

УДК 624.04: 531

Кирьязов П.Н., к.т.н., доц.,³²
г. Алчевск
Писаревский Б.Ю.,
г. Киев, Украина

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ЖЕСТКОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Аннотация. Статья посвящена актуальной проблеме создания конечно-элементных моделей систем с жесткой восстанавливающей силой в среде ПК ЛИРА-САПР.

Ключевые слова: методика, моделирование, конечно-элементные модели, жесткая восстанавливающая сила, собственные колебания, вынужденные колебания, ПК ЛИРА-САПР.

Состояние проблемы. В механике принято различать линейно деформируемые системы и нелинейно деформируемые системы с «мягкими» и «жесткими» восстанавливающими силами [1], [2]. Графики зависимости «восстанавливающая сила f – отклонение от положения равновесия x » этих типов систем показаны на рис.1.

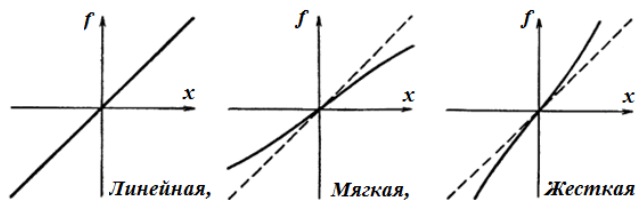


Рис. 1. - Три типа восстанавливающей упругой силы $f(x)$

В ПК ЛИРА-САПР имеется большая библиотека физически линейных и физически нелинейных конечных элементов, поэтому моделирование конструкций и оснований

³² © Кирьязов П.Н., Писаревский Б.Ю.

сооружений с линейными и «мягкими» нелинейными восстанавливающими силами осуществляется без особых проблем. Для тех случаев, когда характеристика жесткости элемента – нелинейная «жесткая», в ПК ЛИРА-САПР инструментария пока нет.

Актуальность. В сооружениях и деталях машин много конструктивных элементов и деталей с «жесткими» восстанавливающими силами – предварительно напряженные тросы, пружинные амортизаторы, некоторые сорта резины, используемые для амортизации. В работе [3] приведены результаты экспериментальных исследований на сжатие насыпных разрушенных горных пород (рис. 2), т.е. при расчете сооружения на таком основании в стадии монтажа необходимо учитывать его «жесткую» характеристику.

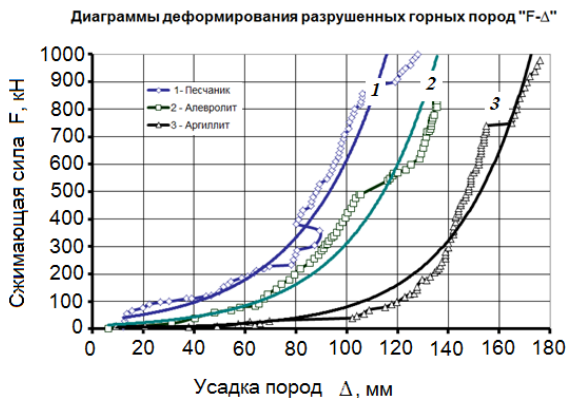


Рис. 2. - Диаграммы «сжимающая сила–перемещение» («F- Δ») для песчаника, алевролита и аргиллита

Для моделирования только некоторых из этих конструкций и деталей (например, предварительно напряженные тросы) в ПК ЛИРА-САПР есть специальные конечные элементы. Поэтому проблема моделирования

систем с жесткими восстанавливающими силами является актуальной.

Новизна. В данной статье предлагается методика моделирования связей и оснований с «жесткой» восстанавливающей силой в среде ПК ЛИРА-САПР. Эта методика позволяет составлять модели и выполнять расчет в среде ПК ЛИРА-САПР многих новых задач, например, продольно-поперечный изгиб и устойчивость, а также собственные и вынужденные колебания балок и плит на упругом основании с «жесткой» постелью и т.п. В работе приведены некоторые результаты решения тестовых задач, для которых имеется аналитическое решение, а также результаты решения новых задач.

1 Модели задачи о колебаниях систем с одной степенью свободы с нелинейной жесткой восстанавливающей силой.

1.1 Колебания точечной массы на натянутой проволоке. Идею предлагаемой методики моделирования связей и оснований с жесткой восстанавливающей силой в среде ПК ЛИРА-САПР проследим на примере систем, описываемых уравнением $m\ddot{x} + f(x) = 0$. Можно привести много примеров систем, движение которых описывается этим уравнением. Примеры таких систем приведены в работах [1], [2]. Наиболее известные примеры – колебания точечной массы на натянутой проволоке, колебания точечной массы на невесомой пружине с жесткостью $k(x)$. Расчетные схемы двух последних задач показаны на рис. 3 и рис. 4.

Величину $f(x)$ можно рассматривать как силу, которую создает пружина с жесткостью $k(x)$, растянутая на длину x , т.е. $f(x) = k(x) \cdot x$. Если жесткость пружины не зависит от

смещения, то говорят, что пружина линейно деформируемая, или упругая сила линейная. Если жесткость возрастает со смещением, то говорят, что пружина, или упругая сила, «жесткая». Если жесткость уменьшается с увеличением смещения, то упругая сила, или пружина, называется «мягкой».

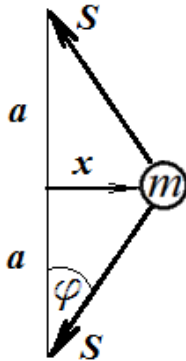


Рис. 3.

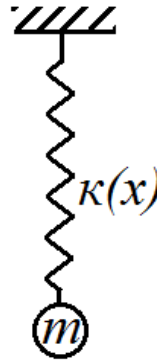


Рис. 4.

Остановимся подробнее на примере системы с нелинейной восстанавливающей силой, показанной на рис. 3. Точечная масса m закреплена в средней точке натянутой упругой проволоки длиной $2a$ так, как это изображено на рис.3. При горизонтальном смещении массы m на величину x относительное удлинение ε проволоки будет равно

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{a}.$$

Если S – начальное натяжение проволоки, то натяжение после смещения массы на величину x будет равно $S + AE\varepsilon$, где E –модуль упругости материала, A – площадь поперечного сечения проволоки. Восстанавливающая сила, действующая на массу m по направлению оси x , будет равна $2(S + AE\varepsilon) \sin(\varphi)$, где

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Если смещение x настолько мало по сравнению с a , что в разложении восстанавливающей силы в ряд по степеням x/a можно пренебречь членами выше третьей степени, то дифференциальное уравнение движения приобретает следующий вид [1]:

$$m\ddot{x} + \frac{2S}{a}x + \frac{AE}{a^3}\left(1 + \frac{S}{AE}\right)x^3 = 0 \quad (1)$$

Так как коэффициент при x^3 положителен, то в рассматриваемом случае упругая сила будет жесткой. В большинстве случаев слагаемым S/AE в коэффициенте при x^3 можно пренебречь, так как оно обычно мало по сравнению с единицей. В этом случае уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + \frac{2S}{a}x + \frac{AE}{a^3}x^3 = 0 \quad (2),$$

а коэффициент жесткости

$$k(x) = \frac{2S}{a} + \frac{AE}{a^3}x^2 \quad (3).$$

Конечно-элементную расчетную схему этой системы легко составить. В среде ПК ЛИРА-САПР она будет иметь вид, показанный на рис. 5.

Усилие натяжения проволоки S создается конечным элементом *КЭ-308*, а проволока (нить) – *КЭ-310*.

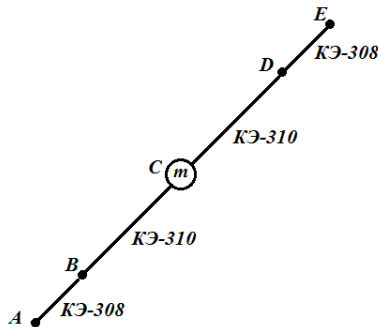


Рис. 5 - Общий вид конечно-элементной модели

1.2 Колебания массы на «жесткой» пружине. Масса m подвешена на пружине, имеющей характеристику $\kappa(x)$, совершает вертикальные колебания при начальном перемещении x_0 и без начальной скорости. Найти период колебаний для частной амплитуды, если даны следующие числовые значения: $\kappa(x) = k_0 + k_1x^2$, $mg=0.45\text{кГс}$; $k_0=0,357\text{кГс/см}$, $k_1=0,111\text{кГс/см}^3$, $x_0=2.5\text{см}$. Условие задачи взято из работы [1].

Уравнение движения массы в этом случае принимает вид:

$$m\ddot{x} + (k_0 + k_1x^2)x = 0. \quad (4)$$

Для произвольного закона жесткости пружины $\kappa(x)$ конечно-элементную модель этой задачи в среде ПК ЛИРА-САПР создать не удастся. Если жесткость пружины меняется по параболическому закону, то для этой задачи можно подобрать подобную модель точечной массы, колеблющейся на натянутой проволоке.

Сравнив уравнение (4) с уравнением (3), получим условия для подбора эквивалентной стержневой системы:

Проблеми розвитку міського середовища. Вип.2 (12) 2014

$$k_0 = \frac{2S}{a}; \quad k_1 = \frac{AE}{a^3}. \quad (5)$$

Задавшись значением модуля упругости $E=2e6 \text{ кгГс/см}^2$ и $a=100\text{см}$, найдем, что этим условиям соответствуют: усилие предварительного напряжения $S=17.85\text{кгГс}$, а площадь поперечного сечения $A=0,0555\text{см}^2$.

Общий вид конечно-элементной модели этой задачи такой же, как на рис.5.

Точки A и E должны быть закреплены неподвижно, точки B и D могут перемещаться вдоль линии B и D , точка C может перемещаться по нормали к BD в горизонтальной плоскости. Усилие предварительного напряжения $S=17.85\text{кгГс}$ создано с помощью $KЭ-308$.

В ПК ЛИРА в процессоре «Динамика плюс» не предусмотрена возможность задавать начальное перемещение, поэтому задачу пришлось решать методом последовательных приближений. Заданное начальное перемещение $x_0=2.5\text{см}$ получилось для треугольного импульса. Сила импульса $F=1.75\text{кгГс}$. Продолжительность импульсивного воздействия $\tau = 0,0555\text{сек}$. После приложения кратковременного импульса система пришла в состояние собственных колебаний. На рис.6 показаны графики законов перемещений, скоростей и ускорений точечной массы. Из этих графиков видно, что движение точечной массы в нелинейных системах с жесткой восстанавливающей силой носит периодический, но не гармонический характер. Период собственных колебаний массы $T=0,151 \text{ сек}$. Точное значение периода собственных колебаний, соответствующее начальному отклонению $x_0=2,5\text{см}$, $T_{теор.}=0,1447 \text{ сек.}$, погрешность расчета - 4.35%, т.е модель этой задачи построена правильно.

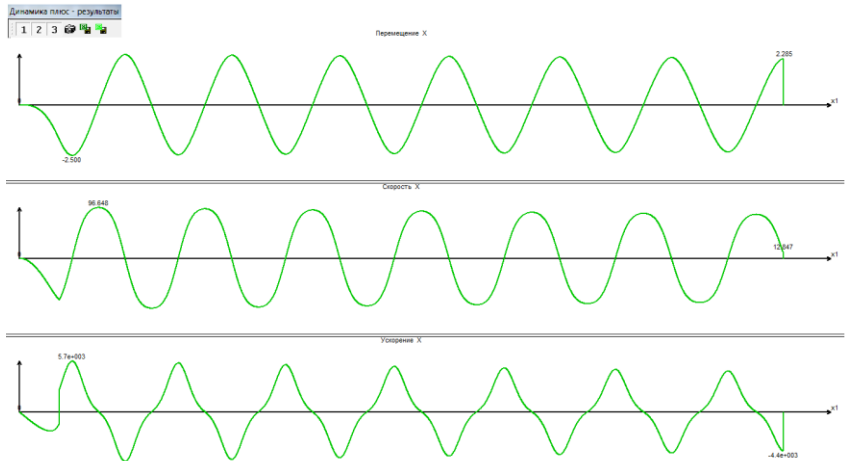


Рис. 6.- Графики законов движения точечной массы на жесткой «пружине»

1.3 Моделирование пружины с произвольным законом жест кости. В п. 1.2 решение задачи о колебаниях массы на жесткой пружине сведено к расчету стержневой системы. Как отмечалось выше, это можно легко сделать, если жесткость пружины меняется по параболическому закону. Рассмотрим, как средствами ПК ЛИРА-САПР можно создать модель «жесткой « пружины с произвольным законом изменения жесткости $k(x)$. Пусть график $k(x)$ имеет вид, показанный на рис.7.

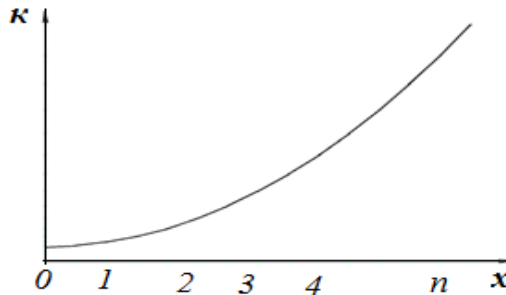


Рис. 7 – График жесткости «жесткой « пружины

В библиотеке конечных элементов ПК ЛИРА-САПР имеется двухузловой КЭ односторонней упругой связи между узлами – КЭ-262 [4]. Два свойства этого конечного элемента – работать только на растяжение (сжатие) и включаться в работу после того, как будет выбран заданный зазор, - позволяют моделировать опоры с жесткой характеристикой любого вида. Это могут быть, например, пружины конические, в форме выпуклого либо вогнутого параболоида и другие. Разобьем интервал возможной деформации пружины на n участков (не обязательно равномерно). Вычислим значения жесткости на границах участков $k(x_0), k(x_1), k(x_2), \dots, k(x_n)$. Моделируемую опору наберем с n пружин (КЭ-262), вставленных между двумя узлами по принципу «стакан в стакане». Первая пружина - с жесткостью $k_1 = k(x_0)$ и с нулевым зазором, вторая пружина - с жесткостью $k_2 = k(x_1) - k(x_0)$ и с зазором, равным x_1 , третья пружина - с жесткостью $k_3 = k(x_2) - k(x_1)$ и с зазором, равным x_2 , и т.д. Полученная опора будет мягче, чем опора с заданной жесткостью $k(x)$. Можно сделать опору чуть жестче. В этом случае первая пружина должна быть с жесткостью $k_1 = k(x_1)$ и с нулевым зазором, вторая пружина - с жесткостью $k_2 = k(x_2) - k(x_1)$ и с зазором, равным x_1 , третья пружина - с жесткостью $k_3 = k(x_3) - k(x_2)$ и с зазором, равным x_2 , и т.д. Чем мельче будут участки, тем меньше будет отличаться смоделированная опора от проектной.

Для пружины, рассмотренной в п.1.2, информация, необходимая для моделирования, приведена в таблице 1.

Конечно-элементная модель задачи о колебаниях точечной массы на «жесткой» пружине, смоделированной с помощью КЭ-262, показана на рис.8.

Таблиця 1.

Жесткостные характеристики элементов модели

Моделируемая пружина		Модель из КЭ-262		
деформация x , см	жесткость $k(x)$, кгс/см	№ КЭ-262	жесткость КЭ-262, кгс/см	зазор, см
0.0	0.3570	1	0.3570	0.0
0.5	0.3848	2	0.0278	0.5
1.0	0.4680	3	0.0833	1.0
1.5	0.6068	4	0.1388	1.5
2.0	0.8010	5	0.1943	2.0
2.5	1.0508	6	0.2498	2.5
3.0	1.3560	7	0.3053	3.0
3.5	1.7168	8	0.3608	3.5
4.0	2.1333	9	0.4166	4.0
4.5	2.6048	10	0.4715	4.5
5.0	3.1320	11	0.5273	5.0
5.5	3.7148	12	0.5828	5.5
6.0	4.3530	13	0.6383	6.0
6.5	5.0418	14	0.6888	6.5
7.0	5.7960	15	0.7543	7.0

Наборы на участках 1-2 и 1-3 в данной задаче в силу ее симметрии должны быть одинаковыми по свойствам (все элементы работают либо только на сжатие, либо только на растяжение).

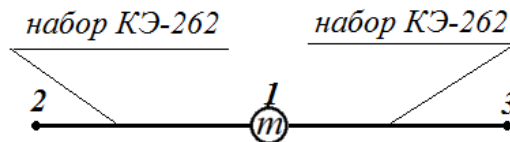


Рис. 8 – Модель задачи о колебаниях точечной массы на «жесткой» пружине

Проблеми розвитку міського середовища. Вип.2 (12) 2014

Точечная масса, вес которой $mg=0.45кГс$, находится в точке 1. Точки 2 и 3 жестко заземлены. Как и в модели, описанной в п. 1.2, к точечной массе был приложен короткий импульс, после чего система начала совершать свободные колебания. Сила импульса и продолжительность импульсивного воздействия были взяты такими же, как в п. 1.2. ($F=1.75кГс$; $\tau = 0,0555сек$). На рис.9 показаны графики законов перемещений, скоростей и ускорений точечной массы. Отклонение точечной массы в конце импульса оказалось равным $2.96см$, а период собственных колебаний – $T=0.161сек$. Большую, чем в предыдущей модели, погрешность можно объяснить тем, что пружина в этой модели мягче.

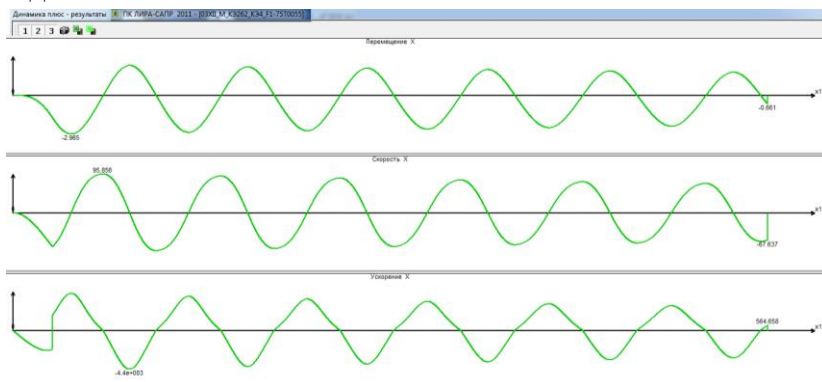


Рис. 9. - Графики законов движения точечной массы на «жесткой» пружине, изготовленной из КЭ-262

2 Колебания колонны, связанной с нитью, натянутой перпендикулярно плоскости движения. Расчетная схема колонны показана на рис. 10. Задача решалась в ПК ЛИРА с помощью процессора «Динамика плюс». Для расчета были приняты: общая длина колонны $l=7м$, расстояние до нити от низа колонны - $l_1=1.5м$, $a=1м$.

Проблеми розвитку міського середовища. Вип.2 (12) 2014

Сечение колонны – труба 102×20 мм. Нить – стальной прокат диаметром 20 мм. Усилие предварительного напряжения нити $S=2000$ кгс. Вес точечной массы m – 1000 кгс. Низ колонны жестко зашцеилен.

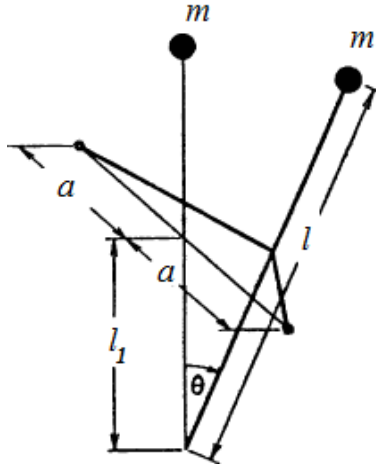


Рис. 10 - Расчетная схема колонны

Были решены задачи о собственных и вынужденных колебаниях колонны. Для решения обеих задач было создано две модели.

Первая модель (модель №1) – традиционная. Колонна – КЭ-10, нить – КЭ-310, для создания предварительного натяжения нити использован КЭ-308.

Во второй модели (модель №2) роль предварительно напряженной нити играет «жесткая» пружина, жесткость которой определялась по методике, изложенной выше. Для принятых размеров $k_0 = \frac{2S}{a} = 40 \text{ кгс/см}$; $k_1 = \frac{AE}{a^3} = 6.28 \text{ кгс/см}^3$.

Таблиця 2.
Жесткости КЭ-262 для пружины

Модель пружины из КЭ-262		
№ КЭ-262	жесткость КЭ-262, кгс/см	зазор, см
1	40.00	0
2	6.28	1
3	18.92	2
4	30.50	3
5	44.86	4
6	56.52	5
7	69.08	6
8	81.12	7
9	94.72	8
10	106.76	9
11	119.32	10

Ниже приведены некоторые результаты расчета этой задачи.

2. 1 Собственные колебания колонны в модели №1.

К точечной массе был приложен импульс. Сила импульса $F=1000\text{кгс}$. Продолжительность импульсивного воздействия $\tau = 1\text{сек}$. После этого система начала совершать свободные колебания. На рис.11 показаны графики законов перемещений, скоростей и ускорений точечной массы после приложения импульса. Отклонение точечной массы в конце импульса оказалось равным 23.9см , а период собственных колебаний – $T=1.36\text{сек}$.

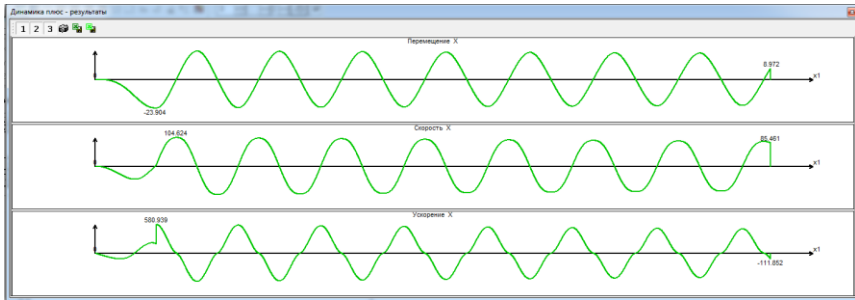


Рис. 11. – Собственные колебания точечной массы в модели №1

2. 2 Собственные колебания колонны в модели №2.

К точечной массе был приложен такой же импульс, как и в модели №1, после чего система начала совершать свободные колебания. На рис.12 показаны графики законов перемещений, скоростей и ускорений точечной массы после приложения импульса. Отклонение точечной массы в конце импульса оказалось равным 29.2см , а период собственных колебаний – $T=1.43\text{сек}$.

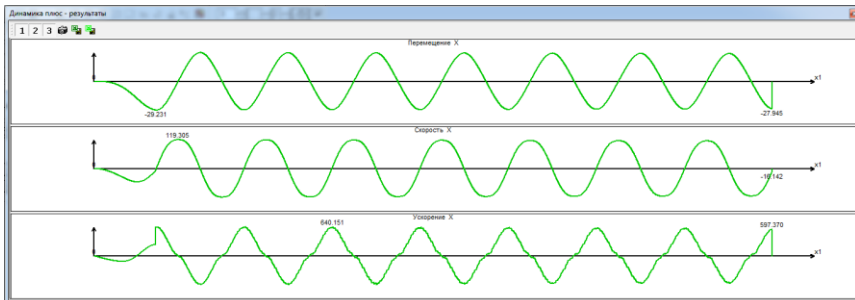


Рис. 12. - Собственные колебания массы в модели №2

2.3 Вынужденные колебания колонны в модели №1.

К точечной массе была приложена сосредоточенная сила, меняющаяся во времени по синусоидальному закону. Амплитуда силы – $F=1000\text{кГс}$, круговая частота – 1

радиан/сек. Время воздействия – 20 сек. На рис.13 показан закон перемещений точечной массы при вынужденных колебаниях.

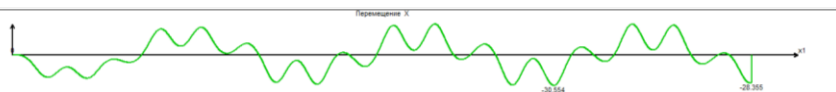


Рис. 13. – Вынужденные колебания массы в модели №1

2.4 Вынужденные колебания колонны в модели №2.

Воздействие, приложенное к точечной массе, вызвало перемещение, закон которого показан на рис. 14.

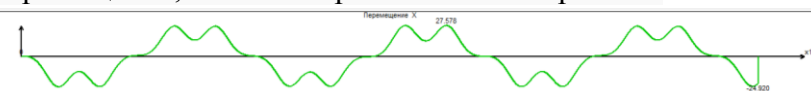


Рис. 14. – Вынужденные колебания точечной массы в модели №2

Выводы. Полученные результаты решения тестовых задач хорошо согласуются с известными теоретическими результатами. Предлагаемая методика создания конечно-элементных моделей систем с жесткой восстанавливающей силой в среде ПК ЛИРА-САПР позволяет решить большинство таких задач.

Использованная литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.:Гос. изд. Физико-математической литературы, 1959. – 440 с.
2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 264 с.
3. Аверин Г.А., Кирьязов П.Н., Доценко О.Г. Механические характеристики пород кровли. // «Уголь Украины». – 2010, апрель, с. 38-40.
4. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы.: учеб. пособие/ под ред. Академика РААСН, д.т.н., проф. А.С.Городецкого/ Е.Б.Стрелец-Стрелецкий, В.Е.Боговис, Ю.В.Гензерский и др. – К.: «Факт», 2008. – 168с.

Annotation. Article is devoted to the problem of creating finite element models of systems with stiff restoring force in the medium LIRA-SAPR.

Key words: methods, modeling, finite-element models, stiff restoring force characteristic oscillations, forced oscillations, LIRA- SAPR.

Анотація. Стаття присвячена актуальній проблемі створення скінченно-елементних моделей систем с жорсткою силою відновлення в середовищі ПК ЛІРА-САПР.

Ключові слова: методика, моделювання, скінченно-елементні моделі, жорстка сила відновлення, власні коливання, вимушені коливання, ПК ЛІРА-САПР.

Стаття надійшла до редакції у листопаді 2013р.

УДК 69.059.28

Першаков В.М., д.т.н., проф.,
Лисницька К.М., аспірант³³
(НАУ, м. Київ, Україна)

УРАХУВАННЯ РИЗИКІВ ВИНИКНЕННЯ АВАРІЇ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД

Анотація: В статті розглянуто теоретичний і фактичний ризик виникнення аварії на об'єкті на прикладі 30-ти поверхової будівлі. Розкрито можливість експериментального визначення середнього рівня надійності конструкції.

Ключові слова: теорія ризиків, фактичний ризик, теоретичний ризик, гранично – допустимий ризик, ймовірність аварії, закон розподілення.

Існуюча тенденція підвищення ризиків для існування людини в останні роки призвела до концентрації інтересу до проблеми забезпечення стійкості будівель при аварійних ситуаціях.

³³ © Першаков В.М., Лисницька К.М.