

## РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

А.Н. ЖОРОВА, И.А. МУЛЕНКО, А.Л. ХОМКИН

Статья посвящена вычислению электронных кинетических коэффициентов плазмы во внешнем магнитном поле с «нелогарифмической» точностью и исследованию поведения кинетических коэффициентов.

*Ключевые слова:* неидеальная плазма, кинетическое уравнение Больцмана, скобковый интеграл, электропроводность.

### ВВЕДЕНИЕ

При решении задач кинетики неидеальных газов и неидеальной плазмы широко используется метод кинетического уравнения [1-3]. В основе этого метода лежат уравнения для функций распределения частиц  $f_k$  (индекс  $k$  нумерует сорта частиц). В самом общем случае кинетическое уравнение является интегро-дифференциальным уравнением относительно искомой функции распределения частиц сорта  $k$ , зависящей от времени, координаты и скорости частиц:  $f_k = f_k(t, \vec{r}_k, \vec{v}_k)$ . Кроме того, функция распределения зависит также от термодинамических величин системы (например, от температуры  $T$ , концентрации частиц  $n_k$  и т.д.) как от параметров. Одной из основных практических задач физической кинетики газов и плазмы является вычисление кинетических коэффициентов, таких как диффузия, теплопроводность, электропроводность, вязкость и т.д. [4-6].

Впервые строгий газокинетический расчет электропроводности полностью ионизованной плазмы, основанный на решении уравнения Фоккера-Планка, был выполнен в работах [7, 8]. Дальнейшие исследования [9-13] показали, что в области слабой и умеренной неидеальности ( $\Gamma \leq 1$ ) результаты расчетов электропроводности плазмы, полученные на основе решения уравнений Фоккера-Планка и Больцмана, практически совпадают.

Расчет кинетических коэффициентов газов, и особенно плазмы, в рамках метода кинетического уравнения представляет собой сложную и чрезвычайно трудоемкую задачу. И несмотря на то, что уже более 50 лет в периодической печати публикуются работы в этом направлении, возможности применения метода кинетического уравнения к расчету транспортных коэффициентов газов и плазмы далеко не исчерпаны. Большинство существующих сегодня результатов получены для высокотемпературной плазмы, где кулоновский логарифм  $\Lambda \gg 1$ . Большая величина  $\Lambda$  позволила на ранних этапах решения кинетического уравнения пренебречь многочисленными слагаемыми в транспортных сечениях, не содержащих логарифм. В последние годы появились эксперименты, где  $\Lambda < 1$  и даже обращается

в 0, измеренные как в постоянном электрическом, так и в магнитном полях [14]. Не прибегая к решению кинетического уравнения, предлагаются многочисленные эмпирические формулы типа  $\ln(1 + \frac{3}{\Gamma})$  и т.д. для проводимости в постоянном поле. Для проводимости в магнитном поле отсутствуют и эмпирические формулы.

Настоящая работа посвящена вычислению электронных кинетических коэффициентов плазмы во внешнем магнитном поле с «нелогарифмической» точностью и исследованию поведения кинетических коэффициентов при  $\Gamma \rightarrow 1$ . Поэтому основное внимание уделяется уточнению и использованию различных особенностей метода кинетического уравнения для плазмы и его применению к расчету кинетических коэффициентов плазмы. Простейшим кинетическим уравнением является уравнение Больцмана [1, 3]. В уравнении Больцмана учитываются только парные мгновенные столкновения частиц. Другими словами, предполагается, что характерная длительность столкновения намного меньше среднего времени между столкновениями. Кулоновское взаимодействие частиц плазмы является коллективным вследствие его дальнедействующего характера и процессов экранировки [6]. Заряженная частица постоянно находится во взаимодействии с окружающей средой, и ее столкновения нельзя считать мгновенными. Поэтому, формально, уравнение Больцмана не может быть применено к описанию кинетических процессов в плазме. Для этой цели используется диффузионное приближение [4], основанное на решении уравнения Фоккера-Планка.

Достаточно строгие теоретические результаты получены для разреженной плазмы при выполнении условия  $\Gamma \ll 1$ , где:  $\Gamma = e^2/r_D T$  – параметр неидеальности,  $r_D$  – радиус Дебая,  $e$  – заряд электрона. С ростом плотности при  $\Gamma \approx 1/6$  дебаевский радиус сравнивается со средним межчастичным расстоянием  $r_{cp}$  и при дальнейшем росте  $\Gamma$  оказывается  $r_D < r_{cp}$ . Очевидно, что в этих условиях использование  $r_D$  в качестве радиуса экранирования бессмысленно. Вместе с тем, параметр неидеальности  $\gamma = e^2/r_{cp} T$  остается меньше единицы в достаточно широком

диапазоне изменения внешних параметров (до  $\Gamma \leq 5$ ), что формально позволяет использовать газокинетический подход.

При учете рассеяния частиц на малые углы используются интегралы столкновений Ландау [4] и Ленарда-Балеску [14]. В обоих случаях имеется логарифмическая расходимость, обусловленная вкладом близких столкновений, поскольку выражения для интегралов столкновений [4, 14] были получены в предположении  $\chi \ll 1$  ( $\chi$  — угол рассеяния). Кроме того, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(k, \omega)$  сама зависит от функции распределения, что делает кинетическое уравнение существенно нелинейным и усложняет процесс его решения.

Интеграл столкновений, представляющий собой линейную комбинацию интегралов Больцмана, Ландау и Балеску-Ленарда, формально не требует введения обрезаний сечения рассеяния на малых и больших расстояниях. Предполагалось, что с его помощью удастся получить приемлемые значения проводимости умеренно неидеальной плазмы  $\Gamma \leq 1$ . Дальнейшие исследования показали, что комбинированный интеграл столкновений приводит к неправильному асимптотическому поведению проводимости при  $\Gamma \ll 1$ . Кроме того, сравнение теоретических расчетов [15] с экспериментом [16] оказалось неудовлетворительным и при  $\Gamma \leq 1$ .

Важно отметить также, что разработка регулярных аналитических методов решения различных типов кинетических уравнений сопряжена со значительными математическими трудностями как принципиального, так и вычислительного характера. По-видимому, до сих пор не существует регулярных методов оценки погрешности большинства типов кинетических уравнений, обусловленной пренебрежением членами высших порядков теории возмущений, справедливой в различных областях диаграммы состояний плазмы. Исключение составляет кинетическое уравнение с интегралом столкновений в так называемом « $\tau$  — приближении» (приближение времени столкновений), в котором интеграл столкновений имеет вид:  $Stf_k = (f_k - f_{k0})/\tau$ , где  $f_{k0}$  — равновесная функция распределения частиц сорта  $k$ . Интеграл столкновений « $\tau$  — приближения» имеет «локальный» характер в пространстве скоростей и поэтому фактически не отражает все возможные процессы столкновения частиц в плазме.

Для кинетического уравнения Больцмана разработан [1] регулярный метод его решения, справедливый для слабо неравновесных газов и основанный на разложении неравновесной поправки к функции распределения частиц в ряд по полной системе ортонормированных полиномов Сонина (метод Чепмена-Энскога). В качестве базисной используется также система сферических функций [3,11]. Несмотря на формальное

противопоказание, разработанный для нейтральных газов метод Чепмена-Энскога решения кинетического уравнения Больцмана с большим успехом применяется и для вычисления кинетических коэффициентов ионизованных газов и плазмы [9-13,15, 17-19].

Разработка и применение регулярных аналитических методов вычисления кинетических коэффициентов неидеальной плазмы имеет не только фундаментальное, но и важное прикладное значение. Всегда существует необходимость в создании методик расчета кинетических коэффициентов неидеальной плазмы [20,21], применимых в широкой области изменения внешних параметров и температуры. Такие широкодиапазонные методики используются для вычисления параметров рабочих сред плазменных и плазмохимических устройств. Для повышения точности и надежности этих методик в основу их разработки должны быть положены строгие газокинетические методы.

Поскольку электроны в плазме обладают значительно большей подвижностью по сравнению с массивными частицами: ионами, атомами, молекулами и т.д., определяющую роль для описания транспортных свойств плазмы играют электронные кинетические коэффициенты [6, 22] и, в частности, проводимость. В настоящей работе предполагается выполнить расчет компонент тензора электропроводности полностью ионизованной плазмы во внешнем магнитном поле на основе решения кинетического уравнения Больцмана. Как уже отмечалось, в области слабой неидеальности уравнение Больцмана для плазмы приводит к результатам, совпадающим с полученными на основе других кинетических уравнений. В области умеренной и сильной неидеальности вплоть до  $\gamma \approx 1$  ( $1/6 < \Gamma < 1$ ) можно использовать газокинетический подход, считая в первом приближении столкновения парными, рассматривая плазму как совокупность ячеек Вигнера-Зейтца и ограничивая транспортные сечения средним межчастичным расстоянием  $r_{cp}$ .

Несмотря на значительное число работ в этом направлении, остается ряд вопросов, решение которых, на наш взгляд, позволит уточнить вид зависимостей проводимости плазмы от различных ее параметров как в области слабой, так и сильной неидеальности. Особенно это касается магнитоактивной плазмы. К числу этих вопросов относятся следующие: выбор способа регуляризации транспортных сечений или кулоновского логарифма, учет высших приближений в разложении по полиномам Сонина и последовательное вычисление вкладов электрон-электронных столкновений.

Хорошо известно [5, 6, 9-11], что решение кинетических уравнений всегда является очень трудоемкой задачей. Поэтому даже после выполнения описанных выше операций ограничения транспортных сечений при рассеянии на малые

и большие углы (если в них есть необходимость) процесс решения уравнений все же остается достаточно сложным. При этом в ряде случаев идут на дополнительные упрощения выражений для самих сечений рассеяния или кулоновского логарифма [7, 11, 15, 23, 24]. Это обычно приводит к нерегулярной процедуре усреднения по скоростям во всем кинетическом уравнении, влечет за собой потерю большого количества членов в транспортных сечениях электрон-электронных столкновений высших порядков и появлению нефизических расходимостей электропроводности при различных значениях параметра неидеальности. В ряде работ [9, 10, 12, 17-19] ограничиваются небольшим числом членов (3-4) разложения в методе Чепмена-Энскога. При этом следует заметить, что процесс Чепмена-Энскога хорошо сходится только в тех случаях, когда транспортные сечения монотонно зависят от энергии сталкивающихся частиц. Если для кулоновского взаимодействия 4-е приближение Чепмена-Энскога дает погрешность  $\sim 10^{-3}$ , то при учете электрон-атомных столкновений (сечения рассеяния не монотонно зависят от энергии) для достижения той же точности приходится учитывать 15 и более членов разложения. С ростом числа полиномов в разложении растет и число нелогарифмических членов в транспортных сечениях. Поэтому пренебрежение высшими приближениями может привести к значительной погрешности для слабоионизованной плазмы, когда степень ионизации  $\alpha \leq 10^{-3}$  и электрон-атомные столкновения играют определяющую роль. Число работ, посвященных вычислению проводимости магнитоактивной плазмы, основанных на решения кинетических уравнений, невелико [25, 26], при этом в [25] вообще пренебрегается электрон-электронными столкновениями. Учет вклада электрон-электронных столкновений осуществляется введением спитцеровского множителя  $\gamma_E$ , что также является некорректным, поскольку, как показано в [13, 27],  $\gamma_E$  зависит не только от зарядового числа ионов, но и является функцией параметра неидеальности.

Поэтому целью настоящей работы является расчет продольных поперечных и холловских компонент тензора электропроводности неидеальной полностью ионизованной плазмы на основе решения кинетического уравнения Больцмана. Имея в виду в дальнейшем расчет компонент тензора проводимости частично ионизованной магнитоактивной плазмы, вычисления проводятся с учетом 20-го приближения в разложении неравновесной поправки к функции распределения в ряд по полиному Сонина. В работе выполняется единообразное усреднение всех членов кинетического уравнения по скоростям без дополнительных упрощений сечений рассеяния и кулоновского логарифма. При вычислении транспортных сечений рассеяния заряженных частиц учитываются нелогарифмиче-

ские члены, которые также являются функциями энергии сталкивающихся частиц. Интерполяция между областями слабой и сильной неидеальности осуществляется на этапе расчета транспортных сечений.

## 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим неидеальную полностью ионизованную плазму, находящуюся в постоянном во времени и однородном магнитном поле. Кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения электронов с учетом столкновений имеет вид:

$$\frac{df_e}{dt} = St(f_e), \quad (1)$$

где  $\frac{df_e}{dt}$  — оператор дифференцирования по времени, взятый вдоль фазовой траектории,  $St(f_e)$  — интеграл столкновений, характеризующий изменение функции распределения электронов  $f_e$  в результате столкновений со всеми сортами части плазмы. В общем случае  $f_e$  зависит от времени  $t$ , координат  $\vec{r}_e$  и скоростей  $\vec{v}_e$  электрона  $f_e = f_e(t, \vec{r}_e, \vec{v}_e)$ . Поэтому полная производная по времени вдоль фазовой траектории равна:

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \vec{\nabla}) f_e + (\vec{F}_e \vec{\nabla}_{\vec{p}_e}) f_e, \quad (2)$$

(в отсутствие столкновений, согласно теореме Лиувилля [4]  $df_e/dt = 0$ ),  $\vec{\nabla}_{\vec{p}_e}$  — градиент в пространстве импульсов. Интеграл столкновений Больцмана имеет вид:

$$St(f_e) = \sum_j \iiint [f_e(\vec{v}'_e) f_e(\vec{v}'_j) - f_e(\vec{v}_e) f_j(\vec{v}_j)] g_{ej} b db d\phi d\vec{v}_j, \quad (3)$$

где  $b$ ,  $\phi$  — прицельный параметр и угол рассеяния,  $g_{ej}$  — относительная скорость столкновения электронов с частицами сорта  $j$ , суммирование в (3) выполняется по всем сортам частиц,  $\vec{v}_e, \vec{v}_j$  и  $\vec{v}'_e, \vec{v}'_j$  — скорости частиц до и после столкновения. С учетом (2,3) кинетическое уравнение Больцмана запишется в виде:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \vec{\nabla}) f_e + (\vec{F}_e \vec{\nabla}_{\vec{p}_e}) f_e = \sum_j \iiint [f_e(\vec{v}'_e) f_e(\vec{v}'_j) - f_e(\vec{v}_e) f_j(\vec{v}_j)] g_{ej} b db d\phi d\vec{v}_j. \quad (4)$$

В отсутствие переменного внешнего поля функция распределения электронов не зависит явно от времени, поэтому  $\partial f_e / \partial t = 0$ . На электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_e, \vec{H}] \right), \quad (5)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $\vec{E}, \vec{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $c$  —

скорость света. Таким образом, окончательно, уравнение Больцмана для магнитоактивной плазмы в стационарном случае имеет вид:

$$(\vec{v}_e \nabla) f_e - e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_e, \vec{H}] \right) \vec{\nabla}_{\vec{p}_e} f_e = \sum_j \iiint [f_e(\vec{v}'_e) f_e(\vec{v}'_j) - f_e(\vec{v}_e) f_j(\vec{v}_j)] g_{ej} b db d\phi d\vec{v}_j. \quad (6)$$

Уравнение Больцмана (6) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением.

## 2. МЕТОД ЧЕПМЕНА-ЭНСКОГА

Кинетическое уравнение (6) может быть решено методом Чепмена-Энскога [1] в случае слабо неравновесной плазмы. Согласно этому методу функция распределения  $f_e$  ищется в виде:

$$f_e(\vec{v}_e) = f_e^0(\vec{v}_e) + \vec{v}_e f_e^1(\vec{v}_e), \quad (7)$$

где:  $f_e^0(\vec{v}_e) = n_e (m_e/2\pi T)^{3/2} \exp(-m_e v_e^2/2T)$  — равновесная (максвелловская) функция распределения электронов,  $f_e^1(\vec{v}_e) = -f_e^0(\vec{v}_e) \vec{\Phi}_e(\vec{v}_e)$ ,  $m_e$  — масса электрона. Неравновесная поправка  $\vec{v}_e f_e^1(\vec{v}_e)$  к функции распределения  $f_e(\vec{v}_e)$  предполагается малой. Это допущение позволяет линеаризовать уравнение (6):

$$\vec{v}_e \frac{\partial f_e^0(\vec{v}_e)}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_e, \vec{H}] \right) \frac{\partial f_e^0(\vec{v}_e)}{\partial \vec{v}_e} = \sum_j \vec{J}_{ej}, \quad (8)$$

где:

$$\vec{J}_{ej} = \iiint f_e^0 f_j^0 [\vec{v}_e \vec{\Phi}_e(\vec{v}_e) + \vec{v}_j \vec{\Phi}_j(\vec{v}_j) - \vec{v}'_e \vec{\Phi}'_e(\vec{v}'_e) - \vec{v}'_j \vec{\Phi}'_j(\vec{v}'_j)] g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\phi d\vec{v}_j, \quad (9)$$

$\chi$  — угол рассеяния. В левую часть уравнения (8) входит только равновесная функция  $f_e^0(\vec{v}_e)$ , так как в линейном приближении возмущение скорости частиц и индуцированные поля в плазме также рассматриваются как малые величины. Кроме того, слабое внешнее возмущение не нарушает равновесного состояния массивных компонент плазмы: ионной, атомарной и т.д. Вектор возмущения  $\vec{\Phi}_e(\vec{v}_e)$  разлагается в ряд по полиномам Сонина  $S_r^{3/2}(x)$  степени  $r$  и порядка  $3/2$  [10]:

$$\vec{\Phi}_e(\vec{v}_e) = \sum_{r=0}^{\infty} \vec{P}_r^e S_r^{3/2} \left( \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2T} \right). \quad (10)$$

Векторы  $\vec{P}_r^e$  в (10) играют роль неопределенных множителей Лагранжа и подлежат вычислению.

Подставляя разложение (10) в (8) с учетом (9), умножая полученное уравнение на величину  $\frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} \vec{v}_e S_n^{3/2} \left( \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2T} \right)$  и выполняя интегрирование по скоростям электронов  $\vec{v}_e$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов  $\vec{P}_r^e$ :

$$3\delta_{n0} \left[ \frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{T} \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} - \frac{(2n+3)!!}{2^n n!} \omega_e [\vec{P}_n^e, \vec{h}] = - \sum_{r=0}^{\infty} L_{rn}^e \vec{P}_r^e. \quad (11)$$

Здесь  $\omega_e = eH/m_e c$  — электронная циклотронная частота,  $\vec{h} = \vec{H}/H$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Приближенное решение системы уравнений (11) можно получить путем ее редукции. В настоящей работе номер максимального члена в разложении (10) выбирался равным двадцати, иначе говоря, система уравнений (11) содержит 21 векторное уравнение относительно неизвестных векторов  $\vec{P}_r^e$ :  $n = 0, 1, 2, \dots, 20$ . Коэффициенты  $L_{rn}^e$  носят название скобочных интегралов и определяются выражениями [10]:

$$L_{rn}^e = - \frac{2}{n_e} \frac{m_e}{2T} \times \sum_j \iiint f_e^0 f_j^0 \vec{v}_e S_n^{3/2} \left( \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2T} \right) g_{ej} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi d\phi d\vec{v}_e d\vec{v}_j \times \left[ \vec{v}_e S_r^{3/2} \left( \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2T} \right) - \vec{v}_e S_r^{3/2} \left( \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2T} \right) + \vec{v}_j S_r^{3/2} \left( \frac{m_j \vec{v}_j^2}{2T} \right) - \vec{v}_j S_r^{3/2} \left( \frac{m_j \vec{v}_j^2}{2T} \right) \right]. \quad (12)$$

Систему векторных уравнений (11) относительно неизвестных векторов  $\vec{P}_r^e$  можно рассматривать как совокупность трех систем скалярных уравнений для их компонент  $\vec{P}_r^e = (P_{rx}^e, P_{ry}^e, P_{rz}^e)$ .

Причем составляющие векторов  $\vec{P}_r^e$ , параллельные магнитному полю  $P_{rz}^e$ , образуют независимую систему уравнений. Остальные пары компонент каждого из векторов  $\vec{P}_r^e$ , лежащие в плоскости, перпендикулярной  $\vec{H}$ , образуют систему связанных уравнений. Поэтому, на самом деле, имеются две системы уравнений для продольной и поперечной составляющих векторов  $\vec{P}_r^e$ . Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, направим вектор  $\vec{H}$  вдоль оси  $z$  (компоненты вектора  $\vec{h} = (0, 0, 1)$ ). Направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  будем считать произвольным. Система уравнений для продольных компонент  $P_{rz}^e$  векторов  $\vec{P}_r^e$  совпадает с аналогичной системой уравнений для плазмы без магнитного поля [10, 13]. Мы ее здесь не приводим, поскольку, как хорошо известно [28], присутствие внешнего магнитного поля не влияет на компоненты скорости движения заряженных частиц, параллельные полю  $\vec{H}$ . В итоге продольная проводимость плазмы  $\sigma_{zz}$  вдоль направления  $\vec{H}$  совпадает с проводимостью плазмы без магнитного поля.

Поперечные компоненты  $\vec{P}_{r\perp}^e$  векторов  $\vec{P}_r^e$  определяются из следующей системы уравнений:

$$3\delta_{n0} \left[ \left( \frac{\partial \ln(n_e T)}{\partial \vec{r}} \right)_{\perp} - \left( \frac{e \vec{E}_{\perp}}{T} \right) \right] - \frac{15}{2} \delta_{n1} \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{r}} \right)_{\perp} - \frac{(2n+3)!!}{2^n n!} \omega_e \left[ \vec{P}_{n\perp}^e, \vec{h} \right] = - \sum_{r=0}^{\infty} L_m^e \vec{P}_{r\perp}^e. \quad (13)$$

Нижний индекс  $\perp$  обозначает компоненту соответствующего вектора, лежащую в плоскости, перпендикулярной  $\vec{H}$ :  $\vec{A}_{\perp} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y$ .

Наиболее трудоемкой операцией при решении кинетического уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога является вычисление скобочных интегралов (12), особенно в случае столкновения частиц одинаковой массы (электрон-электронные столкновения). Кратность интеграла в правой части (12) равна восьми. Проводя вычисления в общем виде путем перехода от лабораторной системы координат к системе центра масс, можно, после интегрирования по углам, снизить кратность интеграла до 5:

$$L_m^{ej} = -\frac{16}{\pi} \left( \frac{m_e}{2T} \right)^{5/2} \left( \frac{m_j}{2T} \right)^{3/2} \times \int_0^{\infty} g^3 dg \int_0^{\infty} G^2 dG \exp \left[ -\frac{1}{2T} \left( (m_e + m_j) G^2 + \frac{m_e m_j}{m_e + m_j} g^2 \right) \right] \times \int_0^{\pi} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi \left( \vec{G} - M_j \vec{g} \right) S_n^{3/2} \times \left( \frac{m_e}{2T} \left( \vec{G} - M_j \vec{g} \right)^2 \right) \left[ \left( \vec{G} - M_j \vec{g}' \right) S_r^{3/2} \left( \frac{m_e}{2T} \left( \vec{G} - M_j \vec{g}' \right)^2 \right) - \left( \vec{G} - M_j \vec{g} \right) \times S_r^{3/2} \left( \frac{m_e}{2T} \left( \vec{G} - M_j \vec{g} \right)^2 \right) + \left( \vec{G} + M_e \vec{g}' \right) S_r^{3/2} \left( \frac{m_j}{2T} \left( \vec{G} + M_e \vec{g}' \right)^2 \right) - \left( \vec{G} + M_e \vec{g} \right) S_r^{3/2} \left( \frac{m_j}{2T} \left( \vec{G} + M_e \vec{g} \right)^2 \right) \right]. \quad (14)$$

В (14) введены следующие обозначения:  $\vec{G}$  — скорость центра масс системы двух частиц,  $\vec{g}$ ,  $\vec{g}'$  — относительные скорости частиц до и после столкновения,

$$M_j = m_j / (m_e + m_j); \quad M_e = m_e / (m_e + m_j). \quad (15)$$

Столкновения частиц считаются упругими, поэтому  $|\vec{g}'| = |\vec{g}|$ .

Вычисление скобочных интегралов  $L_m^{ej}$  для случая столкновений электронов с массивными частицами: ионами  $L_m^{ei}$ , атомами  $L_m^{ea}$ , молекулами  $L_m^{em}$  и т.д. может быть проведено в общем виде независимо от типа потенциала межчастичного взаимодействия. Как уже отмечалось, слабое внешнее возмущение не нарушает

максвелловского распределения массивных компонент. Поэтому, проводя интегрирование по углам и абсолютной величине скорости центра масс системы и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными  $m_e/m_j \ll 1$ , получим:

$$L_m^{ej} = 16n_j \sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}} \times \int_0^{\infty} y^5 e^{-y^2} \sigma_1^{ej}(y^2) S_r^{3/2}(y^2) S_n^{3/2}(y^2) dy, \quad (16)$$

где:  $y^2 = \frac{m_e g^2}{2T}$ . Транспортное сечение рассеяния электронов на частицах сорта  $j$  первого порядка определяется выражением:

$$\sigma_1^{ej} = 2\pi \int_0^{\pi} b \left| \frac{db}{d\chi} \right| (1 - \cos \chi) d\chi. \quad (17)$$

Так как в настоящей работе рассматривается полностью ионизованная плазма, то требуется вычислить только сечение электрон-ионного рассеяния  $\sigma_1^{ei}$ . При  $\Gamma \ll 1$  используется кулоновский потенциал с обрезанием сечения на дебаевском радиусе  $r_D$ , что исключает расхожимость при рассеянии на малые углы. В этом случае  $\sigma_1^{ei}$  равно [29]:

$$\sigma_1^{ei} = 2\pi b_0^2 \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right], \quad (18)$$

где:  $b_0 = e^2/mg^2$ . При  $\Gamma \geq 1/6$  используется так называемый короткодействующий кулоновский потенциал (ККП, muffin-teen — потенциал). В этом случае сечение рассеяния первого порядка определяется выражением:

$$\sigma_1^{ei} = 2\pi r_{\text{ср}}^2 \left\{ \frac{\xi^2}{(\xi^2 - 1)^2} \ln \xi^2 - \frac{1}{\xi^2 - 1} \right\}, \quad (19)$$

где:  $\xi = r_{\text{ср}}/b_0 \pm 1$ , знак минус отвечает рассеянию разноименных зарядов, знак плюс — одноименных. В массовых расчетах в дальнейшем для радиуса экранирования (максимального прицельного параметра) между областью слабой и сильной неидеальности используется интерполяция вида:

$$r_{\text{ср}}, b_{\text{max}} = \sqrt{r_D^2 + r_{\text{ср}}^2}. \quad (20)$$

При этом сохраняется зависимость кулоновского логарифма от относительной скорости сталкивающихся частиц.

Вычисление скобочных интегралов для электрон-электронных столкновений представляет собой довольно трудоемкую задачу и не может, как в предыдущем примере, быть проведено в общем виде. Поэтому каждый скобочный интеграл  $L_m^{ee}$  для электрон-электронных столкновений приходится вычислять отдельно. При этом требуется проводить большое количество

рутинных математических вычислений, выполнять преобразования промежуточных выражений, содержащих иногда десятки и сотни тысяч членов. Ясно, что выполнение этих операций «вручную» для высших приближений  $r, n > 4$  практически неосуществимо. Вместе с тем, прямое численное интегрирование выражений вида (14), зависящих к тому же от нескольких термодинамических параметров системы, также представляется бесперспективным. Следует, однако, заметить, что достаточно строгий алгоритм метода Чепмена-Энскога и самой процедуры вычисления скобочных интегралов может быть автоматизирован. Хорошо известно (см. например [30]), что уже достаточно давно разрабатываются программные методы и системы, позволяющие с помощью ЭВМ выполнять аналитические преобразования математических выражений (методы компьютерной алгебры и системы аналитических вычислений (САВ)). К настоящему времени уже создано значительное количество систем аналитических вычислений, различающихся по сложности, широте охвата и специализации решаемых задач. Широко распространены такие универсальные системы как MathCAD, Math Lab, Maple и др.

Следует заметить, что универсальные САВ, непригодны для решения задач, связанных с проведением длительных аналитических преобразований и требующих больших объемов оперативной памяти компьютера. Для этого требуется разработка специализированных систем аналитических вычислений, ориентированных на определенный класс задач или даже на одну задачу. Нами была разработана специализированная САВ для вычисления скобочных интегралов вида (14), описывающих столкновения частиц одинаковой массы [31]. Алгоритмы различных операций, необходимых для расчета интегралов вида (14), таких как вычисление сумм и факториалов, приведение подобных членов, вычисление определенных интегралов по различным переменным с использованием таблиц, исключение нулевых членов, оценка погрешности и т.д., описаны в [31] и здесь не приводятся ввиду ограниченного объема статьи. Отметим лишь тот факт, что разработанная нами система аналитических вычислений позволяет рассчитывать скобочные интегралы (14), описывающие столкновения любых частиц одинаковой массы, а не только электрон-электронные столкновения. Поскольку эта задача в [31] решена в общем виде для произвольных типов потенциалов взаимодействия частиц и транспортных сечений рассеяния.

Аналитический расчет (14) с помощью ЭВМ на основе разработанной в [31] САВ приводит для скобочных интегралов электрон-электронных столкновений к следующему результату [31]:

$$L_m^{ee} = 8n_e \sqrt{\frac{T}{\pi m_e}} \int_0^\infty y^3 e^{-y^2} \sum_{k=1}^{n/2} \sigma_{(2k)}^{ee}(y^2) \sum_{i=1}^r K_i^k y^{2i} dy, \quad (21)$$

где:  $\sigma_{(2k)}^{ee}(y^2)$  — транспортное сечение электрон-электронного рассеяния порядка  $2k$ ,  $K_i^k$  — постоянные коэффициенты, вычисленные в результате выполнения аналитических преобразований на ЭВМ. Таблицы этих коэффициентов для 1-4-го приближения метода Чепмена-Энскога приведены в [9], для 5-7-го приближения — в [32], для 8-го приближения в качестве примера — в [31]. В данной работе мы ограничиваемся 20-м приближением Чепмена-Энскога при вычислении компонент тензора проводимости, хотя разработанная в [31] САВ позволяет считать и более высокие приближения. Таблицы коэффициентов более высоких приближений в рамках статьи привести не представляется возможным ввиду их большого объема.

Коэффициенты  $L_m^{ee}$  образуют симметричную матрицу. Ввиду того, что передача импульса между частицами одинаковой массы при упругих столкновениях в среднем равна нулю, выражение (21) содержит только транспортные сечения рассеяния  $\sigma_{(2k)}^{ee}(y^2)$  четных порядков, кроме того, все величины вида  $L_{n0}^{ee} = L_{0n}^{ee} = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Транспортные сечения электрон-электронных столкновений высших порядков вычисляются по формуле [29]:

$$\sigma_{2k}^{ee} = 2\pi \int_0^\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| (1 - \cos^{2k} \chi) d\chi. \quad (22)$$

Использование 20-го приближения Чепмена-Энскога требует также и расчета транспортных сечений четных порядков до 20-го включительно. Для кулоновского потенциала и короткодействующего кулоновского потенциала, используемых в данной работе, эти сечения могут быть вычислены аналитически в явном виде. Здесь также с ростом порядка сечения объем необходимых аналитических вычислений факториально растет. Процедура вычисления транспортных сечений высших порядков для кулоновского потенциала и ККП также может быть автоматизирована. Причем для решения этой задачи может быть использована любая из универсальных САВ. Методика аналитического расчета транспортных сечений электрон-электронных столкновений высших порядков с применением системы MathCAD описана нами в [33]. Для примера приведем здесь выражения для нескольких первых транспортных сечений: для кулоновского потенциала:

$$\sigma_2^{ee} = 4\pi b_0^2 \left\{ \ln \left[ 1 + (r_D/b_0)^2 \right] - \frac{(r_D/b_0)^2}{1 + (r_D/b_0)^2} \right\},$$

$$\sigma_4^{ee} = \frac{8}{3} \pi b_0^2 \times$$

$$\times \left\{ 3 \ln \left[ 1 + (r_D/b_0)^2 \right] - \frac{5(r_D/b_0)^6 + 6(r_D/b_0)^4 + 3(r_D/b_0)^2}{(1 + (r_D/b_0)^2)^3} \right\},$$

$$\sigma_6^{ee} = \frac{4}{5} \pi b_0^2 \left\{ 15 \ln \left[ 1 + \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2 \right] - \right. \quad (23)$$

$$\left. \frac{31 \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^{10} + 80 \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^8 + 110 \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^6 + 60 \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^4 + 15 \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2}{\left( \left( \frac{r_D}{b_0} \right)^2 + 1 \right)^5} \right\},$$

для короткодействующего кулоновского потенциала:

$$\sigma_2^{ee} = 8 \pi r_{cp}^2 \xi^2 \left\{ \frac{\xi^2 + 1}{(\xi^2 - 1)^3} \ln \xi - \frac{1}{(\xi^2 - 1)^2} \right\},$$

$$\sigma_4^{ee} = \frac{16}{3} \pi r_{cp}^2 \xi^2 \left\{ \frac{3(\xi^2 + 1)^3}{(\xi^2 - 1)^5} \ln \xi - \frac{4(\xi^2 + \xi + 1)(\xi^2 - \xi + 1)}{(\xi^2 - 1)^4} \right\},$$

$$\sigma_6^{ee} = \frac{8}{5} \pi r_{cp}^2 \xi^2 \left\{ \frac{15(\xi^2 + 1)^5}{(\xi^2 - 1)^7} \ln \xi - \frac{(23\xi^8 + 48\xi^6 + 98\xi^4 + 48\xi^2 + 23)}{(\xi^2 - 1)^6} \right\}. \quad (24)$$

Выражения (23, 24) содержат нелогарифмические члены, которые также как и кулоновский логарифм являются функциями скорости сталкивающихся частиц и уже при  $\Gamma \sim 0,1$  дают заметный  $\sim 20\%$  вклад в транспортные сечения и которыми зачастую пренебрегается. Применение различного рода упрощений, сводящихся к замене выражений под знаком кулоновского логарифма их средними по максвелловскому распределению значениями, и пренебрежение нелогарифмическими членами приводит к появлению нефизических расходимостей транспортных коэффициентов при определенных значениях параметра неидеальности. Транспортные сечения высших порядков имеют структуру аналогичную (23) и (24). С увеличением порядка  $2k$  выражения для  $\sigma_{(2k)}^{ee}(y^2)$  становятся более громоздкими, поэтому мы также их здесь не приводим. С помощью методики, разработанной в [33], получены выражения для  $\sigma_{(2k)}^{ee}(y^2)$  до 20-го порядка включительно.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ПРОВОДИМОСТИ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Определив из решения кинетического уравнения Больцмана функцию распределения электронов, можно непосредственно перейти к вычислению компонент тензора проводимости плазмы  $\sigma_{ik}$ . Величины  $\sigma_{ik}$  являются коэффициентами пропорциональности между компонентами тока  $J_i$  и электрического поля  $E_k$  в законе Ома [28]:

$$J_i = \sigma_{ik} E_k, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (25)$$

По повторяющимся индексам выполняется суммирование. С другой стороны, электрический ток в плазме может быть вычислен через первый момент функции распределения электронов [10]:

$$\vec{j} = -e \int_0^\infty \vec{v}_e f_e(\vec{v}_e) d\vec{v}_e. \quad (26)$$

Вычисляя коэффициенты разложения (10) из решения системы уравнений (11) и подставляя полученную функцию распределения в виде (7) в выражение (26), для различных компонент плотности тока имеем:

$$j_x = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0x}^e, \quad j_y = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0y}^e, \quad j_z = -\frac{n_e e T}{m_e} P_{0z}^e. \quad (27)$$

Как следует из (27), для вычисления компонент тензора проводимости из всего набора коэффициентов  $\vec{P}_r^e$  вектора возмущения  $\vec{\phi}_e(\vec{v}_e)$  в (10) достаточно знать только компоненты вектора  $\vec{P}_0^e$ , которые определяются выражениями:

$$P_{0z}^e = -\frac{3eE_z}{T} \frac{\Delta_{00}}{\Delta}, \quad P_{0x}^e = -\frac{3e}{T} \left( E_x \frac{\Delta'_{00}}{\Delta'} - E_y \frac{\Delta'_{01}}{\Delta'} \right), \quad P_{0y}^e = -\frac{3e}{T} \left( E_x \frac{\Delta'_{10}}{\Delta'} + E_y \frac{\Delta'_{11}}{\Delta'} \right). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27) и сравнивая полученные соотношения с выражениями (25), для компонент тензора проводимости магнитоактивной плазмы получим:

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где:  $\sigma_{zz} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta_{00}}{\Delta}$  — продольная;

$$\sigma_{xx} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{00}}{\Delta'}, \quad \sigma_{yy} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{11}}{\Delta'}$$

( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ ) — поперечные;  $\sigma_{xy} = -\frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{01}}{\Delta'}$ ,

$$\sigma_{yx} = \frac{3n_e e^2}{m_e} \frac{\Delta'_{10}}{\Delta'} \quad (\sigma_{xy} = -\sigma_{yx})$$

— холловские компоненты тензора проводимости. Определители  $\Delta$  и  $\Delta'$  имеют вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{00} & L_{01} & \dots & L_{020} \\ L_{10} & L_{11} & \dots & L_{120} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{200} & L_{201} & \dots & L_{2020} \end{vmatrix}, \quad (31)$$

Таблица 1

$$\Delta' = \begin{pmatrix} L_{00} & A_0 \omega_e L_{01} & 0 & L_{02} & 0 & L_{03} & 0 & L_{04} & 0 & L_{05} & 0 & \dots & L_{0,20} & 0 \\ -A_0 \omega_e L_{00} & L_{01} & 0 & L_{02} & 0 & L_{03} & 0 & L_{04} & 0 & L_{05} & \dots & 0 & L_{0,20} \\ L_{10} & 0 & L_{11} & A_1 \omega_e L_{12} & 0 & L_{13} & 0 & L_{14} & 0 & L_{15} & 0 & \dots & L_{1,20} & 0 \\ 0 & L_{10} & A_1 \omega_e L_{11} & 0 & L_{12} & 0 & L_{13} & 0 & L_{14} & 0 & L_{15} & \dots & 0 & L_{1,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{20,0} & 0 & L_{20,1} & 0 & L_{20,2} & 0 & L_{20,3} & 0 & L_{20,4} & 0 & L_{20,5} & 0 & \dots & L_{20,20} & A_{20} \omega_e \\ 0 & L_{20,0} & 0 & L_{20,1} & 0 & L_{20,2} & 0 & L_{20,3} & 0 & L_{20,4} & 0 & L_{20,5} & \dots & -A_{20} \omega_e & L_{20,20} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Здесь  $A_n = \frac{(2n+3)!!}{2^n n!}$ , величины  $\Delta_{ik}$  и  $\Delta'_{ik}$  — миноры соответствующих элементов в определителях  $\Delta$  и  $\Delta'$ . Ввиду того, что многие элементы определителя  $\Delta'$  равны нулю при выполнении численных расчетов его использование оказывается неудобным из-за возникновения машинных нулей. Поэтому в конечном итоге при решении системы уравнений (6) приходится выражать  $x$ -компоненты всех векторов  $\vec{P}_{r\perp}^e$  через линейные комбинации их  $y$ -компонент, а затем получившиеся две системы уравнений для величин  $P_{nx}^e$  и  $P_{ny}^e$  ( $n = 0, 1, \dots, 20$ ) решать отдельно. Схема такого решения очевидна, получающиеся при этом чрезвычайно громоздкие выражения здесь не приводятся. Полученные выражения (30-32) позволяют рассчитать зависимости всех компонент тензора проводимости полностью ионизованной магнитоактивной плазмы от параметра неидеальности и степени замагниченности.

**5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ПРОВОДИМОСТИ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ**

При выполнении численных расчетов вычислялись приведенные значения компонент тензора проводимости:  $\sigma_{ik}^* = \sigma_{ik} / \sigma_0$ , где:  $\sigma_0 = 3\sqrt{\pi} T^{3/2} / (8\sqrt{m_e} e^2)$ ,  $i, k = x, y, z$ . Для полностью ионизованной плазмы зависимости всех компонент тензора  $\sigma_{ik}$  от термодинамических параметров и напряженности магнитного поля могут быть представлены в виде функций от двух независимых безразмерных параметров: неидеальности  $\Gamma$  и замагниченности  $\omega_e \tau_0$ . Причем характерное время  $\tau_0$  определяется формулой  $\tau_0 = \sqrt{\pi m_e T^3} / (8 n_e e^4)$ . Отметим, что продольная компонента фактически всегда совпадает с проводимостью плазмы без магнитного поля [28]. Как уже упоминалось, в настоящей работе используется 20-е приближение Чепмена-Энскога. Таблица 1 иллюстрирует сходимость процесса Чепмена-Энскога с увеличением числа членов в разложении (10) для значений  $\Gamma = 0, 0,1$  и  $\omega_e \tau_0 = 1$ . Как видно из таблицы, 11-е приближение дает

Компоненты тензора проводимости			
Размер матрицы	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{xy}$
2	1,3323737	0,818828	0,618743
3	1,3422220	0,849491	0,616221
4	1,3465548	0,852242	0,615770
5	1,3481387	0,853154	0,616270
6	1,3487653	0,853681	0,616508
7	1,3490434	0,853933	0,616576
8	1,3491735	0,854045	0,616603
9	1,3493494	0,854077	0,616721
10	1,3495288	0,854147	0,616813
11	1,3495289	0,854153	0,616789

погрешность  $\sim 10^{-6}$  для продольной,  $\sim 10^{-5}$  для поперечных и  $\sim 10^{-4}$  для холловских компонент тензора проводимости полностью ионизованной плазмы. Аналогичным образом процесс Чепмена-Энскога сходится и для других значений параметров неидеальности  $\Gamma$  и замагниченности  $\omega_e \tau_0$ . Вместе с тем, сходимость процесса Чепмена-Энскога для электрон-атомных  $e-a$  столкновений может быть значительно хуже (рис. 1), особенно в тех случаях, когда сечение рассеяния не монотонно зависит от энергии. Это имеет место, например, в плазме инертных газов, где сечение  $e-a$  — рассеяния имеет так называемый минимум Рамзауэра [22] (рис. 1).

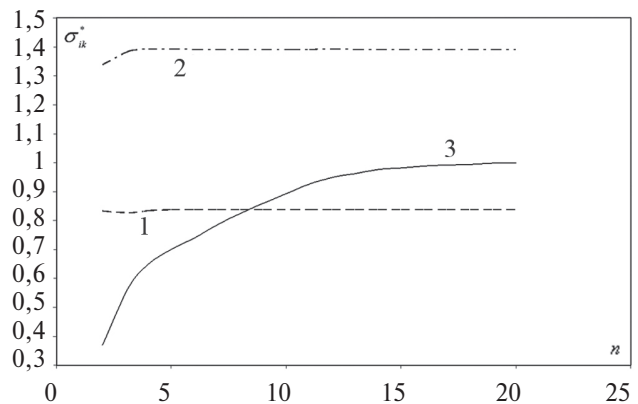


Рис. 1. Сходимость процесса Чепмена-Энскога для различных компонент тензора проводимости плазмы:  $n$  — число членов в разложении (10), 1-  $\sigma_{xx}$  — поперечная компонента, 2-  $\sigma_{xy}$  — холловская компонента, 3-  $\sigma_{ea}$  — сходимость процесса Чепмена-Энскога для электрон-атомных столкновений в плазме аргона

На рис. 2  $a-z$  представлены зависимости всех компонент тензора проводимости  $\sigma_{ik}^*$  от параметра замагниченности  $\omega_e \tau_0$ , нормированные на  $\sigma_0$ : а) кулоновский потенциал,  $\Gamma = 0, 1$ ; б) короткодействующий кулоновский потенциал,  $\Gamma = 1$ ; в) интерполяция по прицельному параметру между  $r_{cp}$  и  $r_D$ ,  $\Gamma = 0, 1$ ; г) интерполяция по радиусу экранирования между  $r_D$  и  $r_{cp}$ ,  $\Gamma = 1$ . Использование интерполяции вызвано необходимостью разработки широкодиапазонных методик расчета электропроводности плазмы.



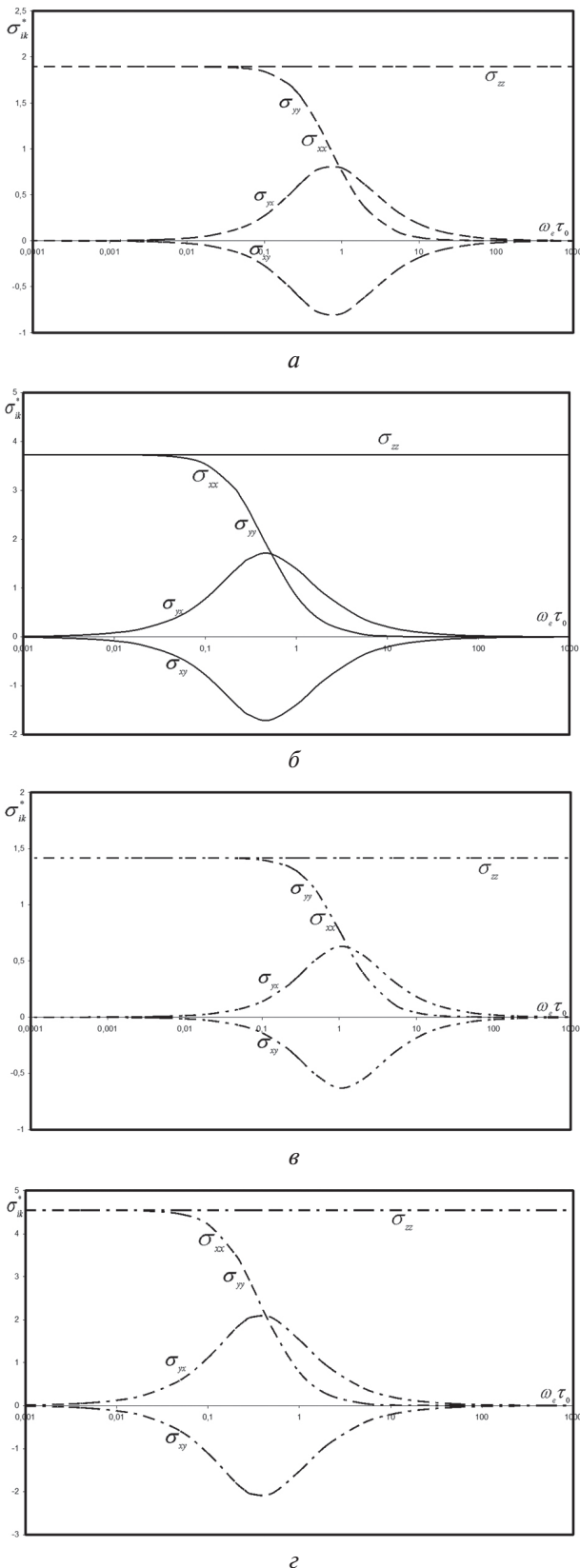


Рис. 2. Зависимости приведенных значений компонент тензора проводимости полностью ионизованной плазмы  $\sigma_{ik}^*$  от параметра замагниченности  $\omega_e \tau_0$  для различных значений параметра неидеальности  $\Gamma$ : а — кулоновский потенциал:  $\Gamma = 0, 1$ ; б — короткодействующий кулоновский потенциал:  $\Gamma = 1$ ; в — интерполяция по прицельному параметру:  $\Gamma = 0, 1$ ; г — интерполяция по радиусу экранирования:  $\Gamma = 1$

Как видно из рис. 2, при малых значениях параметра замагниченности  $\omega_e \tau_0$  плазма по-прежнему проводит как изотропная среда: продольная и поперечные компоненты тензора  $\sigma_{ik}^*$  практически совпадают, а холловская проводимость мала. С ростом  $\omega_e \tau_0$  поперечные компоненты  $\sigma_{xx}^*$  и  $\sigma_{yy}^*$  монотонно убывают от максимального значения  $\sigma_{zz}^*$  при  $\omega_e \tau_0 = 0$  до нуля при  $\omega_e \tau_0 \rightarrow \infty$ . Это убывание имеет порядок  $1/H^2$  при  $\omega_e \tau_0 < 10^{-1}$  и при  $\omega_e \tau_0 > 10$ . При малых и при больших значениях параметра  $\omega_e \tau_0$  имеется правильное асимптотическое поведение компонент  $\sigma_{xx}^*$  и  $\sigma_{yy}^*$ , совпадающее с формулой Друде-Лоренца [28]:

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{zz}}{1 + (\omega_e \tau_0)^2} & -\frac{\omega_e \tau_0 \sigma_{zz}}{1 + (\omega_e \tau_0)^2} & 0 \\ \frac{\omega_e \tau_0 \sigma_{zz}}{1 + (\omega_e \tau_0)^2} & \frac{\sigma_{zz}}{1 + (\omega_e \tau_0)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Систематическое отклонение от последней наблюдается для промежуточных значений параметра замагниченности  $\omega_e \tau_0 \in (10^{-1}, 10)$ . Оно обусловлено как эффектами межчастичного взаимодействия, так и вкладом электрон-электронных столкновений.

Холловская компонента  $\sigma_{yx}^*$  возрастает при малых  $\omega_e \tau_0$  пропорционально напряженности магнитного поля  $H$ , а при  $\omega_e \tau_0 \gg 1$  убывает как  $1/H$ , что также соответствует формуле (33). В области промежуточных значений  $\omega_e \tau_0 \in (10^{-1}, 10)$  также имеет место систематическое отклонение от этой формулы. Его причиной является конкуренция эффектов межчастичного взаимодействия и замагниченности, а также вкладом электрон-электронных столкновений. Когда  $\omega_e \tau_0 \ll 1$  напряженность поля  $H$  мала и не может вызвать заметный холловский ток. При  $\omega_e \tau_0 \gg 1$  радиус циклотронной орбиты  $r_e \ll r_{cp}$ , что затрудняет дрейф частиц в направлении, перпендикулярном вектору  $[\vec{E}, \vec{H}]$ , и поэтому холловский ток снова оказывается малым. В области значений  $\omega_e \tau_0 \in (10^{-1}, 10)$  имеется максимум холловской проводимости. В точке максимума  $\sigma_{yx}^* = \sigma_{xx}^* \approx \sigma_{zz}^*/2$ . Формула (33) дает значение максимума при  $\omega_e \tau_0 = 1$ . Однако, как показывают расчеты, отклонения от (33) наблюдаются уже при  $\Gamma \ll 1$ . В слабо неидеальной плазме эти отклонения связаны с учетом вклада электрон-электронных столкновений. Холловская компонента  $\sigma_{xy}^*$  симметрична компоненте  $\sigma_{yx}^*$  относительно оси абсцисс. Качественный вид зависимостей поперечных и холловских компонент тензора проводимости от параметра замагниченности сохраняется с изменением параметра неидеальности и метода расчета

транспортных сечений, однако имеются существенные количественные отличия. Выбранные способы интерполяции между областями слабой и сильной неидеальности вызваны необходимостью получения приемлемых количественных значений компонент тензора  $\sigma_{ik}^*$  и исключения возможных нефизических расхождений кинетических коэффициентов при  $\Gamma \geq 1$ .

На рис. 3 представлены зависимости поперечных компонент  $\sigma_{xx}^*$  ( $\sigma_{yy}^*$ ) тензора проводимости  $\sigma_{ik}^*$  от  $\omega_e \tau_0$  для различных значений  $\Gamma$ , нормированные на  $\sigma_0$ : а – кулоновский потенциал (ограничение сечения на  $r_D$ ), б) ККП (ограничение сечения на  $r_{cp}$ ). Сплошные линии – решение кинетического уравнения Больцмана, пунктирные линии – расчет по формуле Друде-Лоренца (33), штрих-пунктирные линии – учет электрон-электронных столкновений в множителях (33).

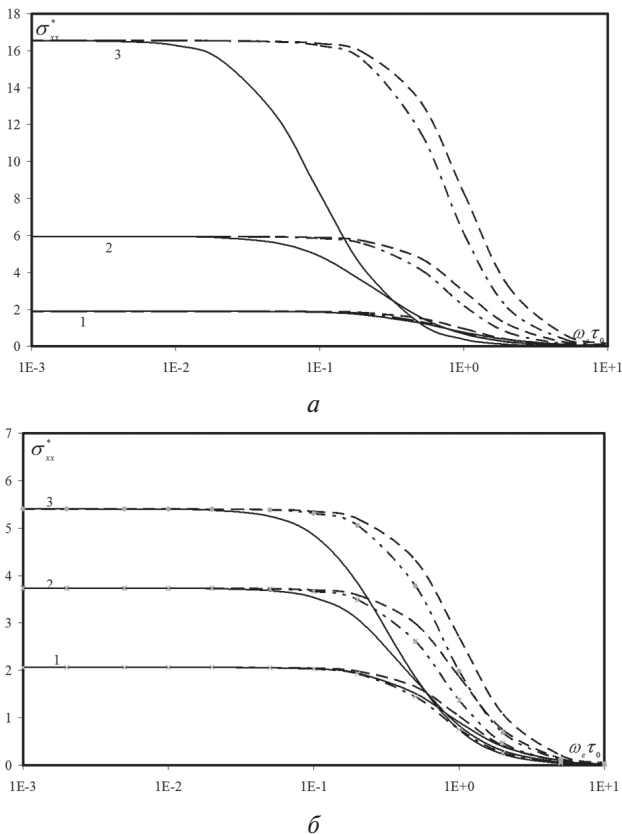


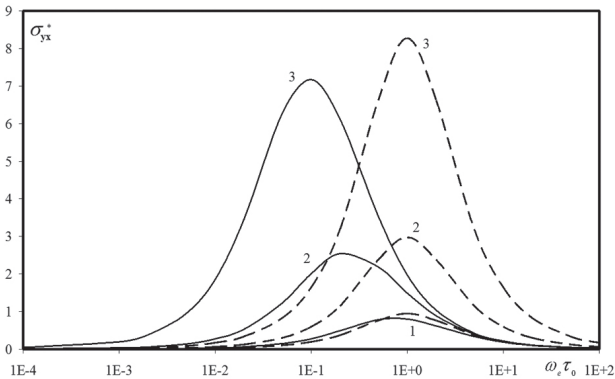
Рис. 3. Зависимости приведенных значений поперечных компонент тензора проводимости плазмы от параметра замагниченности при различных значениях параметра неидеальности: 1 –  $\Gamma = 0,1$ ; 2 –  $\Gamma = 1$ ; 3 –  $\Gamma = 3$ ; сплошные линии – данная работа, пунктир – расчет по формуле (33), штрих-пунктир – учет электрон-электронных столкновений в (33): а – кулоновский потенциал; б – ККП

Из рис. 3 видно, что, как говорилось выше, отклонения от формулы Друде-Лоренца наблюдаются уже при малых значениях параметра неидеальности. Заметим также, что в формуле (33) электрон-электронные столкновения частично учтены при вычислении продольной компоненты

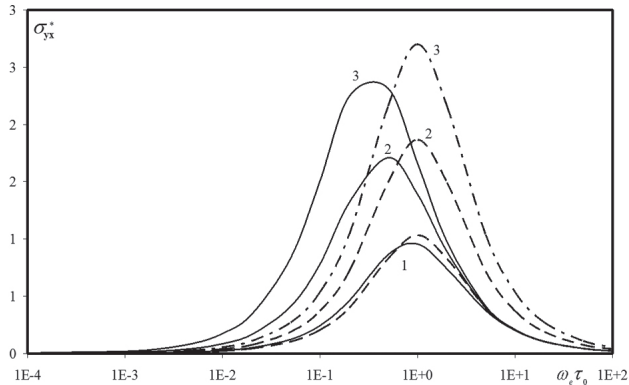
$\sigma_{zz}^*$ . Учет вклада электрон-электронных столкновений в лоренцевских множителях формулы (33) при  $\Gamma \ll 1$  приводит к тому, что результаты расчетов по формуле (33) практически совпадают с результатами, полученными путем решения кинетического уравнения (кривые 1). С ростом параметра неидеальности основное отличие от формулы (33) связано с взаимодействием между частицами (кривые 2, 3), и формула Друде-Лоренца перестает быть применимой даже после ее коррекции на предмет учета электрон-электронных столкновений. Сравнивая соответствующие графики на рис. 3 а и б, видим также, что при  $\Gamma \geq 1$  значения компонент  $\sigma_{xx}^*$  ( $\sigma_{yy}^*$ ), вычисленные для кулоновского потенциала, оказываются значительно больше соответствующих значений для ККП. Выполненное ранее в [13] сравнение с экспериментальными данными [34–36] для плазмы без магнитного поля показало, что при  $\Gamma \geq 1$  расчетные значения проводимости, полученные методом решения кинетического уравнения Больцмана для кулоновского потенциала с ограничением сечения на  $r_D$ , оказались значительно выше экспериментальных. Вместе с тем, использование короткодействующего кулоновского потенциала с ограничением сечения на  $r_{cp}$  дает близкие к экспериментальным значения проводимости плазмы при  $\Gamma \geq 1$ . Следует ожидать, что и в магнитоактивной плазме, при сравнении с экспериментом, соответствующие отношения сохранятся для поперечных и холловских компонент.

На рис. 4 представлены зависимости холловской компоненты  $\sigma_{yx}^*$  тензора проводимости  $\sigma_{ik}^*$  от  $\omega_e \tau_0$  для различных значений  $\Gamma$ , нормированные на  $\sigma_0$ : а) кулоновский потенциал (ограничение сечения на  $r_D$ ), б) ККП (ограничение сечения на  $r_{cp}$ ). Сплошные линии – решение кинетического уравнения Больцмана, пунктирные линии – расчет по формуле Друде-Лоренца (33). Из рисунка видно, что для холловской компоненты  $\sigma_{yx}^*$  наблюдаются не только количественные, но и некоторые качественные отклонения от формулы (33). Прежде всего, это смещение максимума  $\sigma_{yx}^*$  с ростом  $\Gamma$  в сторону меньших значений параметра замагниченности  $\omega_e \tau_0$  (напряженности поля  $H$ ). В то время как, согласно (33), положение максимума  $\omega_e \tau_0 = 1$  не зависит от интенсивности межчастичного взаимодействия. Основной причиной, вызывающей смещение максимума холловской компоненты  $\sigma_{yx}^*$ , является увеличение энергии кулоновского взаимодействия между зарядами по отношению к их кинетической энергии. Вклад электрон-электронных столкновений в величину смещения максимума мал. Кроме того, с увеличением  $\Gamma$  абсолютная величина максимума  $\sigma_{yx}^*$  быстро (практически экспоненциально) растет. Основной вклад в величину  $\sigma_{yx\max}^*$  также связан с ростом параметра неидеальности, однако и влияние электрон-

электронных столкновений здесь довольно значительно (ср. высоту максимумов соответствующих сплошных и пунктирных кривых на рис. 4 а, б). Учет электрон-электронных столкновений ведет к заметному уменьшению  $\sigma_{yx}^*$  при данном  $\Gamma$ . Сравнивая рис.4 а) и б), видим также, что использование ККП (ограничение радиуса экранирования на  $r_{cp}$ ) приводит к значительному уменьшению  $\sigma_{yx}^*$  при одних и тех же значениях  $\Gamma$ .



а



б

Рис. 4 Зависимости приведенных значений холловских компонент тензора проводимости плазмы от параметра замагниченности при различных значениях параметра неидеальности: 1 –  $\Gamma = 0,1$ ; 2 –  $\Gamma = 1$ ; 3 –  $\Gamma = 3$ ; сплошные линии – данная работа, пунктир – расчет по формуле (33): а – кулоновский потенциал; б – ККП

Из анализа массива числовых данных по расчету тензора проводимости полностью ионизованной плазмы можно также установить приближенную зависимость смещения максимума холловской компоненты от параметра неидеальности  $\Gamma$ . На рис. 5 в полулогарифмическом масштабе изображены зависимости положения точки максимума  $\xi = (\omega_e \tau_0)_{max}$  компоненты  $\sigma_{yx}^*$  от  $\Gamma$ , полученные из решения кинетического уравнения Больцмана: 1 – кулоновский потенциал, 2 – короткодействующий кулоновский потенциал. В широкой области изменения  $\Gamma = 10^{-3} \div 1$  эти зависимости являются линейными и могут быть описаны простым соотношением:  $\xi = k \lg \Gamma + b$ , где  $k = -0,6$ ;  $b = 0,2$  – для кривой 1 и  $k = -0,89$ ;  $b = 0,28$  – для кривой 2.

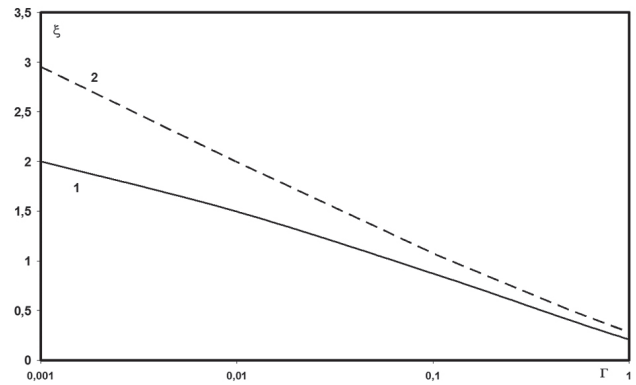


Рис. 5. Зависимость положения максимума  $\xi = (\omega_e \tau_0)_{max}$  холловской компоненты  $\sigma_{yx}^*$  тензора проводимости от параметра неидеальности: 1 – кулоновский потенциал, 2 – ККП

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод кинетического уравнения является наиболее строгим подходом к расчету кинетических коэффициентов плазмы, не находящейся в переменных внешних полях. Результаты, полученные этим методом, могут использоваться для контроля точности широко применяемых в массовых вычислениях интерполяционных формул. Выбор определенных методов устранения расходимостей транспортных сечений рассеяния заряженных частиц позволяет применить к расчету электронных кинетических коэффициентов плазмы кинетическое уравнение Больцмана.

В данной работе выполнен расчет компонент тензора проводимости полностью ионизованной плазмы в постоянном внешнем магнитном поле. Вычисления проводились с учетом 20-го приближения метода Чепмена-Энскога. Учет столь значительного числа членов разложения окажется необходимым в дальнейшем при вычислении тензора проводимости частично ионизованной плазмы. Расчет скобочных интегралов для электрон-электронных столкновений выполнен с использованием созданной авторами системы аналитических вычислений на ЭВМ.

Проанализированы зависимости поперечных и холловских компонент тензора проводимости от параметров неидеальности и замагниченности. Показано, что характер поведения поперечных компонент тензора проводимости определяется как термодинамической неидеальностью, так и вкладом электрон-электронных столкновений.

Установлена зависимость смещения максимума холловской компоненты от параметра неидеальности. Показано, что смещение максимума холловской компоненты определяется в основном термодинамической неидеальностью. Высота максимума холловской компоненты определяется как неидеальностью плазмы, так и вкладом электрон-электронных столкновений.

При расчете компонент тензора проводимости слабо неидеальной плазмы предлагается ограничивать транспортное сечение рассеяния дебаевским радиусом, для сильно неидеальной

плазмы – средним межионным расстоянием. Что эквивалентно решению задачи рассеяния внутри ячейки Вигнера-Зейтца. Приближенную интерполяцию между областями слабой и сильной неидеальности можно осуществить, например, при помощи соотношения (20). Погрешность этой интерполяции ввиду слабой логарифмической зависимости от интерполяционного радиуса экранирования (прицельного параметра) не превышает 10% вблизи  $\Gamma \approx 1/6$  и быстро убывает в области меньших и больших значений  $\Gamma$ . Подчеркнем еще раз, что процедура интерполяции выполняется до усреднения всех выражений в кинетическом уравнении по скоростям.

Единообразная форма усреднения по скоростям при переходе от кинетического уравнения к системе линейных уравнений и учет нелога­рифмических членов в транспортных сечениях рассеяния высших порядков устраняет известные нефизические расходимости кинетических коэффициентов при некоторых значениях  $\Gamma$ .

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (НИР «Теоретические исследования и математическое моделирование термодинамических и кинетических процессов в неидеальной плазме и твердом теле»), номер гос. регистрации 0110U001832.

#### Литература

- [1] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960. – 460 с.
- [2] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. – М.: Мир, 1976. – 556 с.
- [3] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 496 с.
- [4] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
- [5] Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. – М.: Наука, 1975. – 378 с.
- [6] Фортон В.Е., Якубов И.Т. Неидеальная плазма. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 368 с.
- [7] Коэн Р., Спитцер Л, Роутли П. Электрическая проводимость ионизованного газа.// Проблемы современной физики. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1956. – Т. 2. – С. 54-69.
- [8] Спитцер Л., Хэрм Р. Явления переноса в полностью ионизованном газе.// Проблемы современной физики. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1956. – Т.2. – С. 70-79.
- [9] Движущаяся плазма./ Сб. переводов под ред. Е.В. Кудрявцева и В.П. Ионова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 612 с.
- [10] Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы. Под ред. Л.С. Полака. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
- [11] Кинетические процессы в газах и плазме. Сб. статей под ред. А.Хохштира. – М.: Атомиздат, 1972. – 368 с.
- [12] Соколова И.А. Компьютерная библиотека транспортных свойств атмосферных газов и плазмы.// Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – №2. – С. 25-40.
- [13] Заика Е.В., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Электропроводность полностью ионизованной неидеальной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами.// ТВТ. – 2000. – Т.38. – №1. – С. 5-11.
- [14] Шилкин Н.С. Эффект Холла в неидеальной плазме аргона и ксенона / Н. С. Шилкин, С. В. Дудин, В. К. Грязнов, В. Б. Минцев, В. Е. Фортон // Письма в ЖЭТФ. – 2003. – Том 77, вып. 9. – С. 582–586.
- [15] Kihara T., Aono O. Unified Theory of Relaxations in Plasma. Basic Thorem. J. Phys. Soc. Japan. – 1963. – V.18. – P.837.
- [16] Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортон В.Е., Дремин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы.// ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71. – №1. – С. 216-224.
- [17] Андриатис А.В., Соколова И.А. Водород. Транспортные и термодинамические свойства.// Математическое моделирование. – 1993. – Т 5. – №1. – С. 60-106.
- [18] Андриатис А.В., Соколова И.А. Кислород. Транспортные и термодинамические свойства.// Математическое моделирование. – 1994. – Т.6. – №10. – С. 89-128.
- [19] Соколова И.А. Азот. Транспортные и термодинамические свойства.// Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9. – №6. – С.114-127.
- [20] Беспалов И.М., Полищук А.Я. Методы расчета транспортных коэффициентов плазмы в широком диапазоне параметров.// Препринт ИВТАН. – № 1-257. – М., 1988.
- [21] Полищук А.Я. Полуэмпирический широкодиапазонный метод самосогласованного расчета статической и динамической проводимости плазмы.// Препринт ИВТАН. – №1-267. – М., 1989.
- [22] Атражев В.М., Якубов И.Т. Подвижность электронов в плотных газах и жидкостях.// ТВТ. – 1980. – 18. – №6. – с.1292-1311.
- [23] Gould H.A., De Witt H.E. Convergent Kinetic Equation for a Classical Plasma.// Phys. Rev. – 1967. – 155. – №1. – P.68-74.
- [24] Iikava Yu. Transport Coefficientnts of Plasmas - Applications of the Unifeld Theory.// J. Phys. Soc. Japan. – 1963. – V. 18. – №10. – P. 1499-1507.
- [25] Lee Y.T., More R.M. An electron conductivity model for dense plasmas.// Phys. Fluids. – 1984. – 27. – №5. – P.1273-1286.
- [26] Заика Е.В., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Электропроводность полностью ионизованной магнитоактивной плазмы с экранированным взаимодействием между зарядами // ТВТ. – 2000. – Т. 38. – № 6. – С. 853-861.
- [27] Mihajlov A.A., Dmitrijevic M.S., Djordjevic D. et. all. Quasi-Classical and Classical Cross Section for the Scattering of Electrons on the Cut-Off Potential.// Contrieb. Plasma Phys. – 1987. – V.27. – №1. – P.1.
- [28] Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
- [29] Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. – М.:Мир, 1976. – 496 с.

- [30] Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике. // УФН. — 1980. — 130. — №1. — С.113-147.
- [31] Выжол Ю.А., Жорова А.Н., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Применение методов компьютерной алгебры к расчету скобочных интегралов. // Журн. вычислит. мат. и мат. физ. — 2011. — 51. — № 10. — С.1867-1882.
- [32] Выжол Ю.А., Муленко И.А., Федосеева Е.В., Хомкин А.Л. Определение вклада электрон-электронных столкновений в проводимость полностью ионизованной плазмы для различных моделей расчета транспортных сечений. // Укр. физ. журн. — 1997. — 42. — № 9. — С. 1083-1090.
- [33] Выжол Ю.А., Жорова А.Н., Муленко И.А., Хомкин А.Л. Розробка системи аналітичних обчислень на ЕОМ та її застосування в кінетиці плазми. // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — Серія фізико-математичні науки. — 2011. — №1. — С. 96-102.
- [34] Беспалов В.Е., Грязнов В.К., Дремин А.Н., Фортвов В.Е. Динамическое сжатие неидеальной плазмы аргона. // ЖЭТФ. — 1975. — Т. 69. — №6. — С. 2059-2066.
- [35] Иванов Ю.В., Минцев В.Б., Фортвов В.Е., Дремин А.Н. Электропроводность неидеальной плазмы. // ЖЭТФ. — Т.71. — № 1. — 1976. — С. 216-224.
- [36] Минцев В.Б., Фортвов В.Е., Грязнов В.К. Электропроводность высокотемпературной неидеальной плазмы. // ЖЭТФ. — Т.79. — №1. — 1980. — С.116-124.

Поступила в редколлегию 11.12.2012



**Муленко Иван Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики Николаевского национального университета имени В.А. Сухомлинского. Область научных интересов: термодинамические и кинетические процессы неидеальной плазмы.



**Жорова Алла Николаевна**, старший преподаватель кафедры экономической кибернетики и математического моделирования Николаевского национального аграрного университета. Область научных интересов: математическое моделирование коэффициентов переноса неидеальной плазмы.



**Хомкин Александр Львович**, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Объединенного института высоких температур РАН (ОИВТ РАН) (Россия). Область научных интересов: физика плазмы.

УДК 533.9

**Розв'язання кінетичного рівняння Больцмана для повністю іонізованої магнітоактивної плазми** / А.М. Жорова, І.О. Муленко, О.Л. Хомкін // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2012. — Том 11. № 4. — С. 527–539.

Стаття присвячена обчисленню електронних кінетичних коефіцієнтів плазми в зовнішньому магнітному полі з «нелогарифмічною» точністю і дослідженню поведінки кінетичних коефіцієнтів.

*Ключові слова:* неідеальна плазма, кінетичне рівняння Больцмана, скобковий інтеграл, електропровідність.

Табл. 01. Іл. 05. Бібліогр.: 36 найм.

UDC 533.9

**Solving kinetic Boltzmann equation for a fully ionized magnetized plasma** / A.N. Zhorova, I.A. Mulyenko, A.L. Khomkin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. — 2012. Vol. 11. № 4. — P. 527–539.

The paper is devoted to the calculation of electron transport plasma coefficients in an external magnetic field with a «nonlogarithmic» accuracy and study of the behavior of kinetic coefficients.

*Keywords:* non-ideal plasma, kinetic Boltzmann equation, bracket integral, electric conductivity.

Tab. 01. Fig. 05. Refs.: 36 items.