

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИЗМЕРЕНИЯ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ ПАЧКИ РАДИОИМПУЛЬСОВ С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ИХ НАЧАЛЬНЫХ ФАЗ И АДДИТИВНЫХ ШУМОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н.Н. МИНЕРВИН, А.Л. КУЗНЕЦОВ

Получен оптимальный алгоритм оценивания несущей частоты пачки радиоимпульсов. Данный алгоритм позволяет произвести оценку несущей частоты пачки с учетом коррелированных фазовых флуктуаций ее радиоимпульсов и аддитивных шумовых колебаний.

Ключевые слова: оптимальный алгоритм, частота, коррелированные фазовые флуктуации, аддитивные шумовые колебания.

ВВЕДЕНИЕ

На практике широко используется когерентная пачка радиоимпульсов при измерении радиальной скорости объекта. Как известно, в основе этой операции лежит измерение несущей частоты пачки. Фазовые флуктуации принимаемого сигнала приводят к нарушению его временной когерентности, что ограничивает точность измерения данного параметра.

Предлагается алгоритм измерения несущей частоты пачки радиоимпульсов с учетом флуктуаций их начальных фаз и аддитивных шумовых колебаний.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

При приеме когерентного сигнала со случайной, распределенной равномерно начальной фазой и случайной, распределенной по закону Релея амплитудой на фоне некоррелированного шума, отношение правдоподобия в соответствии с [1] имеет вид:

$$\ell = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{2}} \exp \left\{ \frac{\frac{q^4}{4}}{1 + \frac{q^2}{2}} \rho^2 \right\}, \quad (1)$$

где q^2 – отношение сигнал-шум по мощности; ρ – нормированная функция рассогласования.

Полагая, что $q^2 \gg 1$, выражение (1) можно записать в виде:

$$\ell \approx \frac{2}{q^2} \exp \frac{q^2 \rho^2}{2}. \quad (2)$$

В случае когерентной пачки из n импульсов с постоянным периодом следования квадрат нормированной функции рассогласования описывается выражением:

$$\rho^2(\Omega) = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \exp \left\{ j[\Phi_i + \varphi_i - (\frac{n+1-2i}{2} T)\Omega] \right\} \right|^2, \quad (3)$$

где $\Omega = \omega - \omega_0$ – рассогласование между ожидаемой ω и наблюдаемой ω_0 несущими частотами пачки импульсов; n – число импульсов в пачке; i – номер импульса, отсчитываемый от начала

пачки; $\xi_i = \frac{Z_i}{Z_\Sigma}$; $Z_i = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}_i(t) \dot{X}_i^*(t) dt \right|$ – модуль

сигнальной части комплексного корреляционного интеграла для i -го импульса (результат его временной обработки); $\dot{Y}_i(t)$ – комплексная огибающая принятого i -го импульса; $\dot{X}_i^*(t)$ – комплексно сопряженная огибающая опорного напряжения при обработке i -го импульса;

$Z_\Sigma = \sum_{i=1}^n Z_i$; Φ_i – наблюдаемое значение начальной фазы i -го импульса; φ_i – случайная (флуктуационная) составляющая фазы i -го импульса;

$\frac{n+1-2i}{2} T \Omega$ – ожидаемое слагаемое начальной фазы i -го импульса, обусловленное рассогласованием по несущей частоте; T – период следования импульсов пачки.

Воспользовавшись формулой

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

и выражениями перехода от квадрата суммы к

двойной сумме $\left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$, получим:

$$\rho^2(\Omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \cos[\Phi_i - \Phi_j + \varphi_i - \varphi_j + (i-j)\Omega T], \quad (4)$$

где $\Phi_i - \Phi_j$ – наблюдаемая разность фаз i -го и j -го импульсов пачки; $(i-j)\Omega T$ – ожидаемая разность фаз i -го и j -го импульсов пачки; $\varphi_i - \varphi_j$ – случайная разность фаз этих импульсов.

При малом рассогласовании наблюдаемых и ожидаемых значений разностей начальных фаз импульсов получим:

$$\rho^2(\Omega) \cong 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j [\Phi_i - \Phi_j + \varphi_i - \varphi_j + (i-j)\Omega T]^2. \quad (5)$$

В дальнейшем будем рассматривать пачки импульсов с симметричным амплитудным распределением

$$\xi_i = \xi_{n+1-i}.$$

Путем рациональной группировки входящих в соотношение (5) разностей фаз его можно преобразовать к виду:

$$\rho^2(\Omega) \cong 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \xi_k [\Delta\Phi_k + \Delta\varphi_k - (2k-1)\Omega T]^2 - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \xi_k \xi_l (S_k - S_l)^2, \quad (6)$$

где $\Delta\Phi_k = \Phi_{m+1-k} - \Phi_{m+k}$ – разность фаз симметричных импульсов пачки; $\Delta\varphi_k = \varphi_{m+1-k} - \varphi_{m+k}$, $S_k = \varphi_{m+1-k} + \varphi_{m+k}$ – разность и сумма флуктуационных составляющих фаз импульсов пачки; k и l – номера пар импульсов симметричных относительно центра пачки. Нумерация симметричных пар импульсов пачки производится от ее центра до $m = \frac{n}{2}$.

В выражении (6) последнее слагаемое не зависит от измеряемого параметра, поэтому в дальнейшем рассмотрении его можно не учитывать. Таким образом, информация о несущей частоте пачки содержится в разности фаз ее симметричных импульсов.

Наличие в выражении (6) случайных составляющих разностей фаз симметричных импульсов пачки обуславливает необходимость перехода к усредненному отношению правдоподобия:

$$\bar{\ell}(\Omega) = \int_{(\Delta\vec{\varphi})} \ell(\Omega, \Delta\vec{\varphi}) p(\Delta\vec{\varphi}) d\Delta\vec{\varphi}, \quad (7)$$

где $\Delta\vec{\varphi} = \|\Delta\varphi_k\|$ – вектор-столбец значений случайных составляющих разностей фаз симметричных импульсов пачки; $p(\Delta\varphi)$ – закон распределения их плотности вероятности; $d\Delta\vec{\varphi} = d\Delta\varphi_1 d\Delta\varphi_2 \dots d\Delta\varphi_m$.

Предполагается, что фазовые флуктуации распределены по нормальному закону, а корреляционная матрица фазовых флуктуаций имеет следующий вид:

$$K = \sigma_\varphi^2 |a^{i-j}|,$$

где σ_φ^2 – дисперсия фазовых флуктуаций; a – коэффициент корреляции фазовых флуктуаций соседних импульсов пачки; i и j – номера импульсов пачки.

Таким образом, при $a > 0$ с увеличением интервала между импульсами пачки корреляция убывает по экспоненциальному, а при $a < 0$ – по знакопеременному закону.

Распределение плотности вероятности случайных составляющих разностей фаз симметричных импульсов пачки при $m \geq 2$ имеет следующий вид:

$$p(\Delta\vec{\varphi}) = \frac{\sqrt{1+a}}{(2\sqrt{\pi}\sigma_\varphi)^m (1-a^2)^{m/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma_\varphi^2 (1-a^2)} \left[\Delta\varphi_m^2 + (1+a+a^2)\Delta\varphi_1^2 + (1+a^2) \sum_{k=2}^{m-1} \Delta\varphi_k^2 - 2a \sum_{k=1}^{m-1} \Delta\varphi_k \Delta\varphi_{k+1} \right] \right\}. \quad (8)$$

Выражение для усредненного отношения правдоподобия с учетом соотношений (2), (6), (7), (8) можно записать в виде:

$$\bar{\ell}(\Omega) = K \int_{(\Delta\vec{\varphi})} \exp \left[-\frac{q^2}{2} (a_{1,1} \Delta\varphi_1^2 + a_{m,m} \Delta\varphi_m^2 + \sum_{k=2}^{m-1} a_{k,k} \Delta\varphi_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{m-1} a_{k,k+1} \Delta\varphi_k \Delta\varphi_{k+1} + 2 \sum_{k=1}^m a_{k,m+1} \Delta\varphi_k) \right] d\Delta\varphi_1 d\Delta\varphi_2 \dots d\Delta\varphi_m, \quad (9)$$

где

$$K = \frac{2\sqrt{1+a}}{q^2 (2\sqrt{\pi}\sigma_\varphi)^m (1-a^2)^{m/2}} \exp \left[\frac{q^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \xi_k \delta\Phi_k^2 \right) \right];$$

$$a_{1,1} = \frac{1+a+a^2}{2\gamma(1+a)} + \frac{\xi_1}{2}; \quad a_{m,m} = \frac{1}{2\gamma(1+a)} + \frac{\xi_m}{2};$$

$$a_{k,k} = \frac{1+a^2}{2\gamma(1+a)} + \frac{\xi_k}{2} \quad (k=2,3,\dots,m-1);$$

$$a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = -\frac{a}{2\gamma(1+a)}; \quad a_{k,m+1} = a_{m+1,k} = \frac{1}{2} \xi_k \delta\Phi_k;$$

$$\gamma = q^2 \sigma_\varphi^2 (1-a); \quad \delta\Phi_k = \Delta\Phi_k - (2k-1)\Omega T.$$

Параметр γ позволяет одновременно учитывать влияние как внутренних шумов, так и коррелированных фазовых флуктуаций. При преобладающем влиянии внутренних шумов параметр γ принимает малые значения ($\gamma \ll 1$), а при преобладании фазовых флуктуаций данный параметр достигает значительных величин ($\gamma \gg 1$).

Из соотношения (9) видно, что в показателе экспоненты, находящейся под знаком интеграла, содержатся слагаемые, образующие квадратичную форму m переменных $\Delta\varphi$.

Для того, чтобы взять этот интеграл, необходимо в соотношении (9) показатель экспоненты привести к виду [3]:

$$-\frac{q^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k^2 + \frac{|\Delta|}{|\Theta|} \right), \quad (10)$$

где

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & 0 & a_{2,m+1} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 & a_{3,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m,m-1} & a_{m,m} & a_{m,m+1} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m-1} & a_{m+1,m} & 0 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы Δ коэффициентов квадратичной формы; $|\Theta|$ – определитель матрицы Θ коэффициентов при членах второй степени квадратичной формы; $\vec{y} = \|y_k\|$ – новые переменные; $\|\lambda_k\|$ – собственные значения матрицы Θ , полученной из матрицы Δ вычеркиванием $(m+1)$ -й строки и $(m+1)$ -го столбца.

Используя выражение (10), усредненное отношение правдоподобия (9) представляется в следующем виде:

$$\bar{\ell}(\Omega) \cong K \exp \left(-\frac{q^2}{2} \frac{|\Delta|}{|\Theta|} \right) \prod_{k=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{q^2 \lambda_k y_k^2}{2} \right) dy_k. \quad (11)$$

Учитывая табличный интеграл [2] $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{q^2 \lambda y^2}{2}) dy = \sqrt{\frac{2\pi}{q^2 \lambda}}$ и свойство собственных значений [3] $\prod_{k=1}^m \lambda_k = |\Theta|$, выражение (11) запишется в виде:

$$\bar{l}(\Omega) = K \prod_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi}{q^2 \lambda_k}} \exp(-\frac{q^2 |\Delta|}{2 |\Theta|}). \quad (12)$$

Беря натуральный логарифм выражения (12) и оставляя зависящие от измеряемого параметра слагаемые, получим соотношение для достаточной статистики:

$$S(\Omega) = \frac{q^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \xi_k \delta \Phi_k^2 \right) - \frac{q^2 |\Delta|}{2 |\Theta|}. \quad (13)$$

Элементы $(m+1)$ -й строки и $(m+1)$ -го столбца матрицы Δ содержат измеряемый параметр.

Определитель $|\Delta|$ можно записать в следующем виде:

$$|\Delta| = \sum_{k=1}^m a_{k,m+1} A_{k,m+1}, \quad (14)$$

где $A_{k,m+1}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{k,m+1}$ матрицы Δ . Для выделения $\delta \Phi_k$ свойство (14) применяется повторно к элементам $(m+1)$ -ой строки матрицы Δ . Таким образом, формула для расчета определителя $|\Delta|$ принимает вид:

$$|\Delta| = - \sum_{k=1}^m (-1)^k a_{k,m+1} \sum_{i=1}^m a_{m+1,i} (-1)^i |\Theta_{k,i}| = - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m (-1)^k \xi_k \delta \Phi_k \sum_{i=1}^m (-1)^i \xi_i \delta \Phi_i |\Theta_{k,i}|, \quad (15)$$

где $|\Theta_{k,i}|$ – минор элемента k,i матрицы Θ .

С учетом (15) и (13) получим выражение для достаточной статистики:

$$S(\Omega) = \frac{q^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^m \xi_k \delta \Phi_k^2 \left(1 - \frac{1}{2 |\Theta|} \xi_k |\Theta_{k,k}| \right) - \frac{1}{|\Theta|} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=k+1}^m (-1)^{k+i} \xi_k \xi_i \delta \Phi_k \delta \Phi_i |\Theta_{k,i}| \right] \right\}. \quad (16)$$

Алгоритмами оптимального оценивания несущей частоты могут быть все возможные процедуры решения уравнения правдоподобия [1]:

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial \Omega} = 0, \quad \text{при} \quad \Omega = \hat{\Omega}. \quad (17)$$

Одна из возможных форм записи решения уравнения (17) имеет вид:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m g_k \frac{\Delta \Phi_k}{(2k-1)}. \quad (18)$$

Из выражения (18) видно, что при оптимальном оценивании несущей частоты измеряются разности фаз симметричных импульсов пачки и далее суммируются с весовыми коэффициен-

тами g_k . Следует отметить, что наличие в (18) в явном виде разностей $\Delta \Phi_k$ определяет только один из способов оценивания несущей частоты, возможны также и другие варианты.

Весовые коэффициенты g_k , входящие в выражение (18), описываются соотношениями

$$g_k = (2k-1) \xi_K \frac{A_k}{B}, \quad (19)$$

где

$$A_k = (2k-1) Z_k - \frac{1}{2 |\Theta|} \left[\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k+i} \xi_i (2i-1) |\Theta_{k,i}| + \sum_{i=k+1}^m (-1)^{k+i} (2i-1) \xi_i |\Theta_{k,i}| \right];$$

$$B = \sum_{k=1}^m \xi_k (2k-1)^2 Z_k - \frac{1}{|\Theta|} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=k+1}^m (-1)^{k+i} (2k-1)(2i-1) \xi_k \xi_i |\Theta_{k,i}|;$$

$$Z_k = 1 - \frac{1}{2 |\Theta|} \xi_k |\Theta_{k,k}|.$$

Весовые коэффициенты g_k зависят от интервала $(2k-1)T$ между симметричными импульсами пачки, параметра γ и амплитудного веса ξ_k симметричных импульсов.

При преобладающем влиянии аддитивного шума, т. е. при $\gamma \ll 1$, используя соотношения (18) и (19), получим выражение для оптимальной оценки несущей частоты пачки:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \frac{\sum_{k=1}^m \xi_k (2k-1) \Delta \Phi_k}{\sum_{k=1}^m \xi_k (2k-1)^2}. \quad (20)$$

Из выражения (20) следует, что весовые коэффициенты пропорциональны интервалу между симметричными импульсами пачки и амплитудному множителю ξ_k .

Если же преобладает влияние коррелированных фазовых флуктуаций, т. е. при условии $\gamma \gg 1$, из выражений (18) и (19) получим соотношение для оптимальной оценки:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \times \quad (21)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{m-1} (2k-1) \Delta \Phi_k + [2m-1-(2m-3)a] \Delta \Phi_m / (1-a)^2}{\sum_{k=1}^{m-1} (2k-1)^2 + (2m-1)[2m-1-(2m-3)a] / (1-a)^2}.$$

Из выражения (21) видно, что весовые коэффициенты зависят от интервала между симметричными импульсами пачки и коэффициента корреляции фазовых флуктуаций между соседними импульсами и не зависят от амплитудного веса симметричных импульсов.

На рис. 1 представлены графики зависимости весовых коэффициентов g_k и g'_k от значений параметра γ при фиксированном значении коэффициента корреляции фазовых флуктуаций

($a=0,5$) и различных соотношениях амплитуд симметричных пар для пачки из десяти импульсов.

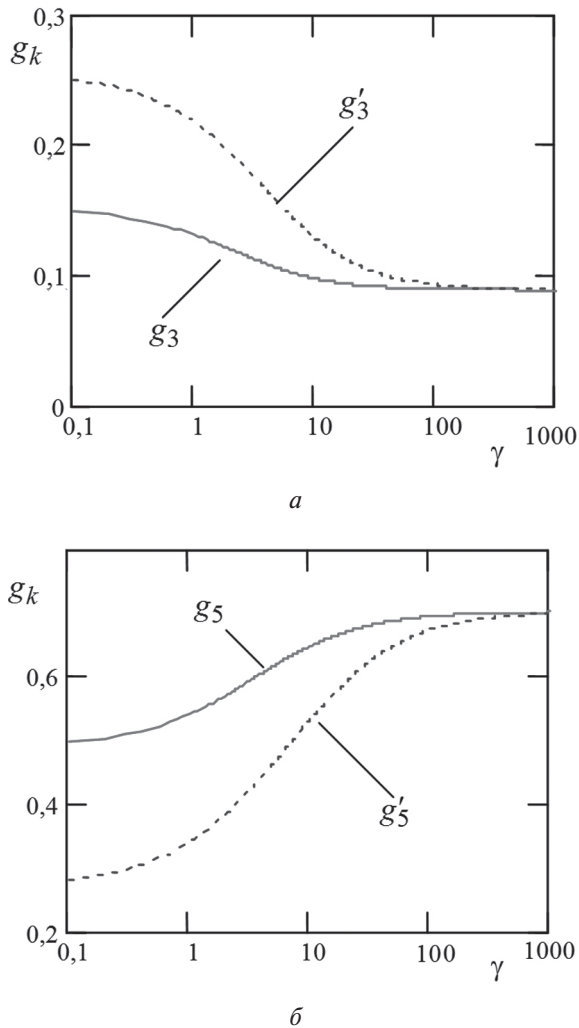


Рис. 1. Графики зависимостей весовых коэффициентов g_k и g'_k от значений параметра γ при фиксированном значении коэффициента корреляции фазовых флуктуаций

Весовые коэффициенты g_3 и g_5 соответствуют пачке с равномерным распределением амплитуд импульсов. Весовые коэффициенты g'_3 и g'_5 соответствуют пачке со спадающим от центра к краям по закону $\frac{\xi_k}{\xi_1} = 1 - 0,2(k-1)$ $k = 1, 2, \dots, m$ распределением амплитуд импульсов.

На рис. 2 представлены аналогичные графики для пачки из десяти импульсов с равномерным распределением амплитуд при различных значениях коэффициента корреляции фазовых флуктуаций.

На данных рисунках представлены графики только для весовых коэффициентов g_3, g'_3 и g_5, g'_5 . Графики для остальных весовых коэффициентов не приводятся, т. к. g_1, g'_1 и g_2, g'_2 по характеру соответствующих зависимостей аналогичны g_3 и g'_3 , только принимают существенно меньшие значения, а g_4, g'_4 принимают соответствующие промежуточные значения между g_3, g'_3 и g_5, g'_5 .

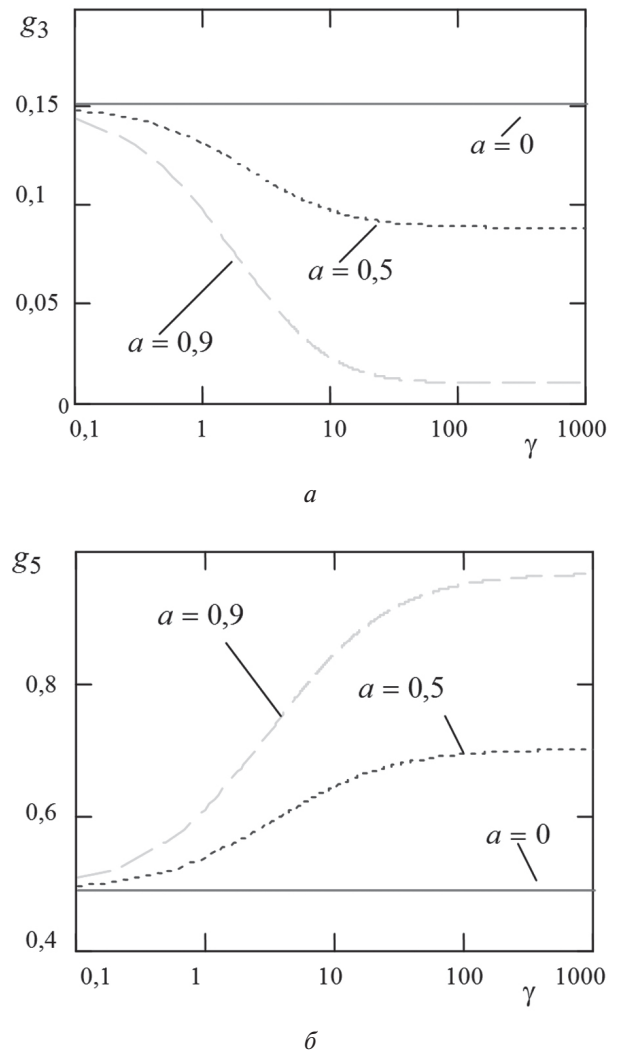


Рис. 2. Графики зависимостей весовых коэффициентов g_k и g'_k от значений параметра γ при различных значениях коэффициента корреляции фазовых флуктуаций

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из графиков на рис. 1 видно, что при изменении параметра γ в области малых значений (при преобладающем влиянии аддитивного шума ($\gamma \ll 1$)) величины весовых коэффициентов существенно не изменяются. На значения весовых коэффициентов оказывают влияние отношения амплитуд пар симметричных импульсов пачки.

Как следует из графиков на рис. 2, при тех же значениях параметра γ на весовые коэффициенты не оказывает существенного влияния значение коэффициента корреляции фазовых флуктуаций. Эти особенности в явном виде отражает структура выражения (20), с помощью которого оценивается несущая частота при данных значениях параметра γ .

В области больших значений параметра γ (при преобладающем влиянии коррелированных фазовых флуктуаций ($\gamma \gg 1$)), кривые на рис. 1 демонстрируют, что значения весовых коэффициентов практически не изменяются при увеличении параметра γ и не зависят от отношений амплитуд пар симметричных импульсов пачки.

Из графиков на рис. 2 следует, что при больших значениях параметра γ на величину весовых коэффициентов существенное влияние оказывает коэффициент корреляции фазовых флуктуаций. Эти особенности отражены в структуре выражения (21), с помощью которого оценивается несущая частота при $\gamma \gg 1$.

В области промежуточных значений параметра γ величины весовых коэффициентов существенно меняются при изменении γ . Как следует из соответствующих графиков на рис. 1 и рис. 2, на значения весовых коэффициентов оказывают влияние как отношения амплитуд пар симметричных импульсов пачки, так и значение коэффициента корреляции фазовых флуктуаций. В данном случае для оценивания несущей частоты необходимо использовать общее выражение (19).

Приведенные на рис. 1 и 2 зависимости позволяют уточнить граничные значения параметра γ , при которых целесообразно применять соотношения (19–21).

Литература

- [1] Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.
- [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
- [3] Окунев Л. Я., Высшая алгебра. — М.: Просвещение, 1966. — 335 с.

Поступила в редколлегию 17.10.2013

Минервин Николай Николаевич, фото и сведения об авторе см. на с. 486.

Кузнецов Александр Леонидович, фото и сведения об авторе см. на с. 505.

УДК 621.396.96

Оптимальний алгоритм вимірювання несучої частоти пачки радіоімпульсів з урахуванням флуктуацій їх початкових фаз і адитивних шумових коливань / М.М. Мінервін, О.Л. Кузнецов // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2013. — Том 12. — № 4. — С. 509–513.

Отримано оптимальний алгоритм оцінювання несучої частоти пачки радіоімпульсів. Цей алгоритм дозволяє здійснити оцінювання несучої частоти пачки з урахуванням корельованих фазових флуктуацій її радіоімпульсів і адитивних шумових коливань.

Ключові слова: оптимальний алгоритм, частота, корельовані фазові флуктуації, адитивні шумові коливання.

Л.: 2. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 621.396.96

An optimum measurement algorithm of carrier frequency of a radio pulses train in view of fluctuations of their initial phases and additive noises / N.N. Minervin, A.L. Kuznetsov// Applied Radio Electronics: Sci. Journ. — 2013. — Vol. 12. — № 4. — P. 509–513.

An optimum algorithm for estimating the carrier frequency of a radio pulses train is obtained. This algorithm allows to estimate the carrier frequency of the packet in view of the correlated phase fluctuations of its radio pulses and additive noise.

Keywords: optimum algorithm, frequency, correlated phase fluctuations, additive noise.

Fig.: 2. Ref.: 3 items.