

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ИНЕРЦИОННЫМ ЗВЕНОМ

О.В. ЗЕМЛЯНЫЙ

Исследованы спектральные характеристики хаотических автоколебаний в нелинейной динамической системе с запаздывающей обратной связью кольцевого типа для случая, когда учитываются инерционные свойства элементов системы. Использован подход, основанный на замене нелинейной системы линейной с параметрами, переменными во времени. Установлено, что спектр автоколебаний имеет периодическую структуру с частотным периодом, обратно пропорциональным времени запаздывания, при этом скорость уменьшения амплитуд спектральных составляющих с ростом частоты определяется отношением постоянной времени инерционного звена ко времени запаздывания в кольце обратной связи.

Ключевые слова: хаотические колебания, нелинейная динамическая система, запаздывающая обратная связь, дифференциально-разностное уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении систем с хаотическим поведением с целью создания генераторов хаоса с заданными характеристиками одной из основных задач является нахождение в спектральных характеристиках выходного сигнала. Поскольку любой генератор хаоса является автоколебательной системой, которая в общем случае представляет собой комбинацию линейных и нелинейных подсистем [1], такая задача сводится к представлению изучаемой системы в виде комбинации таких подсистем с последующим анализом прохождения сигналов через них (которые могут быть как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами). В случае системы с запаздывающей обратной связью [1–3] задача сводится к нахождению спектра собственных частот распределенной колебательной системы с сосредоточенной нелинейностью [2, 3].

При нахождении спектральных свойств резонатора с нелинейностью часто используется подход, при котором решается задача на собственные колебания линейного резонатора, а влияние нелинейности учитывается как малая поправка к найденному решению. При этом предполагается, что динамика поведения полностью навязывается самим резонатором.

При описании генераторов хаотических колебаний такой подход не всегда дает достоверные результаты, т. к. при рассмотрении процессов в автогенераторе нелинейность в общем случае не является малой [2, 3]. В результате возникает ситуация, когда спектральные свойства сигнала генератора отличаются от спектральных характеристик пассивного резонатора, включенного в его обратную связь, т. к. действие нелинейности существенно изменяет спектр выходного сигнала, который сильно зависит от параметров нелинейного элемента [4, 5].

В работе [5] проведен анализ корреляционно-спектральных свойств хаоса в нелинейной динамической системе с запаздыванием и не-

линейным элементом, реализующим асимметричное треугольное отображение. Рассмотрен случай, когда в системе не учитываются эффекты инерционности, а уравнение системы является разностным. Учет инерционности приводит к нелинейному дифференциально-разностному уравнению, вид решения которого определяется соотношением времени запаздывания в кольце обратной связи и постоянной времени инерционного звена [6, 7]. Целью данной работы является изучение спектральных характеристик хаотических автоколебаний в нелинейной системе с запаздыванием для случая, когда учитываются инерционные свойства. При этом используется подход, основанный на замене нелинейной системы линейной с параметрами, переменными во времени [8].

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СПЕКТРА СИГНАЛА КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФНЧ

Дифференциально-разностное уравнение, описывающее динамику системы с запаздывающей обратной связью (рис. 1), содержащей фильтр с постоянной времени τ (инерционное звено, динамическая система первого порядка) имеет следующий вид:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = F(y(t-T)). \quad (1)$$

Проведем дискретизацию этого уравнения заменой производных разделенными разностями [9–11]. Представим переменную $y(t)$ в виде совокупности дискретных отсчетов в моменты времени $t_n = n\Delta$, отстоящих друг от друга на постоянный интервал дискретизации Δ . При этом $T = m\Delta$.

$$\begin{aligned} \frac{y(n\Delta) - y((n-1)\Delta)}{n\Delta - (n-1)\Delta} + y((n-1)\Delta) = \\ = F\left[y\left\{ (n-1)\Delta - m\Delta \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

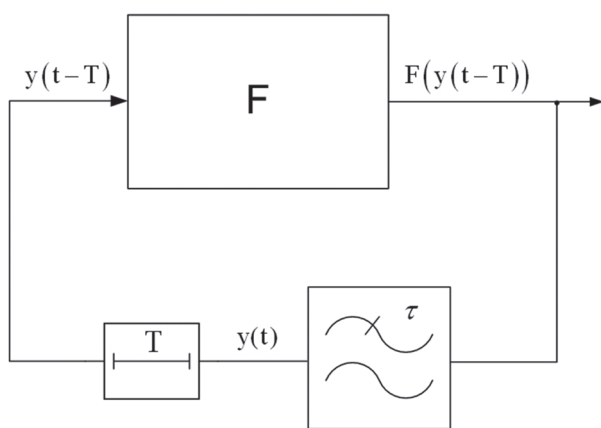


Рис. 1. Структура нелинейной динамической системы с запаздывающей обратной связью кольцевого типа и инерционным звеном

Обозначив $y_n = y(n\Delta)$ после проведения преобразований, получим:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta} + y_{n-1} = F(y_{n-M}), \quad (3)$$

где $M = m + 1$. При условии, что $\Delta \ll \tau$, разностное уравнение (3) в пределе при $\Delta \rightarrow 0$ переходит в дифференциально-разностное уравнение (1), т. к. согласно определению производной функции

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Перегруппировав члены уравнения (3) и обозначив $\beta = 1 - \frac{\Delta}{\tau}$, получим:

$$y_n = \beta y_{n-1} + (1 - \beta) F(y_{n-M}). \quad (4)$$

Аналогичная процедура перехода от дифференциального уравнения к его дискретному аналогу может быть получена методами статистической радиотехники [12, 13] при рассмотрении задачи о воздействии белого шума на интегрирующую RC-цепь. При этом $\beta = e^{-\frac{\Delta}{\tau}}$. Разложив экспоненту в ряд Маклорена

$$e^{-\frac{\Delta}{\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\Delta}{\tau}\right)^n = 1 - \frac{\Delta}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2 - \dots,$$

с учетом малости членов второго порядка и выше, получаем: $\beta \approx 1 - \frac{\Delta}{\tau}$.

2. АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ РЕКУРСИВНОГО АЛГОРИТМА

Разностное уравнение (4) соответствует схеме рекурсивного алгоритма, представленной на рис. 2.

При нелинейности вида “tent-map” с параметром r [14] действие функции F на каждый дискретный отсчет сводится к следующему:

$$F(u) = \begin{cases} 2ru, & 0 \leq u \leq 0.5, \\ 2r(1-u), & 0.5 < u \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

При этом уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$y_n = \beta y_{n-1} + (1 - \beta) \times (r(1 - s(y_{n-M})) + 2rs(y_{n-M})y_{n-M}). \quad (6)$$

Здесь дискретной последовательности y_{n-M} ставится в соответствие бинарная последовательность $s(y_{n-M}) = \text{sign}(0.5 - y_{n-M})$. Раскрывая скобки, получаем:

$$y_n = \beta y_{n-1} + r(1 - \beta)(1 - s(y_{n-M})) + 2r(1 - \beta)s(y_{n-M})y_{n-M}. \quad (7)$$

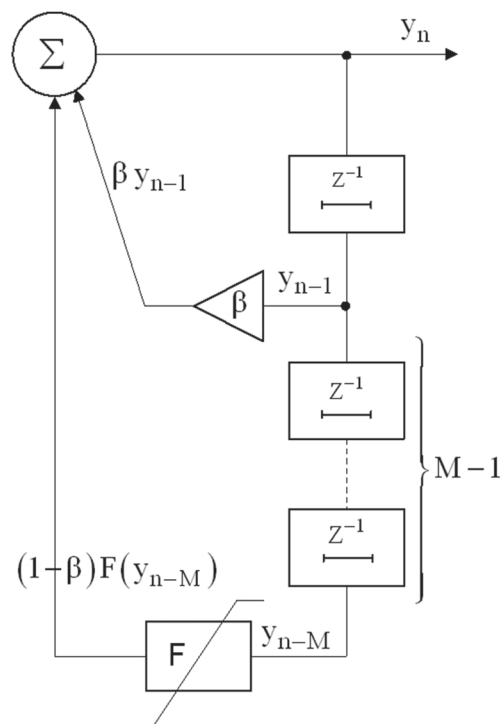


Рис. 2. Блок-схема рекурсивного алгоритма, соответствующего дискретному уравнению (4)

Уравнение (7) является дискретным аналогом дифференциально-разностного уравнения (1) и соответствует схеме алгоритма, приведенного на рис. 3.

Тожественность описания системы дискретным алгоритмом подтверждается прямыми численными расчетами. В случае непрерывного времени (рис. 4, а) решение дифференциально-разностного уравнения (1) получено методом шагов [15] с использованием метода Рунге–Кутты 4-го порядка (задавалась точность 10^{-5}). Для дискретного случая (рис. 4, б) производилось итерирование непосредственно по формуле (7). Представленные фрагменты реализаций в непрерывном и дискретном времени показывают полное соответствие между ними.

Формально выражение (7) может быть представлено в виде алгоритма рекурсивного цифрового фильтра порядка M , действие которого в общем виде задается разностным уравнением:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_L x_{n-L} + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots + b_M y_{n-M}. \quad (8)$$

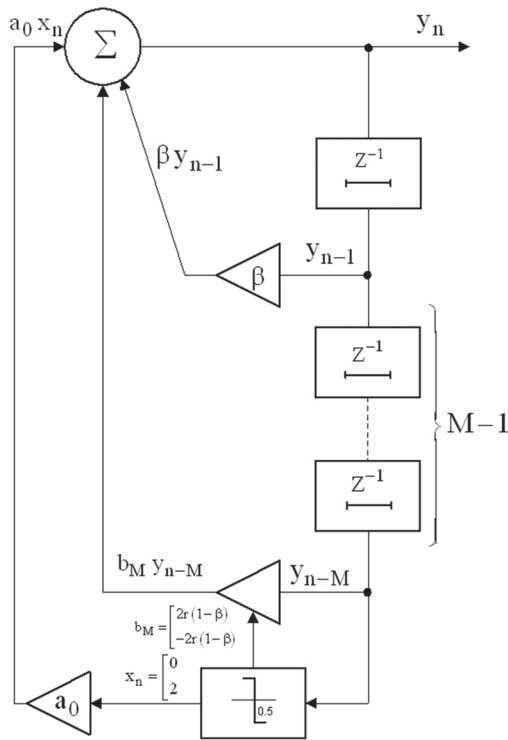


Рис. 3. Блок-схема рекурсивного алгоритма, в котором нелинейность задана в виде функции треугольного отображения

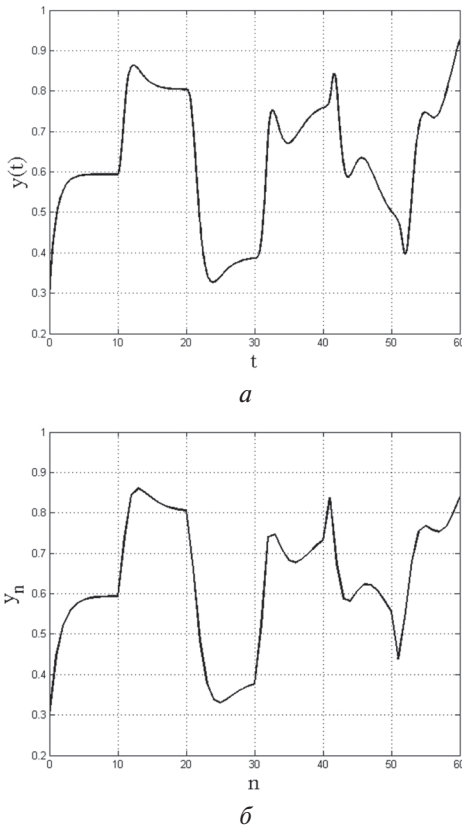


Рис. 4. Решение дифференциально-разностного уравнения, полученное методом шагов (а); фрагмент реализации, рассчитанной по формуле (7) – (б)

Предположим, что на вход такого фильтра действует бинарная последовательность $x_n = 1 - s(y_{n-M})$, а коэффициент передачи усилителя последнего звена нелинейно зависит от

величины поступающего на его вход отсчета: $b_M = 2r(1-\beta)s(y_{n-M})$ (рис. 3). Тогда уравнение (8) при выполнении условий $a_0 \neq 0, a_1 = a_2 = \dots = a_K = 0, b_1 \neq 0, b_M \neq 0, b_2 = b_3 = \dots = b_{M-1} = 0$ будет иметь вид:

$$y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1} + b_M y_{n-M}, \quad (9)$$

что совпадает с уравнением (7) при $a_0 = r(1-\beta), b_1 = \beta, b_M = 2r(1-\beta)s(y_{n-M})$.

Таким образом, динамика нелинейной системы, описываемой дифференциально-разностным уравнением (1), представленная в дискретном времени (4), аналогична процессам, происходящим в цифровом рекурсивном фильтре, алгоритм которого задается разностным уравнением (9) с переменным коэффициентом b_M при подаче на вход бинарной последовательности x_n . Следовательно, задача нахождения спектра мощности автоколебаний в исследуемой системе сводится к определению частотного коэффициента передачи такого фильтра.

Как известно, системная функция, описывающая частотные свойства рекурсивного цифрового фильтра с использованием аппарата z -преобразования, представляется следующим образом:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^L a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}}. \quad (10)$$

Выполнив подстановку $z = e^{j\omega\Delta}$ и раскрывая экспоненты по формуле Эйлера, получим аналитическое выражение для частотного коэффициента передачи:

$$K(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^L a_i (\cos(i\omega\Delta) - j \sin(i\omega\Delta))}{1 - \sum_{i=1}^M b_i (\cos(i\omega\Delta) + j \sin(i\omega\Delta))}. \quad (11)$$

Частота дискретизации аналогового сигнала и наивысшая частота в его спектре связаны по теореме Котельникова неравенством $\omega_{up} \leq \frac{\omega_\Delta}{2}$.

Поэтому, частотные характеристики дискретной системы необходимо рассматривать в полосе частот $\bar{\omega} \in \left[0; \frac{\omega_\Delta}{2}\right]$, которая является основной полосой для системы, обрабатывающей сигнал с частотой дискретизации $\omega_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$ [9].

Периодичность спектральной характеристики на частотах за пределами этого интервала связана с дискретностью процесса и не будет иметь место в системе с непрерывным временем. Следовательно, модуль комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ имеет вид:

$$|K(\omega)| = \sqrt{\frac{\left[a_0 + \sum_{i=1}^L a_i \cos(i\bar{\omega}) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^L a_i \sin(i\bar{\omega}) \right]^2}{\left[1 - \sum_{i=1}^M b_i \cos(i\bar{\omega}) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^M b_i \sin(i\bar{\omega}) \right]^2}}, \quad (12)$$

где $\bar{\omega} \in [0; \pi]$.

После подстановки соответствующих значений коэффициентов и проведения преобразований получим:

$$|K(\omega)| = \frac{a_0}{\sqrt{1 + b_1^2 + b_M^2 - 2b_1 \cos \omega - 2b_M \cos M\omega + 2b_1 b_M \cos(M-1)\omega}} \quad (13)$$

Таким образом, задача определения спектральных характеристик автоколебаний в нелинейной динамической системе с запаздывающей обратной связью кольцевого типа сведена к анализу выражения для частотного коэффициента передачи рекурсивного фильтра порядка M с изменяющимся во времени коэффициентом передачи последнего звена. Такой фильтр принадлежит к классу параметрических систем, т. е. линейных с переменными параметрами [16]. Порядок M фильтра соответствует величине временной задержки в кольце обратной связи.

Поскольку b_M является функцией выходного сигнала y_n , задержанного на M отсчетов дискретизации, который является хаотической последовательностью, для проведения строгого анализа необходимо рассматривать b_M как случайный процесс, статистические свойства которого определяются нелинейным преобразованием $b_M = \varphi(y_{n-M})$, где функция $\varphi(y_{n-M}) = 2r(1-\beta)s(y_{n-M})$ задает бинарную последовательность в соответствии со знаком величины $0.5 - y_{n-M}$.

Рассматривая (13) как нелинейное преобразование случайного процесса b_M и введя обозначения $b_M, |K(\omega, b_M)| = f(\xi), \xi = b_M$, найдем среднее значение \bar{f} :

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) p(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где $p(\xi)$ – одномерная плотность вероятности процесса ξ . Поскольку ξ представляет собой дискретную случайную величину, которая принимает фиксированные значения $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots\}$ с вероятностями $\{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots\}$, то $p(\xi) = \sum_i P_i \delta(\xi - \xi_i)$ [11].

Для бинарной последовательности имеем $p(\xi) = P_1 \delta(\xi - \xi_1) + P_2 \delta(\xi - \xi_2)$. Так как функция распределения процесса y_n в общем случае неизвестна, ограничимся рассмотрением случая, когда b_M является стационарным дискретным случайным процессом с нулевым средним значением и равновероятным законом распределения:

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi_2 = -\xi_1 = \xi_0. \quad \text{При этом получим:} \\ p(\xi) = \frac{1}{2}(\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi + \xi_0)). \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) с учетом фильтрующего свойства δ -функции дает:

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi + \xi_0) d\xi \right) = \frac{f(\xi_0) + f(-\xi_0)}{2}.$$

Результаты расчета полученной функциональной зависимости, описывающей спектральный состав автоколебаний в рассматриваемой системе с учетом выражения (13) для двух значений параметра ξ_0 , величина которого определяется соотношением T/τ , приведены на рис. 5.

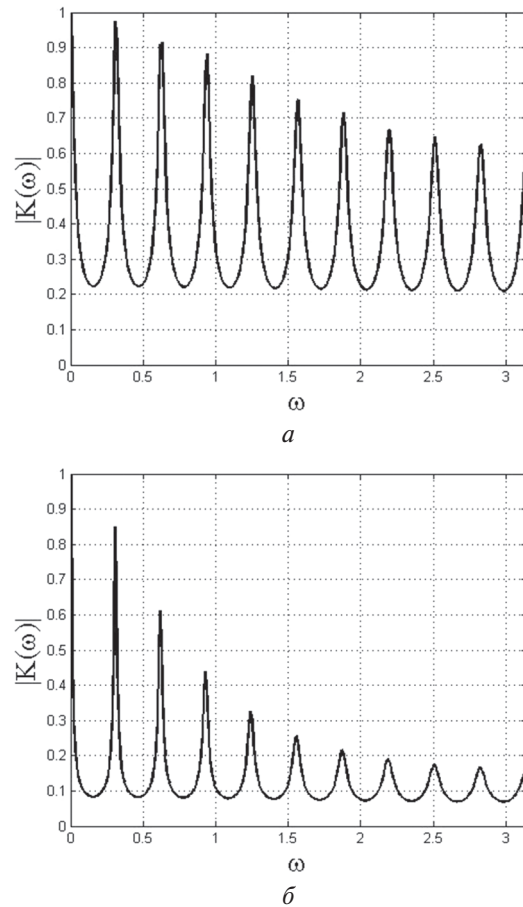


Рис. 5. Спектр мощности хаотических автоколебаний в системе с запаздывающей обратной связью и инерционным звеном, рассчитанный с использованием алгоритма рекурсивного фильтра при $T/\tau = 9,5 - a; T/\tau = 8,5 - б$

Как видно из графиков спектр мощности является сплошным и имеет характерный период, соответствующий времени запаздывания T . При этом наблюдается уменьшение амплитуд частотных составляющих с ростом частоты, что объясняется демпфирующим действием инерционного звена, входящего в систему. Скорость уменьшения амплитуд с ростом частоты обратно пропорциональна соотношению T/τ .

ВЫВОДЫ

Таким образом, получены оценки спектральных характеристик нелинейной динамической системы с запаздывающей обратной связью кольцевого типа при учете инерционных свойств элементов, входящих в систему. Дифференциально-разностное уравнение, описывающее хаотические автоколебания в такой системе, сведено к выражению для частотного коэффициента передачи рекурсивного фильтра с переменным параметром. Установлено, что спектр автоколебаний

имеет периодическую структуру с частотным периодом обратно пропорциональным времени запаздывания, при этом скорость уменьшения амплитуд спектральных составляющих с ростом частоты определяется отношением постоянной времени инерционного звена ко времени запаздывания в кольце обратной связи. Результаты работы могут быть использованы при создании источников широкополосных хаотических сигналов с заданными свойствами для шумовых радиолокаторов и телекоммуникационных систем.

В заключение автор выражает благодарность профессору К. А. Лукину за внимание к данной работе и поддержку на всех этапах ее выполнения.

Литература

- [1] Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. — 1982. — Т. 25, № 12. — С. 1410–1428.
- [2] Лукин К. А., Шестопалов В. П. Рассеяние электромагнитных волн на границе с нелинейным отражением // Х.: Ин-т радиофизики и электрон. АН УССР, 1985. — 15 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т радиофизики и электрон.; № 288).
- [3] Лукин К. А., Майстренко Ю. Л., Шарковский А. Н., Шестопалов В. П. Метод разностных уравнений в резонаторной задаче с нелинейным отражателем // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 2. — С. 327–331.
- [4] Ефимов Б. П., Лукин К. А., Ракитянский В. А. О трансформации спектра стохастических колебаний под действием отражений // ЖТФ. — 1988. — Т. 58, № 12. — С. 2398–2400.
- [5] Земляний О. В., Лукин К. А. Корреляционно-спектральные свойства хаоса в нелинейной динамической системе с запаздыванием и асимметричным нелинейным отображением // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. — Х., 2002. — Т. 7, № 2. — С. 406–414.
- [6] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука 1989. — 280 с.
- [7] Лукин К. А., Земляний О. В. Фрактальная размерность аттрактора динамической системы с запаздыванием и кусочно-линейным унимодальным отображением // Радиоэлектроника и информатика. — 2005. — № 3(32). — С. 8–15.
- [8] Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи — М.: Высш. шк., 1977. — 343 с.
- [9] Основы цифровой обработки сигналов. Курс лекций / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов и др. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 680 с.
- [10] Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. — М: Наука, 1964. — С. 134.
- [11] Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 1988. — 448 с.
- [12] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — С. 503–504.
- [13] Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол; пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 540 с.
- [14] Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман; пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
- [15] Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльс-гольц, С. Б. Норкин. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
- [16] Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей / В. С. Андреев. — М.: Радио и связь, 1982. — 280 с.



Поступила в редколлегию 26.06.2015

Земляний Олег Васильевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела нелинейной динамики электронных систем Института радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины. Научные интересы: динамический хаос в радиофизических системах, генераторы хаотических сигналов, шумовая радиолокация, системы связи с широкополосными сигналами.

УДК 537.862

Спектральні характеристики хаотических автоколебаний в нелинейной системе с запаздыванием и инерционным элементом / О. В. Земляний // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2015. — Том 14. — № 2. — С. 155–159.

Досліджено спектральні характеристики хаотических автоколебаний в нелинейной динамічній системі із запаздювальним зворотним зв'язком кільцевого типу для випадку, коли враховуються інерційні властивості елементів системи. Використано підхід, заснований на заміні нелінійної системи лінійною зі змінними в часі параметрами. Встановлено, що спектр автоколивань має періодичну структуру з частотним періодом, обернено пропорційним часу запазнення, при цьому швидкість зменшення амплітуд спектральних складових із зростанням частоти визначається відношенням постійної часу інерційної ланки до часу запазнення в кільці зворотного зв'язку.

Ключові слова: хаотичні коливання, нелінійна динамічна система, запаздювальний зворотний зв'язок, диференційно-різницева рівняння.

Л.: 5. Бібліогр.: 16 найм.

UDC 537.862

Spectral characteristics of chaotic self-excited oscillations in a nonlinear system with a delay and an inertial element / O. V. Zemlyaniy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. — 2015. — Vol. 14. — № 2. — P. 155–159.

The spectral characteristics of chaotic self-excited oscillations in a nonlinear dynamical system with a delayed feedback of ring type for the case when the inertial properties of the system elements are taken into account have been investigated. An approach based on the replacement of a nonlinear system by the linear one with time-varying parameters was used. It was found that the spectrum of self-excited oscillations has a periodic structure with a period of frequency which is inversely proportional to the delay time. The rate of decrease of the spectral components amplitude with the frequency increasing is determined by the ratio of the inertial element time constant to the time lag in the feedback loop.

Keywords: chaotic oscillations, nonlinear dynamical system, delayed feedback, differential-difference equation.

Fig.: 5. Ref.: 16 items.