ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.372

МИНИМИЗАЦИЯ ЧАСТИЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Ю.А. КОЧКАРЕВ, С.В. БУРМИСТРОВ, С.Ф. АКСЕНОВ

Описан новый метод направленного доопределения частично определенных булевых функций, заданных в ортогональной форме представления путем пошагового параллельного разложения с целью получения полностью определенной булевой функции, которая имеет наименьшие показатели сложности реализации в виде минимальной дизъюнктивной нормальной формы. Данный метод является результатом исследований особенностей строения ортогональной формы представления булевых функций. Существенно заметить, что доопределение осуществляется без полнопереборных процедур, направленным путем пошагового доопределения с автоматическим получением минимальной дизъюнктивной нормальной формы на основании исходной частично определенной булевой функции.

Ключевые слова: независимые аппаратные экспертные системы прогнозирования процессов, частично и полностью определенные булевы функции, ортогональная форма представления булевой функции.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной проблемой на протяжении последних десятилетий является оптимизация структурных блоков вычислительной техники. Данная проблема является достаточно сложной и многоуровневой. Она решается путем оптимизации и поиска оптимальных решений на всех уровнях реализации решения проблемы. Успехи современных микро- и нанотехнологий, технологические возможности усовершенствования цифровой аппаратуры путем повышения плотности размещения структурных элементов и повышения рабочей частоты работы сейчас приближаются к своему физическому пределу, и, как следствие, увеличивают в геометрической прогрессии значение коэффициента отношения стоимости оборудования для изготовления компонентов цифровой вычислительной техники к их прогнозируемой производительности.

Поэтому постоянно приковано пристальное внимание развитию методов символьной логики, с помощью которых описывают современные модели устройств современной цифровой техники. Вследствие прямой зависимости между простотой формулы БФ и компактностью схемы в этом случае получают схему с наилучшими показателями сложности реализации. Уровень сложности устройства в варианте формульного представления булевой функции определяется формой представления БФ.

Практические исследования в области создания независимых экспертных аппаратных цифровых систем для прогнозирования результатов развития определенных процессов, явлений и событий показывают, что в основе устройства указанных экспертных систем, как правило, лежат аппаратные цифровые системы, построенные на основе комбинационных схем, заданных таблицей истинности (ТИ) БФ, в которых часть строчек ТИ не определена. Значение данных строк может быть – 0 или 1. Данные БФ называют неполностью или частично определенными (ЧО БФ) [1].

Степень (коэффициент) определенности ЧО БФ – это отношение количества известных строк (определенных наборов в столбце результата) в ТИ к полному количеству строк в таблице истинности. Если булева функция $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ не определена на m наборах аргументов, то степень определенности БФ равен:

$$k = \frac{2^n - m}{2^n} \cdot 100\% .$$

Если k = 100%, БФ является полностью определенной (ПО БФ). Чем ниже степень определенности БФ, тем большее множество ПО БФ охватывает указанная ЧО БФ. Путем доопределения заданной ЧО БФ можно получить 2^m различных полностью определенных БФ. Как правило, соответствующим отсутствующим строкам ТИ придают такие значения, при которых можно построить наиболее простую схему. В этом случае доопределение БФ целесообразно производить таким образом, чтобы ее коэффициенты сложности реализации имели бы наименьшее значение из всех возможных вариантов доопределения.

В настоящее время как один из путей решения данной задачи активно реализуются результаты исследований так называемой ортогональной формы представления (ОРФП) БФ, предложенной в [2, 3]. Данная форма является многовариантной, обобщением известных форм представления БФ. Общеизвестная классическая форма представления (КФП) является одним из частных случаев ОРФП.

Принципиальным отличием в представлении БФ ОРФП от КФП является форма булевой функции $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ в виде конечного ряда сумм конъюнкций (1), каждый член которого состоит из двух частей: Φ_i – базисная часть БФ от k аргументов ($0 \le k \le n$-1), и Q_i – информационная часть от n-k аргументов.

$$y = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} Q_i \cdot \Phi_i. \qquad (1)$$

Соотношение между количеством аргументов в базисной и информационной части члена ряда регулируется коэффициентом $\boldsymbol{K}$. Согласно определению, один аргумент не может находиться одновременно и в базисной и информационной части. Коэффициент $\boldsymbol{K}$ указывает на количество аргументов, которое входит в базисную часть. Например, при $\boldsymbol{K}$=1 ряд состоит из двух членов, в каждом из которых базисная часть состоит из одного любого i-го аргумента из общего числа n:

$$y = x_i \wedge Q_{i0}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \vee \overline{x}_i \wedge$$
$$\wedge Q_{i1}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n).$$

Соответственно, при $\boldsymbol{K}$=2 базисная часть члена ряда состоит из двух аргументов, при $\boldsymbol{K}$=3 – из трех аргументов и т.д. Информационная часть БФ – булева функция от аргументов, которые не попали в базисную часть, и может быть представлена как независимая БФ соответственно с указанным числом аргументов.

Для получения минимальной формы представления (ФП) нужно сделать определенное число разложений, другими словами, выбрать для каждого члена ряда такое значение $\boldsymbol{K}$ (назовем это значение – оптимальным значением $\boldsymbol{K}$ для конкретного члена ряда, а булеву функцию, в которой все члены ряда имеют оптимальное значение $\boldsymbol{K}$ – оптимальной формой БФ), при котором суммарные показатели сложности реализации данной БФ являются минимальными.

Исследования по определению оптимального значения коэффициента $\boldsymbol{K}$ для булевой функции показали, что указанное значение является разным для каждого члена ряда. Данный вывод привел к созданию нового метода минимизации БФ, суть которого сводится к определению оптимального коэффициента $\boldsymbol{K}$ для каждого члена ряда. В этом случае информационная часть члена ряда БФ в результате минимизации становится константой (если равно единице – остается только базисная часть члена ряда, если равно нулю – указанный член ряда выпадает из ряда). В результате указанных действий из уравнения, заданного в ортогональной ФП, получают минимальную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) в классической ФП. Особенности реализации данного метода с успехом могут быть параллельно расширены для направленного доопределения ЧО БФ.

Особый интерес представляет доопределение частично определенных БФ, которые имеют большое количество аргументов (10 и выше) и низкий коэффициент определенности БФ (10% и ниже). При низкой степени определенности БФ возможен случай, когда возможно получение нескольких вариантов ПО БФ с одинаковыми коэффициентами сложности реализации БФ. Данный результат является следствием последовательности и пути доопределения ЧО БФ. Под разными путями доопределения в данном методе нужно понимать априорность выбора аргументов при доопределении БФ.

В данной работе предложен метод направленного доопределения ЧО БФ в ортогональной ФП. Предложен подход к решению поставленной задачи путем направленного пошагового параллельного доопределения ЧО БФ и получения из всего множества булевых функций, принадлежащего данной ЧО БФ, одной или несколько БФ, которые имеют минимальную ДНФ, в которой число слагаемых в булевой функции было бы минимальным, т. е., кратчайшим [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является описание сути метода направленного доопределения ЧО БФ на основе метода минимизации БФ в ортогональной ФП [4]. В результате параллельного пошагового направленного доопределения исходной частично определенной БФ с помощью критерия определения оптимального значения $\boldsymbol{K}$ для каждого члена ряда в ОРФП получают полностью определенную БФ, которая имеет наименьшее значение коэффициентов сложности реализации, другими словами минимальную ДНФ в классической ФП из всего множества ПО БФ.

В предложенном в данной работе методе доказана возможность доопределения ЧО БФ в ОРФП с показателями сложности реализации не хуже, чем другими известными методами. Существенно заметить, что доопределение ЧО БФ осуществляется направленно без полнопереборных процедур, и в результате получают полный список ПО БФ (одна или несколько БФ), которые принадлежат множеству исследуемой БФ и имеют для БФ данного множества минимальное значение уровня сложности реализации БФ.

В процессе разработки указанного метода был сформирован и протестирован алгоритм доопределения ЧО БФ в ортогональной ФП. Данный метод показал наилучшие показатели, во-первых, качества и полноты доопределения ЧО БФ, а во-вторых, трудоемкости и скорости реализации метода для конкретной ЧО булевой функции. На основе алгоритма создана программа CHOBF_ORFP, с помощью которой был протестирован метод, получены положительные результаты и сравнена скорость получения результата по сравнению с другими известными классическими методами.

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ЧАСТИЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Метод доопределения и минимизации ЧО булевых функций в ОРФП состоит из двух параллельных действий, которые выполняются синхронно. С одной стороны, определяется полный список полностью определенных БФ (одна или несколько БФ) из всего множества, которое покрывает исследуемая ЧО БФ, которые при разных путях доопределения для данной булевой функции дают минимальную ДНФ. С другой стороны, для каждой доопределенной БФ из списка синхронно определяется минимальная ДНФ. Из полученного множества минимальных ДНФ определяют конечный результат для каждой из полученных в результате доопределения ПО БФ.

Суть метода и алгоритм доопределения частично определенной БФ целесообразно объяснить на примере. Пусть задана ЧО БФ, которая, например, состоит из 5 аргументов ($n = 5$) и имеет номер в двоичной системе – троичный бинарный вектор $01{*}{*}0{*}{*}{*}{*}1{*}{*}{*}{*}1{*}{*}{*}{*}{*}0{*}1{*}{*}{*}1{*}{*}{*}01_2$ (значком «*» обозначены значения строки результата в ТИ, которые нужно доопределить). Даная БФ имеет степень определенности – 31,25%.

Алгоритм доопределения и минимизации состоит из следующих этапов:

1. Сформировать начальную таблицу истинности заданной БФ. Для удобства и компактности, ТИ повернуть на 90° так, как показано в табл. 1:

Таблица 1

Таблица истинности для доопределения частично определенных булевых функций

Двоичный код строк аргументов	№ арг.
1010 1010 1010 1010 1010 1010 1010 1010	x_1
1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100	x_2
1111 0000 1111 0000 1111 0000 1111 0000	x_3
1111 1111 0000 0000 1111 1111 0000 0000	x_4
1111 1111 1111 1111 0000 0000 0000 0000	x_5

2. Расширить таблицу истинности путем формирования дополнительных строк с инверсными значениями аргументов, как показано в табл. 2. Для определенности все полученные строки назовем строками аргументов.

3. Добавить в табл. 2 первой строкой номер исследуемой БФ в двоичной системе (для определенности данную строку назовем строкой булевой функции) и осуществить побитно операции сравнения строчек аргументов расширенной ТИ со строкой БФ (см. табл. 3). Последовательно проверить наличие одного из описанных ниже соответствий (соответствие типа (1→*) не учитывать ни для одного из вариантов):

- всех единичных бит каждой строки аргумента соответственным единичным битам строки БФ – единичное соответствие (1→1);
- всех единичных бит каждой строки аргумента соответственным нулевым битам строки БФ – нулевое соответствие (1→0).

Таблица 2

Расширенная таблица истинности для доопределения частично определенных булевых функций

Двоичный код строк аргументов	№ арг.
1010 1010 1010 1010 1010 1010 1010 1010	x_1
0101 0101 0101 0101 0101 0101 0101 0101	$\overline{x_1}$
1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100 1100	x_2
0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011 0011	$\overline{x_2}$
1111 0000 1111 0000 1111 0000 1111 0000	x_3
0000 1111 0000 1111 0000 1111 0000 1111	$\overline{x_3}$
1111 1111 0000 0000 1111 1111 0000 0000	x_4
0000 0000 1111 1111 0000 0000 1111 1111	$\overline{x_4}$
1111 1111 1111 1111 0000 0000 0000 0000	x_5
0000 0000 0000 0000 1111 1111 1111 1111	$\overline{x_5}$

4. Определить, для каких строк аргументов выполнено только условие БФ – единичное соответствие (1→1) и для каких строк аргументов выполнено только нулевое условие БФ – соответствие (1→0). Если присутствует одна или несколько таких строк, которые не противоречат друг другу – исполняют одно общее доопределение ЧО БФ. Если есть результаты, которые противоречат друг другу, их записывают и доопределяют параллельно как независимые.

5. Доопределение БФ проводить по правилу:

5.1 В случае единичного соответствия (1→1) всех единичных битов указанной строки аргумента всем единичным битам строки БФ доопределить булеву функцию, заменив в строке БФ соответствие (1→*) на соответствие (1→1) (заменить значки «*» на «1»). При этом записать название строки аргумента для исследуемой БФ в промежуточный результат для получения минимальной ДНФ и вычеркнуть в последующих таблицах все строки, в которых присутствует данная комбинация аргументов.

5.2 При нулевом соответствии (1→0) всех единичных бит строки аргумента всем нулевым битам строки БФ – доопределить булеву функцию, заменив в строке БФ соответствие (1→*) на соответствие (1→0) (заменить значки «*» на «0»). При этом вычеркнуть в последующих таблицах все строки, в которых присутствует данная комбинация аргументов.

6. В указанном примере только одна строка соответствует критерию п.5.1 (см. табл. 3). Поэтому на данном этапе нужно доопределить БФ – в строке БФ нужно заменить все биты вместо всех значков «*» на «1» напротив которых в строке аргументов $\overline{x_1}$ стоит цифра «1». В промежуточный результат внести значение $\overline{x_1}$ и в последующих таблицах вычеркнуть все строки, в которых в строке аргументов присутствует аргумент $\overline{x_1}$.

Таблица 3

Побитовая операция сравнения строк аргументов со строкой булевой функции

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ арг.	
01**0****1****1*****0*1***1***01	Исходный троичный вектор	
01*101*1*1*1*111*1*10111*111*101	Доопределенный троичный вектор	
10101010101010101010101010101010	x_1	-
01010101010101010101010101010101	$\overline{x_1}$	+ (1→1)
11001100110011001100110011001100	x_2	-
00110011001100110011001100110011	$\overline{x_2}$	-
11110000111100001111000011110000	x_3	-
00001111000011110000111100001111	$\overline{x_3}$	-
11111111000000001111111100000000	x_4	-
00000000111111110000000011111111	$\overline{x_4}$	-
11111111111111110000000000000000	x_5	-
00000000000000001111111111111111	$\overline{x_5}$	-

7. Из аргументов (табл. 2), сформировать следующую таблицу побитовой операции сравнения (см. табл. 4), которая состоит из сдвоенных комбинаций конъюнкций аргументов, кроме комбинаций аргументов строк единичного соответствия БФ (1→1) и нулевого соответствия БФ (1→0) из предыдущих таблиц (в данном случае отсутствуют все комбинации конъюнкций аргументов, которые содержат $\overline{x_1}$), и с ней выполняются аналогичные действия по поиску строк соответствия БФ (1→1) и БФ (1→0).

8. Поскольку булева функция содержит 5 аргументов, на следующих этапах формируются последовательно таблицы побитовых операций сравнения, которые состоят из строенных конъюнкций (см. табл. 5), счетверенных конъюнкций (см. табл. 6), и т.д. вплоть до полных конъюнкций – конъюнкций, которые содержат 5 аргументов (см. табл.7).

9. Полное количество строк в таблицах побитовой операции сравнения строк аргументов со строкой булевой функции, для функций, которые состоят из пяти аргументов, равно:

- при K=1 → 10,
- при K=2 → 40,
- при K=3 → 80,
- при K=4 → 80,
- при K=5 → 32.

10. Вероятность сокращения информационной части члена ряда составляет для полного множества $L(n)$ всех БФ от n аргументов величину 2^{1-2^n}. Даная величина существенно возрастает с уменьшением числа аргументов, при $n = 5$ – 0,466*10^-7^%, при n = 4 – 0,00305%, при n =3 – 0,78%, при n =2 – 12,5%, при n =1 – 50%.

11. На каждом шаге к конечному промежуточному ответу добавляются комбинации конъюнкций аргументов соответствия БФ типа (1→1).

Таблица 4

Побитовая операция сравнения строк конъюнкций из двух аргументов со строкой булевой функции

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ арг.	
01*101*1*1*1*111*1*10111*111*101	Исходный троичный вектор	
01*101*101*1011101*1011101110101	Доопределенный троичный вектор	
10001000100010001000100010001000	$x_2 x_1$	+ (1→0)
00100010001000100010001000100010	$\overline{x_2} x_1$	-
10100000101000001010000010100000	$x_3 x_1$	-
00001010000010100000101000001010	$\overline{x_3} x_1$	-
10101010000000001010101000000000	$x_4 x_1$	-
00000000101010100000000010101010	$\overline{x_4} x_1$	-
10101010101010100000000000000000	$x_5 x_1$	-
00000000000000001010101010101010	$\overline{x_5} x_1$	-
11000000110000001100000011000000	$x_3 x_2$	-
00001100000011000000110000001100	$\overline{x_3} x_2$	-
11001100000000001100110000000000	$x_4 x_2$	-
00000000110011000000000011001100	$\overline{x_4} x_2$	-
11001100110011000000000000000000	$x_5 x_2$	-
00000000000000001100110011001100	$\overline{x_5} x_2$	-
00110000001100000011000000110000	$x_3 \overline{x_2}$	-
00000011000000110000001100000011	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	-
00110011000000000011001100000000	$x_4 \overline{x_2}$	-
00000000001100110000000000110011	$\overline{x_4}\,\overline{x_2}$	-
00110011001100110000000000000000	$x_5 \overline{x_2}$	-
00000000000000000011001100110011	$\overline{x_5}\,\overline{x_2}$	-
11110000000000001111000000000000	$x_4 x_3$	-
00000000111100000000000011110000	$\overline{x_4} x_3$	-
11110000111100000000000000000000	$x_5 x_3$	-
00000000000000001111000011110000	$\overline{x_5} x_3$	-
00001111000000000000111100000000	$x_4 \overline{x_3}$	-
00000000000011110000000000001111	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}$	-
00001111000011110000000000000000	$x_5 \overline{x_3}$	-
00000000000000000000111100001111	$\overline{x_5}\,\overline{x_3}$	-
11111111000000000000000000000000	$x_5 x_4$	-
00000000000000001111111100000000	$\overline{x_5} x_4$	-
00000000111111110000000000000000	$x_5 \overline{x_4}$	-
00000000000000000000000011111111	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}$	-

В данном примере для сдвоенных конъюнкций такие строки отсутствуют (табл. 4), для строенных конъюнкций таких строк шесть (табл. 5), для счетверенных (табл. 6) и спятеренных конъюнкций (табл. 7) такие строки отсутствуют. При условии сокращения информационных частей, количество строк в таблицах существенно уменьшается.

Таблица 5

Побитовая операция сравнения строк конъюнкций из трех аргументов со строкой булевой функции

Двоичный код строки булевой функции и строк аргументов	№ арг.	
01*101*̲1̶01*̲1̶011̶1̶01̶*̲1̶011̶1̶011̶1̶0101	Исходная строка БФ	
01*1011̲1̶011̲1̶011̶1̶01̶1̲1̶011̶1̶011̶1̶0101	Доопределенная строка БФ	
00100000001000000010000000100000	$x_3\overline{x_2}x_1$	-
00000010000000100000001000000010	$\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1$	-
00100010000000000000100010000000	$x_4\overline{x_2}x_1$	-
00000000010001000000000000100010	$\overline{x_4}\,\overline{x_2}x_1$	-
00100010001000100000000000000000	$x_5\overline{x_2}x_1$	-
00000000000000000010001000100010	$\overline{x_5}\,\overline{x_2}x_1$	-
10100000000000001010000000000000	$x_4x_3x_1$	-
00000000101000000000000010100000	$\overline{x_4}x_3x_1$	-
10100000101000000000000000000000	$x_5x_3x_1$	-
00000000000000001010000010100000	$\overline{x_5}x_3x_1$	-
00001010000000000000101000000000	$x_4\overline{x_3}x_1$	-
00000000000010100000000000001010	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}x_1$	-
00001010000010100000000000000000	$x_5\overline{x_3}x_1$	-
00000000000000000000101000001010	$\overline{x_5}\,\overline{x_3}x_1$	-
10101010000000000000000000000000	$x_5x_4x_1$	-
00000000000000001010101000000000	$\overline{x_5}x_4x_1$	-
00000000101010100000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_1$	-
00000000000000000000000010101010	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}x_1$	-
11000000000000001100000000000000	$x_4x_3x_2$	-
00000000110000000000000011000000	$\overline{x_4}x_3x_2$	-
11000000110000000000000000000000	$x_5x_3x_2$	-
00000000000000001100000011000000	$\overline{x_5}x_3x_2$	-
00001100000000000000110000000000	$x_4\overline{x_3}x_2$	-
00000000000011000000000000001100	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}x_2$	-
00001100000011000000000000000000	$x_5\overline{x_3}x_2$	-
00000000000000000000110000001100	$\overline{x_5}\,\overline{x_3}x_2$	-
11001100000000000000000000000000	$x_5x_4x_2$	-
00000000000000001100110000000000	$\overline{x_5}x_4x_2$	-
00000000110011000000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_2$	-
00000000000000000000000011001100	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}x_2$	-
00110000000000000011000000000000	$x_4x_3\overline{x_2}$	-
00000000001̲1̶000000000000001̶1̶0000	$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$	+ (1→1)
00110000001100000000000000000000	$x_5x_3\overline{x_2}$	-
0000000000000000001̲1̶0000001̶1̶0000	$\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$	+ (1→1)
0000001̲1̶000000000000001̶1̶00000000	$x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	+ (1→1)
00000000000000110000000000000011	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	-
0000001̲1̶0000001̶1̶0000000000000000	$x_5\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	+ (1→1)
00000000000000000000001100000011	$\overline{x_5}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	-
00110011000000000000000000000000	$x_5x_4\overline{x_2}$	-
0000000000000000001̶1̶001̶1̶00000000	$\overline{x_5}x_4\overline{x_2}$	+ (1→1)
00000000001̲1̶001̶1̶0000000000000000	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_2}$	+ (1→1)
00000000000000000000000000110011	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_2}$	-
11110000000000000000000000000000	$x_5x_4x_3$	-
00000000000000001111000000000000	$\overline{x_5}x_4x_3$	-
00000000111100000000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_3$	-
00000000000000000000000011110000	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}x_3$	-
00001111000000000000000000000000	$x_5x_4\overline{x_3}$	-
00000000000000000000111100000000	$\overline{x_5}x_4\overline{x_3}$	-
00000000000011110000000000000000	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_3}$	-
00000000000000000000000000001111	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}$	-

Таблица 6

Побитовая операция сравнения строк конъюнкций из четырех аргументов со строкой булевой функции

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ арг.	
0̶1*̲10111011101110111011101110̶10̶1	Исходная строка БФ	
0̶10̲10111011101110111011101110̶10̶1	Доопределенная строка БФ	
00100000000000000010000000000000	$x_4x_3\overline{x_2}x_1$	-
00100000001000000000000000000000	$x_5x_3\overline{x_2}x_1$	-
00000000000000100000000000000010	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1$	-
00000000000000000000001000000010	$x_5x_3\overline{x_2}x_1$	-
00100010000000000000000000000000	$x_5x_4\overline{x_2}x_1$	-
00000000000000000000000000100010	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_2}x_1$	-
1̶01̶00000000000000000000000000000	$x_5x_4x_3x_1$	+ (1→0)
00000000000000001010000000000000	$\overline{x_5}x_4x_3x_1$	-
00000000101000000000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_3x_1$	-
00000000000000000000000010100000	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}x_3x_1$	-
00001010000000000000000000000000	$x_5x_4\overline{x_3}x_1$	-
00000000000000000000101000000000	$\overline{x_5}x_4\overline{x_3}x_1$	-
00000000000010100000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_3x_1$	-
00000000000000000000000000001̶01̶0	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_1}$	+ (1→0)
11000000000000000000000000000000	$x_5x_4x_3x_2$	-
00000000000000001100000000000000	$\overline{x_5}x_4x_3x_2$	-
00000000110000000000000000000000	$x_5\overline{x_4}x_3x_2$	-
00000000000000000000000011000000	$\overline{x_5}x_4x_3x_2$	-
00001100000000000000000000000000	$x_5x_4\overline{x_3}x_2$	-
00000000000000000000110000000000	$\overline{x_5}x_4\overline{x_3}x_2$	-
00000000000011000000000000000000	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_3}x_2$	-
00000000000000000000000000001100	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}$	-
00000000000000000000000000000011	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$	-

Таблица 7

Побитовая операция сравнения строк конъюнкций из пяти аргументов со строкой БФ

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ арг.	
01~~0~~101110111011101110111011101~~0~~1	Исходная строка БФ	
01~~0~~101110111011101110111011101~~0~~1	Доопределенная строка БФ	
00~~1~~00000000000000000000000000000	$x_5 x_4 x_3 \overline{x_2} x_1$	+ (1→0)
000000000000000000000000000000~~1~~0	$\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2} x_1$	+ (1→0)

Таким образом, после всех побитовых сравнений получено из всего множества БФ одну ПО БФ с номером $01010111011101110111011101110101_2$ (1467447187_{10}). Даная булева функция имеет наименьшие показатели сложности реализации. На основании 7 конъюнктивных наборов аргументов, которые входят в промежуточный результат, нужно составить минимальную ДНФ для данной БФ: один – для единичного набора аргументов и шесть для строенных конъюнктивных наборов ($\overline{x_1}$, $x_5\overline{x_4}\,\overline{x_2}$, $x_5\overline{x_3}\,\overline{x_2}$, $\overline{x_5}x_4\overline{x_2}$, $x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$, $\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$, $\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$), на основании которого формируется конечный ответ (см. табл. 8).

Таблица 8

Перечень промежуточных результатов и последовательность доопределения булевой функции

Вид доопределенной БФ		
Оптимальное значение K	Вид соответствия	Перечень промежуточных результатов
		01** 0*** *1** **1* **** 0*1* **1* **01
K=1	(1→1)	$\overline{x_1}$
		01*1 01*1 *1*1 *111 *1*1 0111 *111 *101
K=2	(1→0)	$x_2 x_1$
		01*1 01*1 01*1 0111 01*1 0111 0111 0101
K=3	(1→1)	$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$, $\overline{x_5}\cancel{x_4\overline{x_2}}$, $x_5\cancel{\overline{x_3}\,\overline{x_2}}$, $\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$, $x_4 x_3 x_2$, $x_5 x_4 x_2$
		01*1 0111 0111 0111 0111 0111 0111 0101
K=4	(1→0)	$x_5 x_4 x_3 x_1$, $\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_1}$
		0101 0111 0111 0111 0111 0111 0111 0101
K=5	(1→0)	$x_5 x_4 x_3 \overline{x_2} x_1$, $\overline{x_5}\,\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2} x_1$
		0101 0111 0111 0111 0111 0111 0111 0101

Конечный ответ формируется с помощью таблицы для получения конечного результата (см. табл. 9).

Дальнейшее формирование конечного ответа осуществляется в следующем порядке:

1. Из табл. 9 удалить те столбцы, в которых ПО БФ равна нулю (в строке БФ). После этого подсчитать в каждом столбце количество чисел 1, которые стоят в строках наборов аргументов (см. табл. 10).

Таблица 9

Таблица для получения конечного результата минимизации

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ импл.
01010111011101110111011101110101	Строка БФ
01010101010101010101010101010101	$\overline{x_1}$
00000000001100000000000000110000	$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$
00000000000000000011000000110000	$\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$
00000011000000000000001100000000	$x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
00000011000000110000000000000000	$x_5\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
00000000000000000011001100000000	$\overline{x_5}x_4\overline{x_2}$
00000000001100110000000000000000	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_2}$

Таблица 10

Уплотненная таблица для получения конечного результата минимизации булевой функции

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ импл.
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	Строка БФ
1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1	$\overline{x_1}$
0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0	$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0	$\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$
0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	$x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$x_5\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0	$\overline{x_5}x_4\overline{x_2}$
0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_2}$
1 1 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 1 1	К-во «1» в столбцах

2. В конечный результат в первую очередь вносятся строки, которые имеют только одну единицу в столбце. В данном случае это только одна строка $\overline{x}_1$. Эта строка удаляется из таблицы, и вместе с нею удаляются все столбцы табл. 10, в которых строка $\overline{x}_1$ имеет единицы (т.к. этими единицами уже покрыта строка БФ).

3. В результате получаем табл. 11, в которой строка БФ содержит 6 оставшихся непокрытых единиц и 6 строк с трехбуквенными конъюнкциями, которыми необходимо покрыть строку БФ.

Таблица 11

Уплотненная таблица для получения конечного результата минимизации булевой функции

Двоичный код строки БФ и строк аргументов	№ импл.
1 1 1 1 1 1	Строка БФ
0 1 0 0 0 1	$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$
0 0 0 1 0 1	$\overline{x_5}x_3\overline{x_2}$
1 0 0 0 1 0	$x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
1 0 1 0 0 0	$x_5\overline{x_3}\,\overline{x_2}$
0 0 0 1 1 0	$\overline{x_5}x_4\overline{x_2}$
0 1 1 0 0 0	$x_5\overline{x_4}\,\overline{x_2}$

4. Из табл. 11 следует, что частично определенная БФ $01^{**}0^{****}1^{****}1^{*****}0^{*}1^{***}1^{***}01_2$ имеет одну полностью определенную БФ с наименьшим показателем сложности реализации ($01010111011101110111011101110101_2$). Данная булева функция имеет два равноценных варианта, каждый из которых является минимальной ДНФ булевой функции:

$$y_1 = \overline{x_1} \vee x_5 \overline{x_3}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_4} x_3 \overline{x_2} \vee \overline{x_5} x_4 \overline{x_2}\ ;$$

$$y_2 = \overline{x_1} \vee x_5 \overline{x_4}\,\overline{x_2} \vee x_4 \overline{x_3}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_5} x_4 \overline{x_2}\ .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В предложенной статье описан новый метод доопределения булевых функций на основе метода минимизации в ортогональной форме представления. Данный метод предполагается положить в основу для создания независимой аппаратной экспертной системы прогнозирования результатов развития определенных процессов, явлений и событий с целью направленного выбора оптимального пути развития исследуемой системы.

2. Достоинством рассмотренного метода является отсутствие в процессе доопределения и минимизации частично определенной булевой функции промежуточных результатов, которые нужно дополнительно минимизировать, как того требуют метод Квайна и метод Квайна – Мак-Класки.

3. Результаты, полученные предложенным методом, являются идентичными по показателям сложности реализации булевых функций S_{ad}, S_l, S_s результатам, полученным методами Квайна, Квайна – Мак-Класки, и методом построения карт Карно.

4. Тестирование программы CHOBF_ORFP показало, что по скорости доопределения и минимизации данный метод имеет преимущество над другими аналогичными программами, построенными на других известных алгоритмах доопределения частично определенных булевых функций, за счет использования уже готовых, предварительно созданных внешних таблиц побитовой операции сравнения строк конъюнкций со строкой БФ для указанного числа аргументов (указанные таблицы являются одинаковыми для конкретного числа аргументов), а также за счет параллельного направленного доопределения булевой функции в процессе минимизации.

5. Внешние таблицы побитовой операции сравнения являются эффективным средством для доопределения и минимизации частично определенных булевых функций, которые имеют до восьми аргументов включительно. При минимизации булевых функций, которые имеют больше восьми аргументов, используют таблицы, которые состоят только из списка базисных частей членов ряда. Такое усовершенствование метода дает возможность существенно увеличить возможности метода по минимизации булевых функций с большим числом аргументов.

6. В результате получен результат в минимальной ДНФ в классической форме представления булевых функций на основе ортогональной формы представления, что доказывает, что классическая форма представления булевых функций есть только частный случай ортогональной формы представления.

Литература

[1] *Закревский А.Д.* Полиномиальная реализация частичных булевых функций и систем / А.Д. Закревский, Н.Р. Торопов. – М: Наука. 2012. – 200 с.

[2] *Kochkarev Y.A.* Ortogonal forms of presentation of boolean functions in device blocks / *Y.A. Kochkarev, I.I. Osipenkova, E.N. Panasko* // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2009. – Спецвипуск. – С. 39–42.

[3] *Кочкарев Ю.А.* Возможности реализации логических функций в ортогональной форме представления / *Ю.А. Кочкарев, Е.Н. Панаско, И.В. Синько* // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2011. – № 1. – С. 45–49.

[4] *Кочкарев Ю.А.* Минимизация булевых функций по частям / Ю.А. Кочкарев, С.В. Бурмистров, С.Ф. Аксенов // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2012. – № 4. – С.110–116.

Поступила в редколлегию 5.09.2013

Кочкарев Юрий Александрович, докт. техн. наук, профессор кафедры информатики и информационной безопасности Черкасского государственного технологического университета. Научные интересы: исследование альтернативных форм представления булевых функций.

Бурмистров Сергей Владиславович, аспирант кафедры информатики и информационной безопасности Черкасского государственного технологического университета, преподаватель Черкасского государственного бизнес-колледжа. Научные интересы: исследование альтернативных форм представления булевых функций.

Аксенов Сергей Федорович, студент Черкасского государственного технологического университета. Научные интересы: машинная обработка альтернативных форм представления булевых функций.

УДК 621.372

Мінімізація частково визначеної булевої функції в ортогональній формі представлення / Ю.О. Кочкарьов, С.В. Бурмістров, С.Ф. Аксьонов // Прикладна радіоелектроника: наук.-техн. журнал. – 2013. – Том 12. – № 3. – С. 423–430.

Описано новий метод направленого довизначення частково визначених булевих функцій, заданих в ортогональній формі представлення, шляхом покрокового паралельного розкладання булевої функції з метою отримання повністю визначеної булевої функції, яка має найменші показники складності реалізації у вигляді мінімальної диз'юнктивної нормальної форми. Даний метод є результатом дослідження особливостей будови ортогональної форми представлення булевих функцій. Суттєво зауважити, що довизначення здійснюється без повнопереборних процедур направленим шляхом покрокового довизначення з автоматичним отриманям мінімальної диз'юнктивної нормальної форми для вихідної частково визначеної булевої функцій.

Ключові слова: незалежні апаратні експертні системи прогнозування процесів, частково і повністю визначені булеві функції, ортогональна форма представлення булевої функції.

Табл.: 11. Бібліогр.: 4 найм.

UDC 621.372

Minimization of partially defined Boolean functions in the orthogonal form of presentation / Yu.A. Kochkharev, S.V. Burmistrov, S.F. Aksyonov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2013. – Vol. 12. – № 3. – P. 423–430.

The paper describes a new method of directional extension of a definition of partially defined Boolean functions given in the orthogonal form of presentation of Boolean functions by a step-by-step parallel expansion in order to obtain a fully defined Boolean function which has the lowest implementation complexities in the form of a minimum DFN. This method is the result of studying the peculiarities of the structure of a orthogonal representation form of Boolean functions. It is substantial to note that the extension of a definition is realized without fully exhaustive procedures, by the directional way of a step-by-step extension of a definition with automatic acquirement of the minimum DNF on the basis of the initial partially defined Boolean function.

Keywords: hardware independent expert systems for forecasting processes, partially and fully defined Boolean functions, orthogonal form of representation of Boolean functions.

Tab.: 11. Ref.: 4 items.