УДК 621.396.96

АЛГОРИТМ И ТОЧНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА ПРИ ПРЕОБЛАДАЮЩЕМ ВЛИЯНИИ СЛУЧАЙНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ФАЗЫ

М.М. МИНЕРВИН, А.Л. КУЗНЕЦОВ

Предлагается алгоритм и точность оптимального оценивания несущей частоты сигнала при преобладающем влиянии случайных флуктуаций закона изменения фазы. Ошибка оценивания данного параметра обусловлена влиянием аддитивных шумовых колебаний и случайных искажений его фазовой структуры.

Ключевые слова: фазовые флуктуации, частота сигнала, аддитивный шум, точность оценивания.

ВВЕДЕНИЕ

Искажения фазовой структуры сигнала за счет мультипликативной помехи могут быть существенными [1, 2]. Если дисперсия $\sigma^2_{\text{фл}}$ ошибок измерения параметра сигнала за счет случайных искажений его фазовой структуры много больше дисперсии $\sigma^2_{\text{ш}}$ ошибок измерения тех же параметров за счет аддитивных шумов, т. е.

$$\sigma^2_{\text{фл}} \big/ \sigma^2_{\text{ш}} >> 1 , \qquad (1)$$

то можно считать влияние случайных флуктуаций закона измерения фазы сигнала преобладающим.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Рассмотрим оценивание несущей частоты ω_0 сигнала длительности T. В этом случае закон изменения фазы имеет вид

$$\psi(t) = \omega_0 t + n_{\varphi}(t) \text{ при } -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} ,$$

где ω_0 – несущая частота сигнала, t – текущее время, $n_{\varphi}(t)$ – распределение фазовых флуктуаций во времени, которые далее будем описывать их дисперсией σ^2_{φ} и коэффициентом корреляции $K(t,s)$.

Оценка максимального правдоподобия несущей частоты ω_0 определяется из известного соотношения

$$\hat{\omega}_0 = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \psi(t) R(t) dt \Big/ \int\limits_{-T/2}^{T/2} tR(t) dt , \qquad (2)$$

где весовая функция $R(t)$ находится из интегрального уравнения

$$\sigma^2_{\varphi} = \int\limits_{-L/2}^{l/2} K(t,s) R(s) ds = \omega_0 t \text{ при } -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}, \quad (3)$$

а дисперсия ошибок оценивания несущей частоты ω_0 равна

$$\sigma^2_{\text{фл}} = \left[\int\limits_{-T/2}^{T/2} tR(t) dt \right]^{-1} . \qquad (4)$$

Условие (1) можно проверить сравнением дисперсии (4) с дисперсией ошибок оценивания, обусловленных аддитивным некоррелированным («белым») шумом,

$$\sigma^2_{\text{ш}} = 6 \big/ q^2 T^2 , \qquad (5)$$

где $q^2 = 2Э/N_0$ – отношение сигнал/шум по мощности, Э – энергия сигнала, N_0 – спектральная плотность мощности шума.

При пренебрежении фазовыми флуктуациями или неучете их частичной коррелированности весовая функция $R(t)$ является линейной, и оценивание производится по алгоритму

$$\hat{\omega}_1 = \frac{12}{T^3} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \psi(t) t dt$$

с дисперсией ошибок такого оценивания

$$\sigma^2_0 = \left(\frac{12}{T^3} \right)^2 \sigma^2_{\varphi} \int \int\limits_{-T/2}^{T/2} K(t,s) tsdtds . \qquad (6)$$

Отношение

$$B = \sigma^2_0 \big/ \sigma^2_{\text{фл}} \qquad (7)$$

дает возможность характеризовать выигрыш в точности за счет учета коррелированности фазовых флуктуаций.

Практически все встречающиеся зависимости $K(t,s)$ хорошо аппроксимируются выражением

$$K(t,s) = e^{-\alpha|t-s|} \left[\cos\beta(t-s) + \gamma \sin\beta|t-s| \right] . \qquad (8)$$

С использованием (8) из интегрального уравнения (3) сравнительно просто находится весовая функция $R(t)$, а потом рассмотренный выше алгоритм и характеристики точности.

Далее рассматриваются частные случаи (8): экспоненциальный закон

$$K(t,s) = \exp(-\alpha|t-s|) \qquad (9)$$

и законы, описываемые формулой

$$K(t,s) = e^{-\alpha|t-s|} \left[\cos m\alpha(t-s) + \frac{1}{m} \sin m\alpha|t-s| \right] . \quad (10)$$

В этих соотношениях параметр α характеризует быстроту затухания, а параметр $m = \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$ – частоту колебаний в зависимости $K(|t-s|)$.

На рис. 1 изображены зависимости (9) (обозначена буквой э) и (10) (обозначены цифрами 0,1 и 2 соответственно для $m = 0, m = 1, m = 2$).

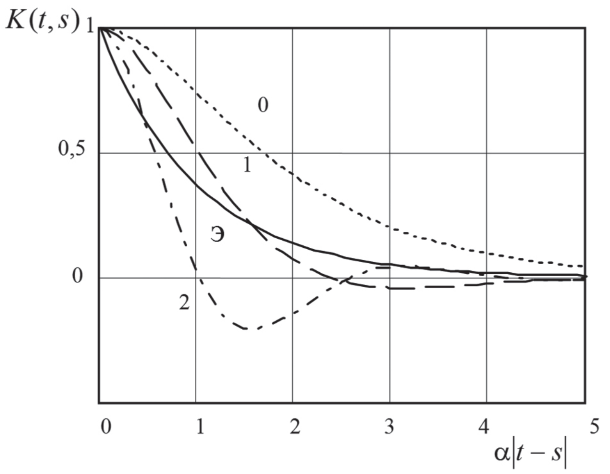


Рис. 1. Законы изменения корреляции

Для этих коэффициентов корреляции в [3] были получены решения интегрального уравнения (3):

$$R(t)=\frac{1}{2\alpha\sigma_\varphi^2}\{\alpha^2 t\,rect(t/T)+\left(1+\alpha T/2\right)\times$$
$$\times\left[\delta(t-T/2)-\delta(t+T/2)\right]\} \qquad (11)$$

для экспоненциального закона (9) и

$$R(t)=\frac{1}{4\alpha\sigma_\varphi^2}\left\{(1+m^2)t\,rect(t/T)+\left(\frac{3-m^2}{1+m^2}+\alpha T\right)\times\right.$$
$$\times\left[\delta(t-\frac{T}{2})-\delta(t+\frac{T}{2})\right]-\left[\frac{2}{(1+m^2)\alpha}+\frac{T}{2}\right]\times$$
$$\left.\times\left[\delta'(t-\frac{T}{2})-\delta'(t+\frac{T}{2})\right]\right\} \qquad (12)$$

для законов корреляции (10). В этих решениях $rect\left(t/T\right)=\begin{cases}1 \text{ при } |t|\le T/2,\\ 0 \text{ при } |t|>T/2\end{cases}$ прямоугольная функция, $\delta(x)$ и $\delta'(x)$ – дельта функция и ее производная.

Подстановка (11) в (2) дает оптимальный алгоритм оценивания

$$\hat{\omega}_0=k_1\,\hat{\omega}_1+k_2\,\hat{\omega}_2\,, \qquad (13)$$

где $\hat{\omega}_1=12\int\limits_{-T/2}^{T/2}\psi(t)tdt/T^3$ и $\hat{\omega}_2=[\psi(T/2)-$ $-\psi(-T/2)]/T$ – оптимальные оценки соответственно при некоррелированных и полностью коррелированных флуктуациях фазы, а весовые коэффициенты определяются соотношениями

$$k_1=1-k_2=\left(1+6/\alpha T+12/\alpha^2T^2\right)^{-1}. \qquad (14)$$

Из соотношений (4) и (11) определяется дисперсия ошибок оценивания

$$\sigma^2_{фл}=\frac{24\sigma_\varphi^2}{\alpha T^3}k_1\,. \qquad (15)$$

Подстановка (12) в (2) выявляет отличающийся от (13) алгоритм оптимального оценивания

$$\hat{\omega}_0=k_1\,\hat{\omega}_1+k_2\,\hat{\omega}_2+k_3\,\hat{\omega}_3\,, \qquad (16)$$

где $\hat{\omega}_3=\left[\psi'(T/2)+\psi'(-T/2)\right]/T$ – дополнительное по сравнению с (13) оценивание,

$$k_1=[1+12\Big/\left(1+m^2\right)\alpha T+48\Big/\left(1+m^2\right)^2\alpha^2T^2+$$
$$+48\Big/\left(1+m^2\right)^2\alpha^3T^3]^{-1}\,, \qquad (17)$$

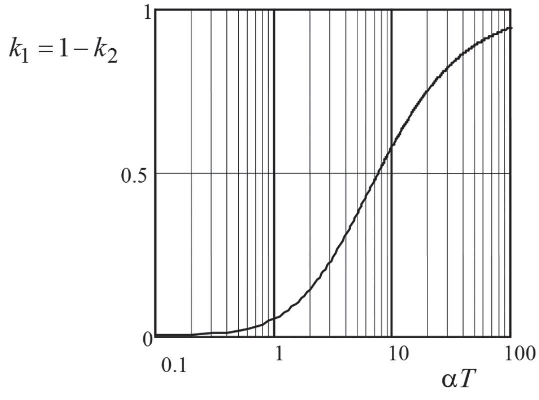
$$k_2=k_1 12\left(\alpha T+\frac{3-m^2}{1+m^2}\right)\Big/\left(1+m^2\right)\alpha^2T^2\,, \qquad (18)$$

$$k_3=1-k_1-k_2=$$
$$=k_1 12\left(\alpha T+\frac{4}{1+m^2}\right)\Big/\left(1+m^2\right)\alpha^3T^3\,. \qquad (19)$$

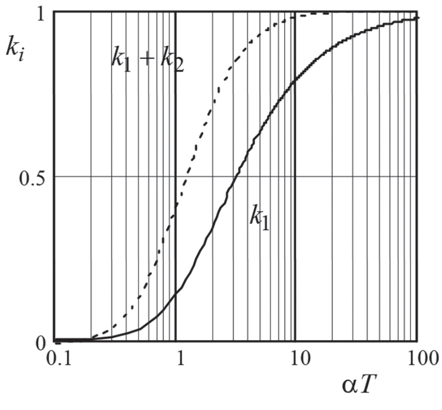
Соотношения (4) и (12) определяют дисперсию ошибок оценивания

$$\sigma^2_{фл}=\frac{48\sigma_\varphi^2}{(1+m^2)\alpha T^3}k_1\,. \qquad (20)$$

Из рис. 2, *а*, иллюстрирующего зависимость (14) и рис. 2, *б*, иллюстрирующего зависимости (17)–(19) для $m=2$, видно, что все виды оценивания $\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2$ и $\hat{\omega}_3$ могут вносить существенный вклад в итоговую оценку $\hat{\omega}_0$.



а



б

Рис. 2. Весовые коэффициенты оптимального алгоритма оценивания

Сравнивая соотношения (15) и (20) с формулой (5), конкретизируем условие (1)

$$\frac{\sigma^2_{фл}}{\sigma^2_{ш}}=q^2\sigma_\varphi^2\Phi(\alpha T)>>1\,,$$

где $\Phi(\alpha T)=\dfrac{2}{\alpha T+6+12/\alpha T}$ –

для экспоненциального закона корреляции (9), $\Phi(\alpha T)=4[(1+m^2)\alpha T+12+48/(1+m^2)\alpha T+$ $+48/(1+m^2)\alpha^2 T^2]$ — для законов корреляции (10).

Из этих соотношений видно, что условие (1) определяется совместно тремя факторами: отношением сигнал/шум q^2, дисперсией фазовых флуктуаций σ_φ^2 и соотношением длительности сигнала к интервалу корреляции флуктуаций $\rho \sim 1/\alpha$.

Вычисление выигрыша (7) с использованием формул (4) и (5) для экспоненциального закона корреляции дает

$$B(\alpha T)=\left[1-3/\alpha T+12/\alpha^3T^3-3e^{-\alpha T}\left(1+2/\alpha T\right)^2/\alpha T\right]\times$$
$$\times\left(1+6/\alpha T+12/\alpha^2T^2\right),$$

а для законов корреляции (10) —

$$B(\alpha T)=$$
$$=\left\{1-\frac{3}{2}\left(3-m^2\right)X+6\left(5-10m^2+m^4\right)X^3-\frac{3}{2}Xe^{-\alpha T}\times\right.$$
$$\times\left[\left\langle 3-m^2+16\left(1-m^2\right)X+4\left(5-10m^2+m^4\right)X^2\right\rangle\times\right.$$
$$\times\cos m\alpha T+\left\langle 3m-\frac{1}{m}+4\left(6m-m^3-\frac{1}{m}\right)X+\right.$$
$$\left.\left.\left.+4\left(10m-5m^3-\frac{1}{m}\right)X^2\right\rangle\sin m\alpha T\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1+12X\left[1+4X\left\langle 1+\left(1+m^2\right)X\right\rangle\right]\right\},$$

где $X=1/\left(1+m^2\right)\alpha T$.

Численные значения выигрыша B иллюстрируются рис. 3.

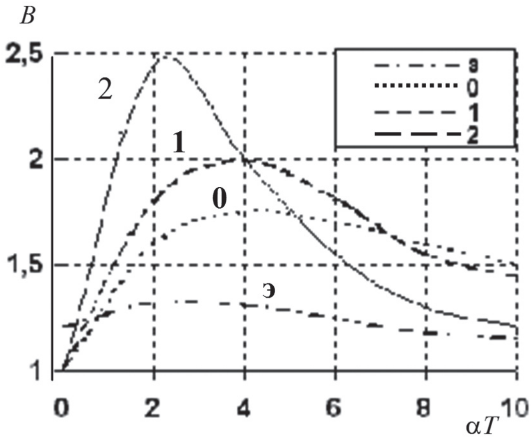


Рис. 3. Численные значения выигрыша

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из рис. 3 видно, что выигрыш может составлять от десятков до сотен процентов в зависимости от закона корреляции и отношения длительности сигнала T к интервалу корреляции флуктуаций фазы $\rho \sim 1/\alpha$.

Литература

[1] Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория / под. ред. Я.Д. Ширмана. – М.: З.А.О. "МАКВИС".

[2] Справочник по радиолокации / Под ред. М. Сколника. Том 1. – М.: Сов. радио, 1976.

[3] *Амиантов И.Н.* Избранные вопросы статистической теории связи. – М.: Сов. радио, 1971.

Поступила в редколлегию 16.10.2013

Минервин Николай Николаевич, фото и сведения об авторе см. на с. 486.

Кузнецов Александр Леонидович, фото и сведения об авторе см. на с. 505.

УДК 621.396.96

Алгоритм і точність оптимального оцінювання несучої частоти сигналу при переважному впливі випадкових флуктуацій закону зміни фази/ М.М. Мінервін, О.Л. Кузнєцов // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2013. – Том 12. – № 4. – С. 506–508.

Пропонується алгоритм і точність оптимального оцінювання несучої частоти сигналу при переважному впливі випадкових флуктуацій закону зміни фази. Помилка оцінювання даного параметра обумовлена впливом адитивних шумових коливань і випадкових викривлень його фазової структури.

Ключові слова: фазові флуктуації, частота сигналу, адитивний шум, точність оцінювання.

Іл.: 3. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 621.396.96

Algorithm and accuracy of optimum estimation of carrier signal frequency at prevailing influencing of phase law irregular fluctuations / N.N. Minervin, A.L. Kuznetsov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2013. – Vol. 12. – № 4. – P. 506–508.

An algorithm and accuracy of optimum estimation of a carrier signal frequency at prevailing influencing of phase law irregular fluctuations are offered. The estimation error of this parameter is conditioned by influencing of additive noises and irregular fluctuations of its phase structure.

Keywords: phase fluctuations, signal frequency, additive noise, estimation accuracy.

Fig.: 3. Ref.: 3 items.