эффективная высота балки в рассматриваемом сечении (расстояние между центрами тяжести (жесткости) полок); E_u, E_b, f_u, f_b – модули упругости и площади верхней и нижней полок соответственно. Если формообразование полок композитных балок осуществляется выкладкой, то за счет добавления или удаления слоев на определенных участках можно реализовать ступенчатое изменение изгибной жесткости по длине балки. Следовательно, варьируя параметры полок на участках балки можно добиться оптимального распределения материала по длине, которое удовлетворяло бы критерию проектирования (например, минимуму массы) и ограничению на прогиб;

- возможность реализации на ЭВМ в виде комплекса программ по проектированию и расчету балок с произвольным нагружением.

Список использованных источников

1. Проектирование и конструирование изделий из композиционных материалов. Теория и практика : учебник / П. М. Гагауз, Ф. М. Гагауз, Я. С. Карпов, С. П. Кривенда; под общ. ред. Я. С. Карпова. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2015. – 672 с.

2. Гагауз, Ф. М. Новый метод определения обобщенных силовых факторов и прогибов балок в среде цифровых технологий / Ф. М. Гагауз, Я. С. Карпов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1 (93).– Харьков, 2018. – С. 101 – 109.

Поступила в редакцию 20.06.2018.

Рецензент: д-р техн. наук, Я.С. Карпов,

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков