

## ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ АНАЛИЗЕ ВЫСОКОДОБОТНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ДЛИТЕЛЬНЫМИ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

*В.М. ЗАЯЦ*

Предложен итерационный подход к минимизации погрешности дискретизации численных методов второго порядка, базирующийся на методе Линигера – Уилабби. Сущность подхода заключается в определении поправок к явному и неявному методу Эйлера в тот момент времени, когда эти вклады эквивалентны. Подтверждено улучшение временных и точностных характеристик процесса вычислений при расчете кварцевых генераторов 9 порядка, автоколебательных систем 18 порядка с длительными переходными процессами, консервативных систем без потерь 30 порядка.

*Ключевые слова:* итерационный подход, численные методы, погрешность дискретизации, высокодобротные генераторы, переходные процессы, установившиеся режимы.

### ВВЕДЕНИЕ

При проектировании реальных радиотехнических устройств, обеспечивающих желаемые характеристики информационного сигнала по амплитуде, частоте и форме, целесообразно провести их анализ и компьютерное моделирование путём построения математической модели разрабатываемого объекта. Такой подход требует значительно меньших затрат времени и технических средств по сравнению с физическим экспериментом, особенно на предварительной стадии разработки, когда разрабатываемое устройство отсутствует.

В последнее время в нелинейной динамике широкое использование находят дискретные модели динамических систем [1-13], для которых дискретность заложена в природе самого объекта исследований, а не является следствием дискретизации непрерывной системы. Целесообразность использования дискретных по своей природе моделей объясняется следующими их особенностями:

- простотой математического описания по сравнению с непрерывными моделями;
- наличием широкого спектра динамических режимов;
- конечной мерностью, что позволяет моделировать каждую новую гармонику путём её введения в вектор переменных состояния, в то время как в непрерывных системах для решения этой задачи необходимо повышать размерность системы;
- отсутствием необходимости определения оптимального шага дискретизации, оценки локальной и глобальной погрешности численных методов, исследования их устойчивости;
- максимальной приспособленностью к постановке компьютерного эксперимента.

При построении дискретной модели путём применения численного алгоритма необходимо позаботиться о применении такого метода дискретизации, который минимизирует погрешность вычислений и является  $A$ -устойчивым.

В противном случае накопление погрешности вычислений приведёт к потере не только приемлемых количественных результатов, но и потере качественного соответствия непрерывной системы и её дискретной модели.

В данной работе предложен итерационный подход к построению разностных алгоритмов, которые позволяют минимизировать величину погрешности дискретизации. Целесообразность использования методов этого класса подтверждена рассмотрением консервативных систем без потерь, автоколебательных систем с длительными переходными процессами и систем с высокой добротностью.

### 1. ПОДХОДЫ К МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

В работе [7] предложено учитывать поправки для следующей точки дискретизации не на середине шага, а в тот момент времени, когда вклады явного и неявного методов Эйлера эквивалентны. С этой целью разностная формула для построения метода представлена в виде, предложенном Линигером-Уилабби:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(1 - \mu)\mathbf{f}_n + h \cdot \mu \cdot \mathbf{f}_{n+1}, \quad (1)$$

которая при  $\mu = 0$  соответствует явному методу Эйлера;  $\mu = 0,5$  — метода трапеций;  $\mu = 1$  — неявному методу Эйлера. Приравняв второй и третий члены в правой части в формуле (1), получим значение параметра  $\mu$ , при котором явный и неявный методы Эйлера вносят одинаковый вклад в поправку к значению  $x_n$ :

$$\mu = \frac{\mathbf{f}_n}{\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}}. \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получена новая разностная формула

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{2 \cdot h \cdot \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{f}_{n+1}}{(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1})}. \quad (3)$$

Поскольку по построению формулы (3) вклад каждого из методов Эйлера не превышает половины расстояния между  $x_n$  и  $x_{n+1}$ , то

метод (3) дает гарантированное ограничение на величину погрешности дискретизации на каждом шаге и обеспечивает ее положительность. Геометрическая иллюстрация предложенного способа уменьшения погрешности дискретизации проиллюстрирована на рис. 1. Если поправки за явным и неявным методами Эйлера до следующей точки дискретизации учитывать в момент времени, соответствующий точке С, как показано на рис. 1, то получим метод трапеции; в точке В — это предлагаемый (итерационный) метод, который уравнивает вклады методов Эйлера; в точке А — получается оптимальная комбинация, которая соответствует точке пересечения касательных к  $x_n$  и  $x_{n+1}$  точек дискретизации.

Для оценки погрешности метода (3) проведен анализ погрешности дискретизации на примере модели консервативной системы второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x, \quad (3a)$$

который подтвердил, что погрешность дискретизации метода (4) пропорциональна  $h^2/24$ , как и в методе трапеций, но имеет противоположный знак и в два раза меньше абсолютной величины. Исследования показали, что метод (3), как метод трапеций, обладает свойством А-устойчивости

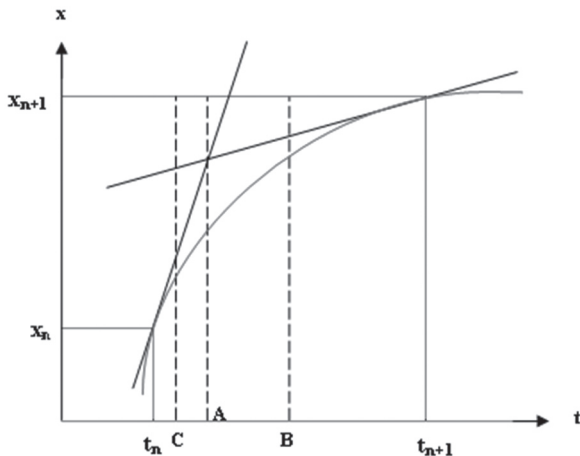


Рис. 1. Геометрическая интерпретация итерационного подхода к минимизации погрешности дискретизации

## 2. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Учитывая, что погрешность метода (3) и метода трапеций (формула (1) при  $\mu = 0,5$ ) имеют противоположные знаки, можно провести их арифметическое усреднение, тем самым уменьшить величину погрешности. Применяя в первой половине шага формулу (3), а на второй формулу (1), получаем разностную формулу

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{(f_n + f_{n+1})} + \frac{h}{4} (f_n + f_{n+1}), \quad (4)$$

которую назовем разностной комбинацией первого рода (К1Р). Погрешность дискретизации

при использовании (4) к консервативной системе оказалась в два раза меньше по сравнению с методом (3) и противоположной по знаку по отношению к методу трапеции. Теперь после усреднения (1) и (4) получаем разностную комбинацию второго рода (К2Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{2 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{3 \cdot h}{8} (f_n + f_{n+1}). \quad (5)$$

Как показали результаты анализа погрешности дискретизации метода (5) при рассмотрении модели без потерь, она оказалась в 4 раза меньше погрешности метода трапеций и в два раза меньше, чем погрешность метода (4). При этом знак погрешности в К2Р совпадает со знаком погрешности в методе трапеций и противоположный погрешности, который дает К1Р. Таким образом, можно ожидать дальнейшего уменьшения величины погрешности дискретизации комбинации методов (4) и (5), которая приводит к разностной комбинации третьего рода (К3Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{4 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{5 \cdot h}{16} (f_n + f_{n+1}). \quad (6)$$

Заметим, что рассматривать комбинацию (5) с (3) нецелесообразно (хотя она и имеет право на существование), поскольку (4) имеет в 4 раза меньшую погрешность дискретизации по сравнению с (3). Кроме того, знаки погрешности в (3) и (5) совпадают.

## 3. ОПТИМАЛЬНАЯ КОМБИНАЦИЯ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ПОГРЕШНОСТИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Предложенные комбинации разностных схем построены таким образом, что в комбинациях нечетного рода (К1Р, К3Р) более существенным является вклад второго члена в полученных формулах, по сравнению с третьим, а в комбинациях парного рода (К2Р) эти вклады практически выравниваются. Такое построение обеспечивает изменение знака погрешности при получении новой комбинации. Итак, можно сконструировать метод второго порядка, который обеспечит с точностью до членов второго порядка малости сколь угодно малую погрешность дискретизации. После арифметического усреднения (5) и (6) приходим к разностной схеме четвертого рода (К4Р):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{5 \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{8 \cdot (f_n + f_{n+1})} + \frac{11 \cdot h}{32} (f_n + f_{n+1}). \quad (7)$$

Анализируя формулы (4)–(7), на  $k$ -вом шаге, применяя полшага парную комбинацию, а полшага нечетную, получаем разностную схему для комбинации  $k$ -го рода (ККР):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_k \cdot h \cdot f_n \cdot f_{n+1}}{(f_n + f_{n+1})} + a_{k+1} \cdot h \cdot (f_n + f_{n+1}), \quad (8)$$

где

$$a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}}; \quad a_{k+1} = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \cdot 2^{k+1}}.$$

Очевидно, с ростом  $k$  величины коэффициентов  $a_k$  и  $a_{k+1}$  уменьшаются, что приводит к уменьшению погрешности дискретизации.

При этом, погрешность дискретизации любой  $k$ -й комбинации может быть рассчитана по формуле

$$\delta = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}, \quad (9)$$

о чем свидетельствует проведенный анализ консервативных систем второго порядка и систем с высокой добротностью высоких порядков.

С целью минимизации погрешности дискретизации в (9) осуществим предельный переход, направив  $k$  к бесконечности. Получаем разностную схему (10), для которой с точностью до членов второго порядка малости погрешность дискретизации отсутствует

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{2 \cdot h \cdot \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{f}_{n+1}}{3 \cdot (\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1})} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot (\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}). \quad (10)$$

Отметим, что все полученные разностные формулы (4) – (8), (10) для дискретизации непрерывных систем обладают свойством А — устойчивости, что делает невозможным накопление погрешности дискретизации при длительных переходных процессах, которые характерны для динамических систем с высокой добротностью. Этот результат подтвержден расчетом кварцевых генераторных устройств и высокодобротных генераторных схем с длительными переходными процессами [7].

#### 4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОМБИНАЦИОННЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Для проведения анализа устойчивости полученных разностных схем воспользуемся консервативной системой второго порядка (3а). Для анализа удобнее привести ее к нормальной форме Коши в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x^1; \quad \frac{dx^1}{dt} = -\omega^2 \cdot x. \quad (11a)$$

После применения (3) к уравнениям (11) приходим к разностным уравнениям

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2 \cdot h \cdot x_{n+1}^1 \cdot x_n^1}{x_{n+1}^1 + x_n^1} \quad (11б)$$

$$\text{и } x_{n+1}^1 = x_n^1 - \frac{2 \cdot h \cdot \omega^2 \cdot x_{n+1} \cdot x_n}{x_{n+1} + x_n},$$

решение которых  $x_p$ , приближённое к решению (3а), имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+1}^1 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}^n,$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — вектор-столбец мультипликаторов разностной системы (11б);  $\mathbf{C}$  — матрица собственных чисел собственных векторов системы (11б). Несложно убедиться, что мультипликаторы

дискретной модели (11б) определяются собственными значениями непрерывной системы (3а). Уместно сразу вместо системы второго порядка анализировать два уравнения первого порядка, записанные относительно собственных значений (3а):

$$\frac{dx}{dt} = j \cdot \omega \cdot x \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = -j \cdot \omega \cdot x, \quad (11с)$$

которым соответствуют мультипликаторы дискретной системы (11)

$$\rho_1 = j \cdot \omega \cdot h + \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2)}$$

$$\text{и } \rho_2 = -j \cdot \omega \cdot h + \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2)}.$$

Поскольку элементы матрицы  $\mathbf{C}$  определяются начальными условиями, которые существенно влияют на область сходимости процесса вычислений, а погрешность дискретизации численного метода от них не зависит, то достаточно оценить модули и аргументы мультипликаторов:

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1 + h^4 \cdot \omega^4 \quad \text{и} \quad \varphi_1 = -\varphi_2 = \arctg \frac{\omega \cdot h}{(1 - h^2 \cdot \omega^2 / 2)}.$$

Таким образом, погрешность в определении амплитуды колебаний с точностью до членов второго порядка малости при использовании метода (3) отсутствует. Учитывая, что приближённую величину периода колебаний можно определить из равенства

$$T_p = \frac{2\pi \cdot h}{\varphi},$$

относительная величина погрешности в определении периода колебаний составляет:

$$\delta T = \frac{T_0 - T_p}{T_0} = \frac{h^2 \omega^2}{6}.$$

По сравнению с методом трапеции [3], эта погрешность в два раза больше по абсолютной величине, но имеет противоположный знак.

Для этой комбинации мультипликаторы, определённые путём дискретизации уравнений (11с) с использованием К1Р (4), имеют вид:

$$\rho_1 = \frac{6 \cdot j \cdot \omega \cdot h + 8 \cdot \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2 / 2)}}{8 \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot h / 4)}$$

$$\text{и } \rho_2 = \frac{-6 \cdot j \cdot \omega \cdot h + 8 \cdot \sqrt{(1 - \omega^2 \cdot h^2 / 2)}}{8 \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot h / 4)}.$$

Таким образом,

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1$$

$$i\varphi_1 = -\varphi_2 = \arctg \frac{3 \cdot \omega \cdot h \cdot \sqrt{(1 + h^2 \cdot \omega^2 / 2)}}{4} + \arctg \frac{\omega \cdot h}{4}.$$

Поскольку модули этих мультипликаторов равны единице, то погрешность определения амплитуды колебаний отсутствует. Погрешность дискретизации при использовании (4) к консервативной системе (3а) оказывается в два раза меньше по величине и противоположной

по знаку, по сравнению с методом трапеции, то есть равна  $h^2\omega^2/24$ . Заметим, что эта комбинация обладает свойством *A*-устойчивости, поскольку модули мультипликаторов не выходят за пределы круга единичного радиуса.

Как показали результаты оценки погрешности дискретизации метода (5) при рассмотрении модели без потерь (3а), она оказалась в 4 раза меньше погрешности метода трапеций и в два раза меньше, чем погрешность метода (4). Таким образом, для метода (5)  $\delta T = -h^2\omega^2/48$ . При этом знак погрешности в К2Р совпадает со знаком погрешности метода трапеций и имеет противоположный знак к погрешности, который дает К1Р. Как и предыдущая, комбинация (5) обладает свойством *A*-устойчивости.

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Полученные результаты по оценке погрешности дискретизации разностных схем (4)–(8) и (10) подтверждены при моделировании установившихся режимов в генераторе Ван дер Поля [1], в модель которого введена кубическая нелинейность для затягивания переходного процесса. Как свидетельствуют результаты компьютерных экспериментов, погрешность в определении переменных состояния рассмотренной модели отсутствует, а погрешность определения периода колебаний вполне согласуется с аналитическим выражением (9) для разных значений параметра *k*.

Для убедительного подтверждения правомочности полученных результатов проводился анализ высокодобротных генераторных схем [7] с длительными переходными процессами.

В качестве первого примера рассматривалась модель кварцевого генератора, схема которого показана на рис. 1.

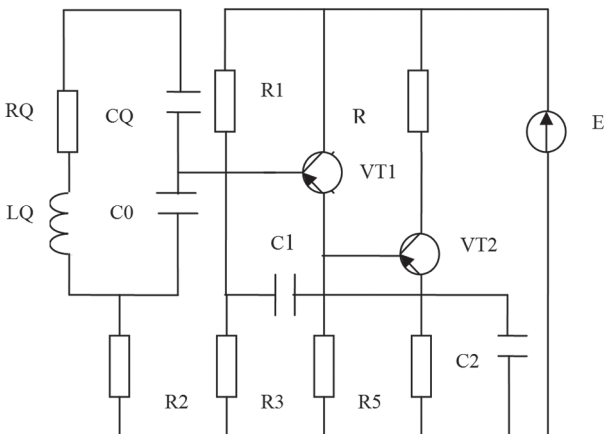


Рис. 1. Схема кварцевого генератора

Для этой схемы вектор переменных состояния представлен в виде

$$X(9) = \{UCQ, JLQ, UC0, UC1, UCK2, UCE1, UCK2, UCE2, UC2\}.$$

Добротность схемы составляет  $1.5 \times 10^6$ . Переходный процесс настолько затяжной, что

требовалось применение алгоритмов ускорения [7] для определения установившегося режима, поскольку после расчета первых трех периодов требуется проведение более 20 итераций по Ньютону на каждом шаге интегрирования, что приводит к существенным временным затратам на проведение расчета. Применение же алгоритмов ускорения позволило определить установившийся режим за 13 экстраполяций. При этом требуется проведение 3-4 итераций по Ньютону для достижения установившегося режима с точностью  $10^{-10}$ . Анализ переходного процесса показывает, что выигрыш во времени расчета составляет более двух порядков по сравнению с расчетом без ускорения. Шаг расчета отвечал 209 отсчетам на каждом периоде расчета. Устойчивому режиму соответствуют следующие значения периода и амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} T &= 2.0807823 \cdot 10^{-7}; \\ X1 &= 2 \cdot 10^{-9}; \quad X2 = -0.00266651262; \\ X3 &= 1.7499755432; \\ X4 &= 1.1051242378; \quad X5 = 6.8712539891; \\ X6 &= 0.5982940334; \quad X7 = 6.2893474619; \\ X8 &= 0.4881468158; \quad X9 = 0.6422128153. \end{aligned}$$

Для оценки погрешности в определении характеристик установившегося режима шаг дискретизации уменьшался в два раза, и снова проводился численный эксперимент. Как следует из полученных результатов, погрешность в определении периода колебаний может быть определена по формуле

$$\delta T = 3,3 \cdot \frac{h^2}{T^2},$$

при использовании метода трапеций, что вполне согласуется с ранее приведенным результатом и формулой (9) при использовании комбинаций разного порядка *k* для проведения дискретизации.

При проведении расчета для транзисторов использовалась модель Эберса – Мола. Расчет проводился при выборе таких значений параметров схемы:

$$\begin{aligned} RX &= 10 \text{ мОм}; \quad RQ = 20 \text{ Ом}; \quad R1 = 68 \text{ кОм}; \\ R2 &= 20 \text{ Ом}; \quad R3 = 10 \text{ кОм}; \quad R4 = 47 \text{ Ом}; \quad R5 = 1.2 \text{ кОм}; \\ CQ &= 0,0010132118; \quad C0 = 3 \text{ пФ}; \quad C1 = 470 \text{ пФ}; \\ C2 &= 470 \text{ пФ}; \quad L = 1.0322536 \text{ Гн}; \quad E = 8 \text{ В}. \end{aligned}$$

В качестве нулевого приближения выбраны значения переменных, которые получены из расчета по постоянному току:

$$\begin{aligned} X1 &= 1700; \quad X2 = 0.00168; \quad X3 = 4.56; \quad X4 = 0.324; \\ X4 &= 3.67; \quad X6 = 0.394; \quad X7 = 3.36; \quad X8 = 0.0025; \\ X9 &= 4.25, \end{aligned}$$

Для этой схемы вектор переменных состояния представлен

$$X(9) = \{UCQ, JLQ, UC0, UC1, UCK2, UCE1, UCK2, UCE2, UC2\}.$$

Отметим, что полученные результаты расчета модели кварцевого генератора с точностью до  $10^{-12}$  совпадают с результатами, приведенными в работе [13]. В этой работе экстраполяционный алгоритм, основанный на реализации процедуры автоматического выбора шага интегрирования,

обеспечил сходимость к установившемуся режиму за 4 экстраполяции. Но преимущество предлагаемой процедуры ускорения [7] в отсутствие необходимости задания периода колебаний и уменьшения на один порядок размерности матрицы перехода состояний существенно расширяет область его сходимости.

При использовании формулы (8) процесс вычислений сходится без применения алгоритмов ускорения, что является подтверждением расширения области сходимости предложенного класса комбинационных методов. При этом повышается точность расчета, что требует минимальных временных затрат для получения установившегося режима.

Этот вывод подтвержден также исследованием генераторных схем с высокой добротностью, которые описываются дифференциальными уравнениями 18 порядка, а также консервативных систем, представляющих собой длинную линию из 15 LC контуров.

### ВЫВОДЫ

Предложен итерационный подход, который позволил построить класс численных методов, позволяющих минимизировать погрешность дискретизации.

При анализе консервативных систем, в которых отсутствуют потери энергии, исследовании радиотехнических устройств с высокой добротностью, расчете систем с длительными переходными процессами, поиске периодических режимов в системах со сложной динамикой представляется целесообразным использование разностной формулы (10), которая с точностью до членов второго порядка малости обеспечивает отсутствие погрешности вычислений при определении как амплитуды, так и периода колебаний.

Полученные комбинации численных методов (4–8) при произвольном  $k > 1$  и комбинация (10) обладают свойством  $A$ -устойчивости.

Использование разностной схемы (10) при построении дискретных моделей в программах компьютерного анализа радиоэлектронных систем повысит их эффективность и обеспечит надежность их работы.

#### Литература:

[1] Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Е. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 400 с.  
 [2] Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 354 с.  
 [3] Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических цепей. – М.: Связь, 1935. – 186 с.  
 [4] Видаль П. Нелинейные импульсные системы. – М.: Энергия, 1974. – 336 с.  
 [5] Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.  
 [6] Заяц В.М. Построение и анализ модели дискретной колебательной системы // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – С. 161-165.

[7] Заяць В.М. Дискретні моделі дискретних коливних систем для аналізу їх динаміки. – Львів: В-во УАД. – 2011. – 284 с.  
 [8] Заяць В.М. Приведення неперервної автоколивної системи до дискретної моделі та спрощення її аналізу // Відбір і обробка інформації. – 2005. – Вип. 23 (99). – С. 35-39.  
 [9] Ивахненко А.Г. Непрерывность и дискретность. – К.: Наукова думка. – 1990. – 146 с.  
 [10] Сигорский В.П., Коляда Ю.В., Колодницкий Н.М. Проблемно-адаптивные процедуры численного анализа моделей динамических систем (обзор) // Теоретическая электротехника. – 1990. – Вып. 49. – С. 3-9.  
 [11] Синицкий Л.А., Шмигельский Я.А. Методы синтеза автогенераторов с багатьма періодичними режимами з різними частотами і зміною форми коливаль // Теоретична електротехніка. – 2004. – Вип. 57. – С. 153-158.  
 [12] Синицкий Л.А. Качественные изменения непрерывных динамических систем при дискретизации во времени и пространстве // Доклад на Меж. семинаре „Нелинейные цепи и сигналы”. – Москва, 1992. – Т. 1. – С. 145-154.  
 [13] Синицкий Л.А., Фельштын О.И. Об ускоренном поиске периодических режимов в автономных системах // Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С. 93-103.  
 [14] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наукова думка, 1986. – 280 с.  
 [15] Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с.  
 [16] Lychak M.M. Elements of the theory of state of chaos and its application Journal of Automation and information Sciences. – 2003. – № 9. – P. 43-52.  
 [17] Чуа Л.О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). – М.: Энергия, 1980. – 640 с.  
 [18] Stefan P. A theorem of Sharcovskii on existence of period orbits of continuous endomorphism of the real line // Commun. Math. Phys. – 1977. – Vol. 54. – P. 237-248.  
 [19] Zayats V. Chaos searching algorithm for second order oscillatory system // Proc. International Conf. “TCSET – 2002”. – Lviv-Slavsk. – 2002. – P. 97-99.  
 [20] Zayats V. Dynamical regimes classification of discrete oscillatory system // Pros. International Conf. “The experience of designing and application of CAD systems in microelectronics”. – Lviv. – Slavsk. – 2003. – P. 157-158.  
 [21] Zayats V. Comparative characteristic objects and regimes of discrete nature models // Proc. International conf. TCSET’2004. – Lviv. – 2004. – P. 84-85.

Поступила в редколлегию 11.09.2012

**Зяец Василий Михайлович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общей экологии и экоинформационных систем НУ “Львівська політехніка”. Область научных интересов: информатика и электроника, математическое и компьютерное моделирование, распознавание и идентификация систем со сложной динамикой.



УДК 621. 372:621.314

**Ітераційний підхід до мінімізації похибки числових методів при аналізі високодобротних генераторів з тривалими перехідними процесами** // В.М. Заяць / Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2012. — Том 11. № 3. — С. 395–400.

Запроновано ітераційний підхід до мінімізації похибки дискретизації чисельних методів другого порядку, що базується на методі Лінігера — Уїлаббі. Сутність підходу полягає у визначенні поправок до явного і неявного методів Ейлера в той момент часу, коли ці вклади еквівалентні. Підтверджено поліпшення часових і точнісних характеристик процесу обчислень при розрахунку кварцових генераторів 9 порядку, автоколиливних систем 18 порядку з тривалими перехідними процесами, консервативних систем без втрат 30 порядку.

*Ключові слова:* ітераційний підхід, числові методи, похибка дискретизації, високодобротні генератори, перехідні процеси, усталені режими.

Л.: 02. Бібліогр.: 21 найм.

UDC 621. 372:621.314

**Iterative approach to minimizing the error of numerical methods at the analysis of high-Q oscillators with long transients** / V. M. Zayats // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. — 2012. Vol. 11. № 3. — P. 395–400.

The paper suggest an iterative approach to minimizing the error of discretization for numerical second order methods which is based on the Linigera – Uilabbi methods. The essence of the approach consists in defining amendments to the explicit and implicit Euler's method at the time when these contributions are equivalent. Improvement of time and accuracy characteristics of the computation process in quartz order 9 generators, autovibration 18th order systems with long transition processes and conservative lossless 30th order systems are confirmed.

*Keywords:* iterative approach, numerical methods, discretization error, high-Q oscillators, transients, steady state.

Fig.: 02. Ref.: 21 items.