

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ РЛС ОТ ШУМОВЫХ ПОМЕХ. 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В РЛС С ДВУХМЕРНОЙ ПЛОСКОЙ ФАР

В.П. РЯБУХА

Третья статья цикла статей по адаптивным системам защиты РЛС от маскирующих шумовых помех. Описывается математическая модель системы пространственной обработки сигналов на фоне аддитивной смеси собственного шума излучателей и внешних помех от точечных источников независимых шумовых излучений в РЛС с прямоугольной плоской ФАР, использующая математический аппарат кронекеровских произведений.

Ключевые слова: математическая модель, прямоугольная плоская ФАР, шумовые помехи, пространственная обработка, корреляционная матрица, кронекеровское произведение.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья – третья в цикле статей по теории и технике адаптивной обработки сигналов на фоне шумовых помех (ШП).

В первой статье [1] проанализированы корреляционные автокомпенсаторы помех на основе градиентных алгоритмов адаптации. Их быстродействие сильно зависит от степени сложности помеховой обстановки – числа, расположения и интенсивности источников внешних шумовых помех (разброса собственных чисел пространственной корреляционной матрицы (КМ) ШП), что приводит к большому времени установления переходных процессов, т.е. к необходимости использования большого объема обучающих выборок.

Во второй статье [2] рассмотрены более сложные и быстродействующие квазиньютоновские алгоритмы адаптации на основе оценок максимального правдоподобия пространственных КМ гауссовых шумовых помех общего вида, быстродействие которых не зависит от степени сложности помеховой обстановки. Здесь же рассмотрены их регуляризованные разновидности и обоснована целесообразность их практической реализации на основе адаптивных решетчатых фильтров.

Данная статья посвящена описанию разработанной математической модели системы пространственной обработки сигналов на фоне собственного шума излучателей и внешних помех от точечных источников независимых шумовых излучений в РЛС с прямоугольной (в частности, квадратной) плоской ФАР.

Отличительная особенность модели – существенное использование специфики ФАР, связанной с прямоугольной (квадратной) формой апертуры и эквидистантным расположением идентичных излучателей вдоль главных осей. Эта специфика позволяет представить входные воздействия и их преобразования в

каналах приема, используя хорошо известный математический аппарат кронекеровских произведений [3, 4]. Такое представление резко упрощает решение всех требующихся задач, поскольку позволяет заменить операции с векторами и матрицами большой размерности операциями с их кронекеровскими сомножителями, размерность которых обычно существенно меньше.

Статья организована следующим образом.

В п. 1 описывается обобщенная структура системы пространственной обработки сигналов, а в п. 2 вводятся аналитические соотношения для параметров, которые положены в основу математической модели.

1. ОБОБЩЕННАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В РЛС С ПЛОСКОЙ ФАР

А. Обобщенная структура системы пространственной обработки сигналов показана на рис. 1.

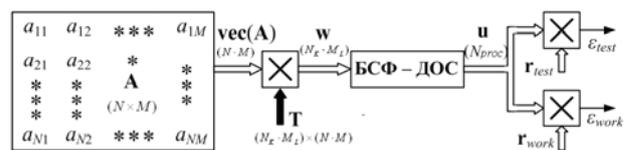


Рис. 1. Упрощенная модель системы пространственной обработки сигналов

Источником сигналов в модели служит прямоугольная $N \times M$ элементная (при $N = M$ – квадратная) плоская ФАР из идентичных слабонаправленных элементов, эквидистантно расположенных вдоль соответствующих осей декартовой системы координат. Она описывается исходной **матрицей** сигналов

$$A = (a_{pq})_{p=1, q=1}^{N, M} = [a_1 a_2 \dots a_M], \quad \dim A = N \times M \quad (1a)$$

индексы элементов, которой указывают положение (**нумерацию**) соответствующих **излучателей** в строках и столбцах ФАР, а сами элементы – комплексные

амплитуды **сигналов** в соответствующих излучателях, порожденные аддитивной смесью их собственных шумов, мешающих излучений внешних источников и, возможно, отраженным сигналом ожидаемой цели,

$$\mathbf{a}_i = (a_{pi})_{p=1}^N, \dim \mathbf{a}_i = N, i \in 1, M \quad (16)$$

– i -й столбец размерности $\dim \mathbf{a}_i = N$ **матрицы** \mathbf{A} (1a) сигналов излучателей.

Б. Элементы **матрицы** сигналов образуют исходный **вектор** сигналов

$$\mathbf{vec}(\mathbf{A}) = (\alpha_\ell)_{\ell=1}^{N \cdot M} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\dim \mathbf{vec}(\mathbf{A}) = N \cdot M,$$

полученный показанной "стыковкой" столбцов \mathbf{a}_i ($i \in 1, M$) матрицы \mathbf{A} (1a).

В. Излучатели ФАР "взвешиваются" и объединяются в $K \times L$ **модули** из смежных K элементов **столбцов** и L элементов **строк** ФАР. Число модулей

$$N \times M / (K \times L) = N_K \cdot M_L, \quad (3)$$

$$N_K = N / K, \quad M_L = M / L.$$

Эти операции преобразуют вектор сигналов **излучателей** (2) в вектор сигналов **модулей**

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}), \quad \dim \mathbf{w} = N_K \cdot M_L, \quad (4)$$

$$\dim \mathbf{T} = (N_K \cdot M_L) \times (N \cdot M).$$

Структура и свойства матрицы \mathbf{T} преобразования (4) и, тем самым, вектора \mathbf{w} , зависят от способа его формирования. В модели сравниваются два способа, схематически показанные на рис. 2.

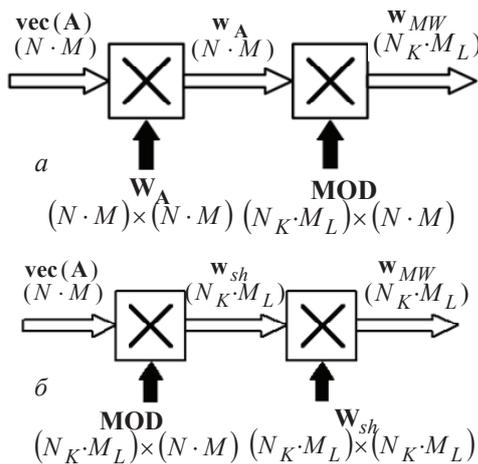


Рис. 2. Способы объединения излучателей в модули

В **первом** из них (рис. 2, *a*) модули формируются **после** взвешивание сигналов излучателей. В этом случае

$$\mathbf{T} = \mathbf{MOD} \cdot \mathbf{W}_A, \quad \dim \mathbf{W}_A = (N \cdot M) \times (N \cdot M), \quad (5)$$

где \mathbf{W}_A – диагональная матрица взвешивания исходного вектора (2), преобразующая его во **взвешенный** вектор

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{W}_A \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}), \quad \dim \mathbf{w}_A = N \cdot M. \quad (6)$$

Матрицей формирования модулей **MOD** он преобразуется далее в **вектор модулей взвешенных** сигналов

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{MW} = \mathbf{MOD} \cdot \mathbf{w}_A, \quad \dim \mathbf{w}_{MW} = N_K \cdot M_L, \quad (7)$$

$$\dim \mathbf{MOD} = (N_K \cdot M_L) \times (N \cdot M).$$

При **втором** способе (рис. 2, *б*) взвешиваются сигналы **предварительно сформированных** модулей. В этом случае

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}_{sh} \cdot \mathbf{MOD},$$

$$\dim \mathbf{W}_{sh} = (N_K \cdot M_L) \times (N_K \cdot M_L), \quad (8)$$

где та же матрица **MOD** вначале преобразует вектор (2) в вектор **модулей**

$$\mathbf{w}_{sh} = \mathbf{MOD} \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}), \quad \dim \mathbf{w}_{sh} = N_K \cdot M_L, \quad (9)$$

который затем преобразуется диагональной "укороченной" (*short*) матрицей взвешивания \mathbf{W}_{sh} во **взвешенный вектор модулей** сигналов

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{WM} = \mathbf{W}_{sh} \cdot \mathbf{w}_{sh}, \quad \dim \mathbf{w}_{WM} = N_K \cdot M_L, \quad (10)$$

$$\dim \mathbf{W}_{sh} = (N_K \cdot M_L) \times (N_K \cdot M_L).$$

Структуры и свойства приведенных матриц конкретизируются ниже.

Г. В модели рис. 1 полагается, что полосы пропускания трактов взвешивания и формирования модулей существенно превышают ширину спектра полезного сигнала. Они согласовываются в блоке согласованной фильтрации и диаграммообразования (**БСФ-ДОС**), подключенном к выходам $N_K \cdot M_L$ модулей (рис. 1). Модель предусматривает возможность анализа двух структур этого блока, показанных на рис. 3.

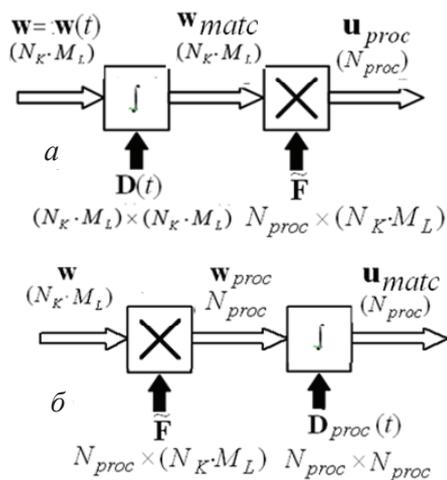


Рис. 3. Структуры блока БСФ-ДОС

В **первой** из них (рис. 3, *a*) согласующие (*matched*) фильтры с импульсными характеристиками (**ИХ**) $v_m(t)$ ($m \in 1, N_K \cdot M_L$), показанные символом « \int », включены на выходах каждого из модулей. В них выходной вектор сигналов модулей $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$, $\dim \mathbf{w}(t) = N_K \cdot M_L$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{w}_{matc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}(t - \tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\dim \mathbf{w}_{matc}(t) = N_K \cdot M_L,$$

где $\mathbf{D}(t) = \text{diag}(\mathbf{v}_m(t))_{m=1}^{N_K \cdot M_L}$ – диагональная матрица импульсных характеристик (**ИХ**) согласующих фильтров, а под интегралом от вектора понимается, как обычно, вектор интегралов от его элементов. В реальных условиях **неидентичных ИХ** диагональные элементы этой матрицы различны и одинаковы только при их равенстве $v_m(t) = v_0(t)$, $m \in 1, N_K \cdot M_L$.

Д. Вектор выходных сигналов (11) согласующих фильтров в диаграммообразующей схеме (**ДОС**) рис. 3, *а* преобразуется в N_{main} **обрабатываемых** (*processing*) векторов

$$\mathbf{u}_{proc_i} = \tilde{\mathbf{F}}_i \cdot \mathbf{w}_{matc}(t_0) = \begin{bmatrix} u_{main_i} \\ \mathbf{u}_{comp} \end{bmatrix},$$

$$u_{main_i} = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{w}_{matc}(t_0), \quad i \in 1, N_{main},$$

$$\mathbf{u}_{comp} = \mathbf{F}_{comp} \cdot \mathbf{w}_{matc}(t_0), \quad (12)$$

$$\dim \mathbf{u}_{proc_i} = N_{proc} = 1 + N_{comp}, \quad \dim \mathbf{u}_{comp} = N_{comp},$$

состоящих из сигнала u_{main_i} i -го ($i \in 1, N_{main}$) основного (защищаемого) канала и N_{comp} – мерного вектора \mathbf{u}_{comp} сигналов вспомогательных (компенсационных) каналов приема. В модели основными являются сигналы **суммарного** и двух **разностных** в ортогональных плоскостях каналов ($N_{main} = 3$), число **компенсационных** каналов в принципе может быть любым в диапазоне $N_{comp} \in 1, N_K \cdot M_L$. Матрицы импульсных характеристик **ДОС** имеют вид

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^* \\ \mathbf{F}_{comp} \end{bmatrix}, \quad \dim \mathbf{f}_i^* = N_K \cdot M_L, \quad \dim \mathbf{F}_{comp} = N_{comp} \times (N_K \cdot M_L), \quad (13)$$

$$i \in 1, N_{main},$$

где \mathbf{f}_i^* – **ИХ** (вектор-строка) формирователя i -го ($i \in 1, N_{main}$) основного канала, \mathbf{F}_{comp} – матрица преобразования выходных сигналов согласующих фильтров в сигналы компенсационных каналов. Ее n -я строка определяет структуру n -го ($n \in 1, N_{comp}$) компенсационного канала. В ней содержатся все нули и одна единица в m -й позиции, если канал состоит из одного m -го модуля, и $\ell > 1$ единиц (положительных и отрицательных), если в этом канале объединяются $\ell > 1$ модулей.

Во **втором** варианте блока **БСФ-ДОС** (рис. 3, *б*) порядок преобразований обратный. Здесь вначале вектор выходных сигналов модулей (4), (7),

(10) той же матрицей **ДОС** (13) преобразуется в "не-согласованный" **обрабатываемый** вектор

$$\mathbf{w}_{proc_i} = \tilde{\mathbf{F}}_i \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{main_i} \\ \mathbf{w}_{comp} \end{bmatrix}, \quad w_{main_i} = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_{comp} = \mathbf{F}_{comp} \cdot \mathbf{w}, \quad (14)$$

$$i \in 1, N_{main},$$

$\dim \mathbf{w}_{proc_i} = N_{proc} = 1 + N_{comp}$, $\dim \mathbf{w}_{comp} = N_{comp}$, который подобной (11) диагональной матрицей $\mathbf{D}(t) = \text{diag}(\mathbf{v}_m(t))_{m=1}^{N_{proc}}$ соответствующего размера преобразуется в "согласованные" **обрабатываемые** векторы

$$\mathbf{u}_{matc_i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_{proc}(\tau) \mathbf{w}_{proc_i}(t - \tau) d\tau,$$

$$\dim \mathbf{u}_{matc_i}(t) = N_{proc} = 1 + N_{comp}, \quad i \in 1, N_{main}, \quad (15)$$

$$\dim \mathbf{D}_{proc}(\tau) = N_{proc} \times N_{proc}.$$

Е. Все описанные преобразования исходного вектора (2) линейны и реализуются фильтрами (матрицами) с постоянными во времени параметрами. Поэтому в системе рис. 1 выполняется принцип суперпозиции, в силу которого входными для последующей **весовой** обработки являются **итоговые** векторы сигналов

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ \mathbf{u}_{comp} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{u}_{proc_i}, & \text{рис. 3, а,} \\ \mathbf{u}_{matc_i}, & \text{рис. 3, б,} \end{cases} \quad (16)$$

$$\dim \mathbf{u}_i = N_{proc} = 1 + N_{comp},$$

$$\dim \mathbf{u}_{comp} = N_{comp}, \quad i \in 1, N_{main},$$

представляющие собой сумму векторов

$$\begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ \mathbf{u}_{comp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{(i)} \\ \mathbf{n}_{comp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(i)} \\ \mathbf{y}_{comp} \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} s_1^{(i)} \\ \mathbf{s}_{comp} \end{bmatrix},$$

$$i \in 1, N_{main}, \quad (17)$$

$$\dim \mathbf{n}_{comp} = \dim \mathbf{y}_{comp} = \dim \mathbf{s}_{comp} = N_{comp},$$

собственного шума излучателей $\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} n_1^{(i)} \\ \mathbf{n}_{comp} \end{bmatrix}$, мешающих излучений внешних источников

$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_1^{(i)} \\ \mathbf{y}_{comp} \end{bmatrix}$ и (при $\gamma = 1$) полезного сигнала

$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_1^{(i)} \\ \mathbf{s}_{comp} \end{bmatrix}$. Эти векторы полагаются взаимно неза-

висимыми комплексными нормальными векторами с нулевыми средними значениями. Их статистические свойства полностью определяются соответствующими корреляционными матрицами (**КМ**)

$$\Phi_{\mathbf{n}_i} = \overline{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i^*} = \begin{bmatrix} \Phi_{n11}^{(i)} & \Phi_{\mathbf{n}_i}^* \\ \Phi_{\mathbf{n}_i} & \Phi_{\mathbf{n}_{comp}} \end{bmatrix}, \quad (18a)$$

$$\Phi_{\mathbf{y}_i} = \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^*} = \begin{bmatrix} \Phi_{y11}^{(i)} & \Phi_{\mathbf{y}_i}^* \\ \Phi_{\mathbf{y}_i} & \Phi_{\mathbf{y}_{comp}} \end{bmatrix}, \quad (18б)$$

$$\Phi_{s_i} = \overline{s_i \cdot s_i^*} = \begin{bmatrix} \Phi_{s_{11}}^{(i)} & \Phi_{s_i}^* \\ \Phi_{s_i} & \Phi_{s_{comp}} \end{bmatrix}, \quad (18B)$$

$$\dim \Phi_{n_i} = \dim \Phi_{y_i} = \dim \Phi_{s_i} = N_{comp}, \quad i \in 1, N_{main},$$

$$\dim \Phi_{n_i} = \dim \Phi_{y_i} = \dim \Phi_{s_i} = N_{proc} \times N_{proc}.$$

Здесь и далее черта сверху и звездочка (*) – символы **статистического** усреднения и **эрмитового** сопряжения (транспонирования и комплексного сопряжения) соответственно:

$$\Phi_{n_{11}}^{(i)} = \overline{|n_1^{(i)}|^2}, \quad \Phi_{y_{11}}^{(i)} = \overline{|y_1^{(i)}|^2}, \quad \Phi_{s_{11}}^{(i)} = \overline{|s_1^{(i)}|^2}, \quad (19)$$

$$i \in 1, N_{main}$$

– первые диагональные элементы **КМ** Φ_{n_i} , Φ_{y_i} и Φ_{s_i} , имеющие смысл дисперсии (**мощности**) собственного шума, внешней помехи и полезного сигнала соответственно в i -м основном канале приема,

$$\Phi_{n_i} = \overline{\mathbf{n}_{comp} \cdot n_1^{(i)*}}, \quad \Phi_{y_i} = \overline{\mathbf{y}_{comp} \cdot y_1^{(i)*}}, \quad (20)$$

$$\Phi_{s_i} = \overline{\mathbf{s}_{comp} \cdot s_1^{(i)*}}$$

– вектор-столбцы корреляционных моментов соответствующих процессов i -го основного и N_{comp} компенсационных каналов,

$$\Phi_{n_{comp}} = \overline{\mathbf{n}_{comp} \cdot \mathbf{n}_{comp}^*}, \quad \Phi_{y_{comp}} = \overline{\mathbf{y}_{comp} \cdot \mathbf{y}_{comp}^*},$$

$$\Phi_{s_{comp}} = \overline{\mathbf{s}_{comp} \cdot \mathbf{s}_{comp}^*}, \quad (21)$$

$\dim \Phi_{n_{comp}} = \dim \Phi_{y_{comp}} = \dim \Phi_{s_{comp}} = N_{comp} \times N_{comp}$
– **КМ** соответствующих процессов в компенсационных каналах, одинаковые при любых $i \in 1, N_{main}$.

Ж. При последующей обработке в фильтрах с **ИХ** (**векторами весов**)

$$\mathbf{r}_{test} = \begin{bmatrix} r_{1test} \\ \mathbf{r}_{testcomp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{work} = \begin{bmatrix} r_{1work} \\ \mathbf{r}_{workcomp} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\dim \mathbf{r}_{test} = \dim \mathbf{r}_{work} = N_{proc} = 1 + N_{comp},$$

$$\dim \mathbf{r}_{testcomp} = \dim \mathbf{r}_{workcomp} = N_{comp}$$

формируются весовые суммы (скалярные произведения)

$$\varepsilon_{test_i} = \mathbf{r}_{test}^* \cdot \mathbf{u}_i, \quad \varepsilon_{work_i} = \mathbf{r}_{work}^* \cdot \mathbf{u}_i, \quad i \in 1, N_{main} \quad (23)$$

элементов вектора сигналов (17), (18) с элементами вектора весов.

Фильтр с "рабочим" (*work*) вектором весов \mathbf{r}_{work} сравнивается с фильтром с "тестовым" вектором весов \mathbf{r}_{test} . Основным **показателем качества** обработки служит относительный уровень отношения сигнал/(помеха + шум) (**ОСПШ**)

$$k_{\mu_i} = \frac{\mu_i(\mathbf{r}_{work})}{\mu_i(\mathbf{r}_{test})}, \quad (24a)$$

где

$$\mu_i(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{s_i}^2(\mathbf{r})}{\sigma_{int_i}^2(\mathbf{r})} = \frac{|\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{s}_i|^2}{|\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{u}_{int_i}|^2} = \frac{\mathbf{r}^* \cdot \Phi_{s_i} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{r}^* \cdot \Phi_{int_i} \cdot \mathbf{r}}, \quad (24b)$$

$$\mathbf{u}_{int_i} = \mathbf{n}_i + \mathbf{y}_i,$$

$$\Phi_{int_i} = \Phi_{n_i} + \Phi_{y_i},$$

$$i \in 1, N_{main}.$$

Здесь $\mu_i(\mathbf{r})$, $\sigma_{s_i}^2(\mathbf{r})$ и $\sigma_{int_i}^2(\mathbf{r})$ – **ОСПШ**, мощность сигнала \mathbf{s}_i и **совокупной** помехи $\mathbf{u}_{int_i} = \mathbf{n}_i + \mathbf{y}_i$ на **выходе** фильтра с **ИХ** \mathbf{r} .

Выбор такого критерия обусловлен тем, что в рассматриваемой ситуации **гауссовых** входных воздействий энергетическое **ОСПШ** полностью определяет и статистические характеристики обнаружения сигнала [5].

Значение k_{μ_i} (часто именуемое коэффициентом подпомеховой видимости (**КПВ**)) можно представить в виде произведения

$$k_{\mu_i} = k_{s_i} \cdot k_{int_i}, \quad i \in 1, N_{main} \quad (25)$$

коэффициента **прохождения** полезного сигнала

$$k_{s_i} = \frac{\sigma_{s_i}^2(\mathbf{r}_{work})}{\sigma_{s_i}^2(\mathbf{r}_{test})} = \frac{|\mathbf{r}_{work}^* \cdot \mathbf{s}_i|^2}{|\mathbf{r}_{test}^* \cdot \mathbf{s}_i|^2} = \frac{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{s_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}{\mathbf{r}_{test}^* \cdot \Phi_{s_i} \cdot \mathbf{r}_{test}} \quad (26)$$

на коэффициент **подавления** совокупной помехи

$$k_{int_i} = \frac{\sigma_{int_i}^2(\mathbf{r}_{test})}{\sigma_{int_i}^2(\mathbf{r}_{work})} = \frac{|\mathbf{r}_{test}^* \cdot \mathbf{u}_{int_i}|^2}{|\mathbf{r}_{work}^* \cdot \mathbf{u}_{int_i}|^2} =$$

$$= \frac{\mathbf{r}_{test}^* \cdot \Phi_{int_i} \cdot \mathbf{r}_{test}}{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{int_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}. \quad (27)$$

В ряде случаев анализируется также коэффициент **прохождения** шума

$$k_{n_i} = \frac{\sigma_{n_i}^2(\mathbf{r}_{work})}{\sigma_{n_i}^2(\mathbf{r}_{test})} = \frac{|\mathbf{r}_{work}^* \cdot \mathbf{u}_{n_i}|^2}{|\mathbf{r}_{test}^* \cdot \mathbf{u}_{n_i}|^2} =$$

$$= \frac{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{n_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}{\mathbf{r}_{test}^* \cdot \Phi_{n_i} \cdot \mathbf{r}_{test}}. \quad (28)$$

Обратим внимание, что замена весовых векторов \mathbf{r}_{test} и \mathbf{r}_{work} на коллинеарные им векторы $c_{test} \cdot \mathbf{r}_{test}$ и $c_{work} \cdot \mathbf{r}_{work}$ не меняет основной критерий (24), но меняет частные критерии (26) – (28). Поэтому сравнивать "тестовую" и "рабочую" системы по этим критериям можно только при указании дополнительной информации об использованных коэффициентах пропорциональности $c_{test} \neq 0$ и $c_{work} \neq 0$, выбор которых можно подчинить тем или иным требованиям. Так, их можно выбирать из условия равенства

$$c_{test}^2 \cdot \mathbf{r}_{test}^* \cdot \mathbf{r}_{test} = c_{work}^2 \cdot \mathbf{r}_{work}^* \cdot \mathbf{r}_{work} \quad (29)$$

норм (квадратов длин) весовых векторов сравниваемых систем обработки. В случае выделенных основных (первых) каналов приема для коэффициента пропорциональности c_{work} более естественно условие

$$c_{work} = \frac{c_{test} \cdot r_{test}}{r_{work}}, \quad (30)$$

"выравнивающее" первые компоненты тестового и рабочего весовых векторов, с которыми в весовые суммы (23) входят сигналы основного канала.

3. В большинстве случаев используется тестовый вектор вида

$$\mathbf{r}_{test} = \mathbf{e}_1^{(N_{proc})} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad c_{test} \cdot r_{test} = 1, \quad (31)$$

$$\dim \mathbf{r}_{test} = N_{proc} = 1 + N_{comp},$$

$$\dim \mathbf{0} = N_{comp},$$

где $\mathbf{e}_\ell^{(T)}$ – ℓ -й ($\ell \in 1, T$) столбец единичной $T \times T$ матрицы \mathbf{I}_T (T – мерный вектор с единственным ненулевым элементом, равным 1, в ℓ -й позиции).

В этом случае

$$\mu_i(\mathbf{r}_{test}) = \frac{\varphi_{s11}^{(i)}}{\varphi_{int_{i11}}^{(i)}},$$

$$k_{\mu_i} = \mu_i(\mathbf{r}_{work}) \cdot \frac{\varphi_{int_{i11}}^{(i)}}{\varphi_{s11}^{(i)}} = k_{s_i} \cdot k_{int_i}, \quad (32)$$

$$\varphi_{int_{i11}}^{(i)} = \varphi_{n11}^{(i)} + \varphi_{y11}^{(i)},$$

$$i \in 1, N_{main},$$

а для коэффициентов **прохождения полезного сигнала** и подавления **совокупной помехи** при выполнении условия (30) справедливы равенства

$$k_{s_i} = \frac{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{s_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}{|\mathbf{r}_{work}|^2 \cdot \varphi_{s11}^{(i)}},$$

$$k_{int_i} = \frac{|\mathbf{r}_{work}|^2 \cdot \varphi_{int_{i11}}^{(i)}}{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{int_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}, \quad (33)$$

$$\Phi_{int_i} = \Phi_{n_i} + \Phi_{y_i},$$

$$i \in 1, N_{main}.$$

Коэффициент **прохождения собственного шума** в этом случае равен

$$k_{n_i} = \frac{\mathbf{r}_{work}^* \cdot \Phi_{n_i} \cdot \mathbf{r}_{work}}{|\mathbf{r}_{work}|^2 \cdot \varphi_{n11}^{(i)}}, \quad i \in 1, N_{main}. \quad (34)$$

В роли "рабочего" рассматриваются различные векторы \mathbf{r}_{work} . В типичных условиях априорной неизвестности КМ основное практическое значение имеют "адаптивные" весовые векторы $\hat{\mathbf{r}}_{work}(K)$.

2. ТРАНСФОРМАЦИЯ СИГНАЛОВ И ИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРИЕМНЫХ ТРАКТАХ РЛС С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ФАР

Показатели качества весовой обработки **гауссовых** сигналов на фоне **гауссовых** помех при заданных

(выбранных) весовых векторах определяются корреляционными матрицами (18) входных воздействий. Эти КМ зависят от целого ряда факторов, обусловленных спецификой ФАР и анализируемой системы обработки (рис. 1). В процессе предусматриваемых в ней преобразований КМ исходного вектора $\text{vec}(\mathbf{A})$ (2), зависящая от сигнально-помеховой обстановки (числа, расположения и интенсивности излучений внешних источников, направления поиска и уровня отраженного сигнала цели), числа, расположения и характеристик излучателей ФАР, последовательно трансформируется в блоках взвешивания и формирования модулей (рис. 2) и блоках согласованной фильтрации и диаграммообразования (рис. 3). Изменения их структур и (или) параметров изменяют итоговую КМ (18) и, тем самым, эффективность системы пространственной обработки в целом. Уровень порождаемых ими потерь определяет их допустимость, поэтому оценка этих потерь играет определяющую роль для обоснованного выбора структуры и параметров системы обработки.

В случае "большой" двумерной плоской ФАР (с большим числом излучателей) решить эту задачу стандартными методами достаточно сложно. Она существенно упрощается при учете специфики ФАР, связанной с эквидистантным расположением излучателей вдоль главных осей и строчно-столбцовым управлением амплитудно-фазовым распределением (АФР) в ней.

Ниже определяются характер и степень трансформации шумовой, помеховой и сигнальной составляющих исходной КМ входных воздействий в процессе преобразований в блоках взвешивания и формирования модулей (рис. 2) и блоках согласованной фильтрации и диаграммообразования (рис. 3) с различными структурой и параметрами.

2.1 Исходные сигналы и КМ шумов, излучений внешних источников и отражений от точечной цели

А. Начнем с **собственных шумов** (*noise*) излучателей ФАР, для которых элементы исходной **матрицы** сигналов (1а) могут полагаться случайными гауссовыми (нормальными) взаимно независимыми комплексными величинами с нулевыми средними и с одинаковыми (принятыми за **единицу**) дисперсиями:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n(t) = (\xi_{pq}(t))_{p=1, q=1}^{N, M} = [\xi_1(t) \quad \xi_2(t) \quad \dots \quad \xi_M(t)],$$

$$\xi_{pq}(t) \sim CN(0, 1),$$

$$\xi_{pq}(t) \cdot \xi_{\nu\mu}^*(s) = \delta(p - \nu) \cdot \delta(q - \mu) \cdot \delta(t - s),$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (35)$$

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = (\alpha_\ell)_{\ell=1}^{N \cdot M} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix},$$

$$\dim \text{vec}(\mathbf{A}) = N \cdot M.$$

Исходный вектор шумов излучателей (2) в этом случае равен

$$\mathbf{vec}(\mathbf{A}_n(t)) = \left(a_\ell^{(n)}(t) \right)_{\ell=1}^{N \cdot M} = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_M(t) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\dim \mathbf{vec}(\mathbf{A}_n(t)) = N \cdot M,$$

а его (пространственно-временная) КМ

$$\Phi_n(t, s) = \overline{\mathbf{vec}(\mathbf{A}_n(t)) \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}_n(s))^*} = \Phi_n \cdot \delta(t-s)$$

$$\Phi_n = 1_{N \cdot M}, \quad \dim \Phi_n = (N \cdot M) \times (N \cdot M), \quad (37)$$

где \mathbf{I}_T – единичная $T \times T$ матрица, описывающая пространственную составляющую $\Phi_{\mathbf{A}_n}$ общей КМ шумов излучателей в произвольный момент времени.

Формула (37) отражает равенство дисперсий (мощности) и полную (пространственно-временную) некоррелированность собственных шумов различных излучателей ФАР.

Б. Определим теперь исходную матрицу (1а)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_y(\ell, t) = \left(y_{pq}(\ell, t) \right)_{p=1, q=1}^{N \cdot M} =$$

$$= \left[\mathbf{y}_1(\ell, t) \quad \mathbf{y}_2(\ell, t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_M(\ell, t) \right], \quad \ell \in 1, N_{\text{int}}, \quad (38a)$$

шумовых излучений от ℓ -го точечного источника, действующего с направления $\theta_\ell(t) = (\beta_\ell(t), \varepsilon_\ell(t))$, где $\beta_\ell(t)$ и $\varepsilon_\ell(t)$ ($\ell \in 1, N_{\text{int}}$) – его азимут и угол места.

Элементами матрицы (38а) в этом случае выступают комбинации

$$y_{pq}(\ell, t) = \left| y_{pq}(\ell, t) \right| \cdot \exp \left\{ j \cdot \varphi_{y_{pq}}(\ell, t) \right\}, \quad (38б)$$

$$\varphi_{y_{pq}}(\ell, t) = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta_{pq}(\theta_\ell, t)$$

амплитуды $\left| y_{pq}(\ell, t) \right|$ и фазы $\varphi_{y_{pq}}(\ell, t)$ поля ℓ -го источника в точке расположения "pq - излучателя" ФАР.

Для одинаковых излучателей для любых $p \in 1, N$ и $q \in 1, M$ амплитуда

$$\left| y_{pq}(\ell, t) \right| = \left(\sqrt{\cos \varepsilon_\ell(t) \cdot \cos \beta_\ell(t)} \right) \cdot \left(\sqrt{h_\ell(t)} \cdot \xi_\ell \right) \quad (39a)$$

$$\xi_\ell \sim N(0, 1),$$

где первый множитель в скобках равен значению нормированной диаграммы направленности (ДН) излучателя в направлении $\theta_\ell(t) = (\beta_\ell(t), \varepsilon_\ell(t))$ на ℓ -й источник [6], а второй – случайной комплексной амплитуде его излучения с относительной (по отношению к мощности шума излучателей) мощностью h_ℓ . Равенство амплитуды (39) во всех излучателях (при

всех $p \in 1, N$ и $q \in 1, M$) обусловлено "узкополосностью" рассматриваемой ФАР.

Фаза $\varphi_{y_{pq}}(\ell, t)$ излучения на несущей с длиной волны λ в произвольный момент времени t определяется разностью хода $\Delta = \mathbf{r}_T - \mathbf{r}$ плоской волны от источника до фазового центра ФАР и от источника до "pq - излучателя".

Можно показать, что эта разность хода равна

$$\Delta_{pq}(\theta_\ell, t) = y_p \cdot \sin \varepsilon_\ell(t) + x_q \cdot \cos \varepsilon_\ell(t) \cdot \sin \beta_\ell(t), \quad (39б)$$

где $y_p = \left(\frac{N+1}{2} - p \right) \cdot d$, $x_q = \left(\frac{M+1}{2} - q \right) \cdot d$ – расстояния "pq - излучателя" от горизонтальной и вертикальной осей, проходящих через центр ФАР, d – расстояние между смежными излучателями по этим осям.

Подставляя последние равенства в (38б) и учитывая (39), получим

$$y_{pq}(\ell, t) =$$

$$= am(\ell, t) \cdot \exp \left\{ j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t)) \cdot p \right\} \cdot \exp \left\{ j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t), \beta_\ell(t)) \cdot q \right\},$$

$$am(\ell, t) = \left| y_{pq}(\ell, t) \right| \cdot e1(\ell, t) \cdot e2(\ell, t),$$

$$e1(\ell, t) = \exp \left\{ -j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t)) \cdot \frac{N+1}{2} \right\}, \quad (40)$$

$$e2(\ell, t) = \exp \left\{ -j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t), \beta_\ell(t)) \cdot \frac{M+1}{2} \right\},$$

что в сочетании с (39) позволяет записать исходную матрицу (38а) в виде

$$\mathbf{A}_y(\ell, t) = \left[\mathbf{y}_1(\ell, t) \quad \mathbf{y}_2(\ell, t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_M(\ell, t) \right] =$$

$$= am(\ell, t) \cdot \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) \cdot \mathbf{g}_M^*(\theta_\ell(t)),$$

$$\mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) = \left(\mathbf{g}_p^{(N)}(t) \right)_{p=1}^N = \left(e^{j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t)) \cdot p} \right)_{p=1}^N, \quad (41)$$

$$\mathbf{g}_M(\theta_\ell(t)) = \left(\mathbf{g}_q^{(M)}(t) \right)_{q=1}^M = \left(e^{-j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell(t), \beta_\ell(t)) \cdot q} \right)_{q=1}^M,$$

$$\dim \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) = N, \quad \dim \mathbf{g}_M(\theta_\ell(t)) = M,$$

$$\gamma(\varepsilon_\ell(t)) = \alpha \cdot \sin \varepsilon_\ell(t),$$

$$\gamma(\varepsilon_\ell(t), \beta_\ell(t)) = \alpha \cdot \cos \varepsilon_\ell(t) \cdot \sin \beta_\ell(t), \quad \alpha = 2 \cdot \pi \cdot d / \lambda.$$

Здесь скалярный множитель

$$am(\ell, t) =$$

$$= \sqrt{\cos \varepsilon_\ell(t) \cdot \cos \beta_\ell(t) \cdot h_\ell(t)} \cdot e1(\ell, t) \cdot e2(\ell, t) \cdot \xi_\ell \quad (42)$$

имеет очевидный смысл случайной комплексной амплитуды излучения ℓ -го источника, одинаковой для всех излучателей узкополосной ФАР, а векторы $\mathbf{g}_N(\theta_\ell(t))$ и $\mathbf{g}_M(\theta_\ell(t))$ определяют фазовое распределение поля этого источника по излучателям столбцов и строк ФАР соответственно. Такая факторизация фазового распределения обусловлена спецификой анализируемой ФАР, связанной с эквидистантностью расположения излучателей в ее столбцах и строках.

В условиях (41) исходный вектор (2) допускает представление

$$\mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(\ell, t)) = am(\ell, t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^{*(M)}(t) \cdot \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) \\ \mathbf{g}_2^{*(M)}(t) \cdot \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_M^{*(M)}(t) \cdot \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)) \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\dim \mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(\ell, t)) = N \cdot M,$$

и, следовательно, может быть экономно записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(\ell, t)) &= am(\ell, t) \cdot \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell(t)), \\ \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell(t)) &= \tilde{\mathbf{g}}_M(\theta_\ell(t)) \otimes \mathbf{g}_N(\theta_\ell(t)), \\ \dim \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell(t)) &= N \cdot M, \end{aligned} \quad (44)$$

где (\sim) и \otimes – символы комплексного сопряжения и **кронекеровского перемножения** (произведения) [3, 4] соответственно.

Пространственно-временная **КМ** этого вектора в силу (39), (40) равна

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{A}_y \ell}(t, s) &= \overline{\mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(\ell, t)) \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(\ell, s))^*} = \\ &= \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell(t)) \cdot \overline{am(\ell, t) \cdot am(\ell, s)^*} \cdot \mathbf{g}_{N \cdot M}^*(\theta_\ell(s)) = \\ &= \Phi_{\mathbf{A}_y \ell} \cdot \delta(t - s), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{A}_y \ell} &= \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell) \cdot \mathbf{g}_{N \cdot M}^*(\theta_\ell) \cdot \cos \varepsilon_\ell \cdot \cos \beta_\ell \cdot h_\ell, \\ \dim \Phi_{\mathbf{A}_y \ell} &= (N \cdot M) \times (N \cdot M), \end{aligned}$$

где через $\Phi_{\mathbf{A}_y \ell}$ обозначена пространственная составляющая общей **КМ** излучений ℓ -го точечного источника в произвольный момент времени. Подобная (37) временная некоррелированность (δ – коррелированность) векторов (43) обусловлена шумовым характером излучения этого источника, а их жесткая пространственная корреляция в различных элементах ФАР – его "точечностью" по угловым координатам. Математическим следствием этого является равенство единице **ранга** пространственной составляющей $\Phi_{\mathbf{A}_y \ell}$ общей **КМ** (45).

В. Вектор сигналов совокупности $N_{\text{int}} > 1$ внешних шумовых источников образован аддитивной смесью их излучений и поэтому в силу (43) равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(t)) &= \sum_{\ell=1}^{N_{\text{int}}} am(\ell, t) \cdot \mathbf{g}_{N \cdot M}(\theta_\ell(t)) = \\ &= \mathbf{G}_{N \cdot M}(t) \cdot \mathbf{am}(t), \\ \mathbf{G}_{N \cdot M}(t) &= \left[\mathbf{g}_{NM}(\theta_1(t)) \mathbf{g}_{NM}(\theta_2(t)) \dots \mathbf{g}_{NM}(\theta_{N_{\text{int}}}(t)) \right] = \\ &= (\mathbf{g}_{NM}(\theta_\ell(t)))_{\ell=1}^{N_{\text{int}}}, \end{aligned} \quad (46a)$$

где $N_{\text{int}} > 1$ – мерный вектор-столбец комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \mathbf{am}(t) &= [am(1, t) \ am(2, t) \dots am(N_{\text{int}}, t)] = \\ &= [am(t, \ell)]_{\ell=1}^{N_{\text{int}}}, \end{aligned} \quad (46b)$$

$$\dim \mathbf{G}_{N \cdot M}(t) = (N \cdot M) \times N_{\text{int}}, \quad \dim \mathbf{am}(t) = N_{\text{int}}.$$

Его пространственно-временная **КМ**

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{A}_y}(t, s) &= \overline{\mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(t)) \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}_y(s))^*} = \Phi_{\mathbf{A}_y} \cdot \delta(t - s), \\ \Phi_{\mathbf{A}_y} &= \mathbf{G}_{N \cdot M} \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{G}_{N \cdot M}^*, \end{aligned} \quad (47a)$$

$$\dim \Phi_{\mathbf{A}_y} = (N \cdot M) \times (N \cdot M), \quad \dim \mathbf{G}_{N \cdot M} = (N \cdot M) \times N_{\text{int}}$$

также допускает представление в виде произведения пространственной $\Phi_{\mathbf{A}_y}$ и временной $\delta(t - s)$ составляющих. В первой из них

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= (h_{\ell m})_{\ell, m=1}^{N_{\text{int}}} = \overline{\mathbf{am} \cdot \mathbf{am}^*}, \quad \dim \mathbf{h} = N_{\text{int}} \times N_{\text{int}}, \\ h_{\ell m} &= \sqrt{\cos \varepsilon_\ell \cdot \cos \beta_\ell} \cdot \sqrt{h_\ell} \cdot \xi_\ell \cdot \xi_m^* \cdot \sqrt{h_m} \cdot \sqrt{\cos \varepsilon_m \cdot \cos \beta_m} \end{aligned} \quad (47b)$$

– пространственная взаимная **КМ** излучений **внешних** источников. В рассматриваемых далее ситуациях шумовые гауссовы излучения различных источников полагаются независимыми (некоррелированными), так что $\xi_\ell \cdot \xi_m^* = \delta(\ell - m)$. В этих условиях их взаимная **КМ**

$$\mathbf{h} = \text{diag}(\cos \varepsilon_\ell \cdot \cos \beta_\ell \cdot h_\ell)_{\ell=1}^{N_{\text{int}}}, \quad \dim \mathbf{h} = N_{\text{int}} \times N_{\text{int}}$$

представляет собой диагональную $N_{\text{int}} \times N_{\text{int}}$ матрицу **ранга** N_{int} , определяющего и **ранг** пространственной **КМ** $\Phi_{\mathbf{A}_y}$ (47a) в целом.

Г. Перейдем к отраженному сигналу **точечной** цели. Его пространственная структура совпадает с пространственной структурой излучения **точечного** источника, но временная определяется формой $s(t)$ зондирующего сигнала. В рассматриваемой узкополосной ФАР, в которой можно считать эту форму одинаковой в каждом излучателе, для исходного вектора отраженного сигнала точечной цели с направления $\theta_s = (\beta_s, \varepsilon_s)$ по аналогии с (43), (44) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{vec}(\mathbf{A}_s(t)) &= s(t) \cdot \mathbf{g}_{NM}(\theta_s) \cdot am_s, \\ \mathbf{g}_{NM}(\theta_s) &= \tilde{\mathbf{g}}_M(\theta_s) \otimes \mathbf{g}_N(\theta_s), \\ \Phi_{\mathbf{A}_s}(t, s) &= \overline{\mathbf{vec}(\mathbf{A}_s(t)) \cdot \mathbf{vec}(\mathbf{A}_s(s))^*} = \\ &= \cos \varepsilon_s \cdot \cos \beta_s \cdot h_s \cdot \mathbf{g}_{NM}(\theta_s) \cdot \mathbf{g}_{NM}^*(\theta_s) \cdot \rho_s(t - s), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\rho_s(\tau) = \overline{s(t) \cdot s^*(t - \tau)}$ – корреляционная функция зондирующего сигнала.

При рассматриваемой далее цифровой обработке интервал между отсчетами входных процессов не меньше их временного интервала корреляции. Это позволяет считать, что $\rho_s(\tau) = s(t) \cdot s^*(t - \tau) \approx \delta(\tau)$. При таком допущении

$$\Phi_{A_s}(t, s) = \text{vec}(A_s(t)) \cdot \text{vec}(A_s(s))^* = \Phi_{A_s} \cdot \delta(t - s),$$

$$\Phi_{A_s} = \cos \varepsilon_s \cdot \cos \beta_s \cdot h_s \cdot \mathbf{g}_{NM}(\theta_s) \cdot \mathbf{g}_{NM}^*(\theta_s), \quad (49)$$

$$\dim \Phi_{A_s} = (N \cdot M) \times (N \cdot M),$$

где Φ_{A_s} – пространственная составляющая ранга 1 КМ сигнала точечной цели.

В практически важном частном случае поиска цели в направлении **нормали** к плоскости ФАР, когда $\beta_s = \varepsilon_s = 0$, $\gamma(\varepsilon_s) = \gamma(\varepsilon_\ell, \beta_\ell) = 0$, $am_s = \sqrt{h_s} \cdot \xi_s$,

$$\mathbf{G}_M(\theta_s) = \mathbf{E}_M, \quad \mathbf{G}_N(\theta_s) = \mathbf{E}_N, \quad (50)$$

$$\mathbf{g}_{NM}(\theta_s) = \mathbf{E}_M \otimes \mathbf{E}_N = \mathbf{E}_{NM},$$

для пространственных составляющих **исходного** вектора сигнала и **КМ** получим

$$\text{vec}(A_s) = \mathbf{E}_{NM} \cdot \sqrt{h_s} \cdot \xi_s, \quad \Phi_{A_s} = h_s \cdot \mathbf{E}_{NM} \cdot \mathbf{E}_{NM}^*,$$

$$\mathbf{E}_{NM} = \mathbf{E}_M \otimes \mathbf{E}_N, \quad (51)$$

где \mathbf{E}_T (\mathbf{E}_T^*) – T -мерный столбец (строка) из единиц.

Д. Таким образом, в рассматриваемой модели **шумы** излучателей, **излучения** внешних источников и **отраженные** сигналы точечных целей имеют одинаковую временную структуру, а отличия между ними проявляются в различии **пространственных** составляющих соответствующих общих **КМ** (37), (44), (47), (49), (51). В то же время в рассматриваемой двухмерной ФАР с эквидистантным расположением идентичных излучателей вдоль главных осей все пространственные **КМ** допускают представление в виде **кронекеровских** произведений сомножителей существенно меньшего размера, чем **КМ** в целом. Это позволяет рассчитывать на решение задач в "большой" ФАР (с большим числом излучателей) с использованием известных свойств такого произведения. Учитывая их важность для количественной оценки сравнительных достоинств различных технических решений, приведем эти свойства и примеры, используемые в дальнейшем.

2.2 Определение, примеры и свойства кронекеровских произведений

Кронекеровским произведением $n \times m$ матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n, m}$ на $p \times q$ матрицу \mathbf{B} называется $(n \cdot p) \times (m \cdot q)$ матрица [3, 4]

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{ij} \cdot \mathbf{B})_{i=1, j=1}^{n, m}, \quad (52)$$

$$\dim \mathbf{B} = p \times q, \quad \dim \mathbf{C} = (n \cdot p) \times (m \cdot q),$$

полученная умножением **каждого** элемента a_{ij} ($i \in 1, n; j \in 1, m$) **левого** сомножителя (матрицы \mathbf{A}) на **правый** сомножитель (матрицу \mathbf{B}) **целиком**. В отличие от обычного матричного произведения, **кронекеровское** определено для сомножителей произвольных размеров.

Приведем примеры, которые нам потребуются в дальнейшем.

1. $N \times M$ матрица \mathbf{C} вида

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (53a)$$

является кронекеровским произведением

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{B} \quad (53б)$$

единичной $n \times n$ матрицы \mathbf{I}_n на матрицу \mathbf{B} ,

$$n = N / p, \quad M = n \cdot q. \quad (53в)$$

2. $N \times M$ матрица \mathbf{C} вида

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \dim \mathbf{B} = p \times q, \quad (54a)$$

является кронекеровским произведением

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_n \otimes \mathbf{B} \quad (54б)$$

n -мерного вектор-столбца \mathbf{E}_n из n единиц на матрицу \mathbf{B} ,

$$n = N / p, \quad M = q. \quad (54в)$$

3. $N \times M$ матрица \mathbf{C} вида

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{B}], \quad \dim \mathbf{B} = p \times q, \quad (55a)$$

является кронекеровским произведением

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_n^* \otimes \mathbf{B} \quad (55б)$$

n -мерной строки \mathbf{E}_n^* из n единиц на матрицу \mathbf{B} ,

$$n = M / q, \quad N = p. \quad (55в)$$

Для кронекеровского произведения справедливы равенства [3, 4]

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}), \quad (56a)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) =$$

$$= \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}, \quad (56б)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}), \quad (56в)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{B}^*, \quad (56г)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

Для задачи пространственно-временной обработки особенно важны последние два свойства. Первое из них (56в), справедливое при выполнимости обычного векторно-матричного умножения (согласованных размерах обычным способом перемножаемых матриц), позволяет представить результат обычного перемножения матриц большой размерности в виде кронекеровского произведения сомножителей меньшей размерности. За счет этого малоразмерные, в том числе скалярные функции "больших" матриц, опреде-

ляющие, в частности, критерии эффективности обработки, удается рассчитать без явного определения их элементов, используя только их кронекеровские сомножители, зачастую существенно меньшей размерности, что неоднократно используется ниже.

Второе свойство (56г) указывает отличия правил транспонирования, эрмитового сопряжения и обращения обычного векторно-матричного произведения от правил аналогичных операций для кронекеровских произведений, где они выполняются над сомножителями без изменения порядка их следования.

Используя эти свойства, определим трансформацию исходных **КМ** в блоках анализируемой системы обработки (рис. 1).

2.3 Трансформация исходных сигналов и их **КМ** в блоках взвешивания и формирования модулей

В этих блоках сигналы $K \times L$ смежных излучателей ФАР взвешиваются и объединяются в $N_K \cdot M_L = (N \times M) / (K \times L)$ модулей. Эти операции не меняют исходную временную ("шумовую") структуру анализируемых процессов, но трансформируют их пространственную структуру, которая определяется ниже.

А. Математический смысл этих операций заключается в переходе от исходного вектора $\text{vec}(\mathbf{A})$ (2) вида (36), (43), (45), (48), (51) с пространственной **КМ** $\Phi_{\mathbf{A}} = \text{vec}(\mathbf{A} \cdot \text{vec}(\mathbf{A})^*)$ вида (37), (45), (47), (48), (51) к вектору

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \text{vec}(\mathbf{A}), \quad \dim \mathbf{w} = N_K \cdot M_L; \quad \dim \mathbf{T} = (N_K \cdot M_L) \times (N \cdot M) \quad (57)$$

с **КМ** (здесь и далее "по умолчанию" понимают **пространственную КМ**)

$$\Phi_{\mathbf{w}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^* = \mathbf{T} \cdot \text{vec}(\mathbf{A} \cdot \text{vec}(\mathbf{A}_n)^*) \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{T} \cdot \Phi_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{T}^*, \quad (58)$$

$$\dim \Phi_{\mathbf{w}} = (N_K \cdot M_L) \times (N_K \cdot M_L).$$

Так, квадратной ($N = M$) ФАР размерность в общем случае эрмитовой матрицы $\Phi_{\mathbf{A}}$ равна $\dim \Phi_{\mathbf{A}} = M^2 \times M^2$, а размер матричной импульсной характеристики (**МИХ**) \mathbf{T} анализируемых блоков при $K = L$ равен $\dim \mathbf{T} = M_L^2 \times M_L^2$. Например, при $N = M = 100$, $K = L = 4$ вычислять с требуемой точностью и в приемлемое время по явно сформированным сомножителям (58) может быть весьма сложно или даже невозможно.

Для рассматриваемой ФАР можно существенно упростить задачу, используя "кронекеровские" представления сомножителей в (58).

Б. Можно показать, что для **МИХ** блока формирования модулей в обеих структурах рис. 2 справедливо представление

$$\mathbf{MOD} = \mathbf{I}_{M_L} \otimes \mathbf{E}_L^* \otimes \mathbf{I}_{N_K} \otimes \mathbf{E}_K^*, \quad (59a)$$

$$\dim \mathbf{MOD} = (N_K \cdot M_L) \times (N \cdot M),$$

которое для **квадратной** ($N = M$) ФАР при $K = L$ преобразуется к виду

$$\mathbf{MOD} = \mathbf{MDR} \otimes \mathbf{MDR}, \quad (59b)$$

$$\mathbf{MDR} = \mathbf{I}_{M_L} \otimes \mathbf{E}_L^*, \quad \dim \mathbf{MDR} = M_L \times M.$$

При строчно-столбцовом управлении в **квадратной** ФАР, когда вес "pq - излучателя" ФАР равен $W_{pq} = W_p \cdot W_q$ ($p, q \in 1, M$), **МИХ** $\mathbf{W}_{\mathbf{A}}$ блока взвешивания в схеме рис. 2, а **диагональна** и равна кронекеровскому произведению

$$\mathbf{W}_{\mathbf{A}} = \text{diag} \left(w_{\ell}^{(\mathbf{A})} \right)_{\ell=1}^{M^2} = \mathbf{WR} \otimes \mathbf{WR}, \quad (60a)$$

$$\dim \mathbf{W}_{\mathbf{A}} = M^2 \times M^2$$

двух одинаковых диагональных матриц взвешивания столбцов (строк)

$$\mathbf{WR} = \text{diag} \left(w_m \right)_{m=1}^M, \quad \dim \mathbf{WR} = M \times M. \quad (60b)$$

В схеме рис. 2, б "укороченная (*short*)" **диагональная МИХ** блока взвешивания сигналов M_L^2 модулей, имеет аналогичную структуру

$$\mathbf{W}_{sh} = \text{diag} \left(w_{\ell}^{(sh)} \right)_{\ell=1}^{M_L^2} = \mathbf{WR}_{sh} \otimes \mathbf{WR}_{sh}, \quad (61a)$$

$$\dim \mathbf{W}_{sh} = M_L^2 \times M_L^2,$$

но "укороченные" кронекеровские сомножители

$$\mathbf{WR}_{sh} = \text{diag} \left(w_m^{(sh)} \right)_{m=1}^{M_L}, \quad (61b)$$

$$\dim \mathbf{W}_{sh} = M_L \times M_L, \quad M_L = M / L$$

с диагональными элементами, определяющими веса $W_{pq}^{(mod)} = W_p^{(sh)} \cdot W_q^{(sh)}$ ($p, q \in 1, M_L$) сигналов предварительно сформированных $M_L^2 = M^2 / L^2$ модулей.

В. Тем самым результирующие **МИХ** (5), (8) блоков взвешивания и формирования модулей (рис. 2) в рассматриваемой далее квадратной ($N = M$) ФАР с "квадратными" ($K = L$) модулями допускают единое представление

$$\mathbf{T} = \mathbf{T1} \otimes \mathbf{T1}, \quad (62a)$$

$$\dim \mathbf{T} = M_L^2 \times M^2, \quad \dim \mathbf{T1} = M_L \times M$$

с кронекеровскими сомножителями

$$\mathbf{T1} = \begin{cases} \mathbf{MDR} \cdot \mathbf{WR}, & \text{структура "взвешивание - модули",} \\ & \text{рис. 2, а,} \\ \mathbf{WR}_{sh} \cdot \mathbf{MDR}, & \text{структура "модули - взвешивание",} \\ & \text{рис. 2, б.} \end{cases} \quad (62b)$$

На его основе, используя свойства (56в), (56г), **КМ** (58) процессов на выходе рассматриваемых блоков можно представить в виде произведения

$$\Phi_{\mathbf{w}} = \mathbf{G}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{w}}^*, \quad (63)$$

сомножителей, также допускающих кронекеровскую факторизацию вида

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G}_w = \Phi 1 \otimes \Phi 2, \\
 & \Phi 1 = \begin{cases} \Phi 1_n = \mathbf{T}1, \\ \Phi 1_y = \mathbf{W}\mathbf{R} \cdot \mathbf{h}^{1/4}, \\ \Phi 1_s = \sqrt[4]{h_s} \cdot \mathbf{T}1 \cdot \mathbf{E}_M, \end{cases} \quad (64a) \\
 & \Phi 2 = \begin{cases} \Phi 2_n = \Phi 1_n = \mathbf{T}1, & (a) \\ \Phi 2_y = \mathbf{W}\mathbf{C} \cdot \mathbf{h}^{1/4}, & (b) \\ \Phi 2_s = \Phi 1_s. & (c) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Первая из них (a) получена с учетом (37) и соответствует **собственным шумам** излучателей. Вторая (b) относится к излучениям **внешних источников** и получена на основе равенств (44)–(47), (41). Здесь

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{W}\mathbf{R} = \mathbf{T}1 \cdot \mathbf{G}\mathbf{R}, \quad \mathbf{W}\mathbf{C} = \mathbf{T}1 \cdot \mathbf{G}\mathbf{C}, \\
 & \mathbf{G}\mathbf{R} = (\mathbf{g}\mathbf{r}(\theta_\ell))_{\ell=1}^{N_{\text{int}}}, \quad \mathbf{G}\mathbf{C} = (\mathbf{g}\mathbf{c}(\theta_\ell))_{\ell=1}^{N_{\text{int}}}, \\
 & \mathbf{g}\mathbf{r}(\theta_\ell) = \left(e^{-j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell, \beta_\ell) \cdot q} \right)_{q=1}^M, \quad (64b) \\
 & \mathbf{g}\mathbf{c}(\theta_\ell) = \left(e^{j \cdot \gamma(\varepsilon_\ell) \cdot p} \right)_{p=1}^M.
 \end{aligned}$$

Последняя формула (c) в (64a) относится к **отраженному сигналу** цели с направления нормали к апертуре ФАР и является следствием (51).

Подчеркнем еще раз, что наличие символа кронекеровского произведения в (62), (64) совсем не означает необходимость вычислять его явно. Все необходимые функции этих произведений, в том числе скалярные критерии эффективности обработки, можно получить, вычисляя только их сомножители, что для современных компьютеров является тривиальной задачей.

Перед тем, как перейти к анализу трансформации КМ в последующих блоках (рис. 3), конкретизируем виды матрицы взвешивания, используемых в следующей статье.

2.4 О двух разновидностях диагональных матриц взвешивания

А. Известны различные матрицы "взвешивания" (распределения), регулирующие относительный уровень боковых лепестков диаграммы направленности (ДН) антенны. К их числу относится, в частности, распределения Тейлора и Хемминга. Так, элементы распределения Тейлора рассчитываются по формуле [7]

$$\begin{aligned}
 & wT_n(P) = \\
 & = \frac{1 + 2 \sum_{m=1}^{P-1} F_m \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot m \cdot \frac{(n-1 - (M-1)/2)}{M}\right)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{P-1} F_m}, \quad (65a) \\
 & n \in 1, M,
 \end{aligned}$$

в которой коэффициенты ряда

$$\begin{aligned}
 & F_m = \frac{(-1)^{m+1} \cdot \prod_{n=1}^{P-1} \left\{ 1 - \frac{m^2}{\sigma^2 \cdot (A^2 + (n-0.5)^2)} \right\}}{2 \cdot \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{P-1} (1 - (m/n)^2)}, \quad (65b) \\
 & \sigma^2 = \frac{P^2}{A^2 + (P-0.5)^2}
 \end{aligned}$$

определяются параметрами P и A , выбираемыми по требуемому уровню боковых лепестков (УБЛ). Связь между ними приведена в табл. 1.

Таблица 1
УБЛ и обеспечивающие его параметры распределения Тейлора

УБЛ, дБ	20	25	30	35	40	45
A	0,9527	1,1367	1,3197	1,5034	1,6864	1,8701
P	3	4	5	6	7	8

Рассчитанные по (65b) для этих параметров значения коэффициентов F_m приведены в табл. 2.

Таблица 2
Коэффициенты F_m (65b) ($m \in 1, P-1$) распределения Тейлора

$m \setminus P$	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
1	0.1561	0.2286	0.2904	0.3433	0.3887	0.4283
2	2.174×10^{-3}	-8.7361×10^{-3}	-0.0152	-0.0151	-9.4813×10^{-3}	2.3084×10^{-4}
3		-2.2639×10^{-3}	1.3557×10^{-3}	4.0503×10^{-3}	4.8389×10^{-3}	4.2683×10^{-3}
4			9.8883×10^{-4}	-4.3857×10^{-4}	-1.5474×10^{-3}	-1.9326×10^{-3}
5				-3.4401×10^{-4}	2.7018×10^{-4}	7.4125×10^{-4}
6					8.7061×10^{-5}	-1.9917×10^{-4}
7						3.7598×10^{-6}

На рис. 4 показаны семейства распределений Тейлора (65a) различных "размеров" M при наборе параметров P , указанных в табл. 2.

Большемому значению P соответствует более "узкое" (более быстро спадающее от центра к краям) распределение, обеспечивающее меньший УБЛ ДН.

Примеры таких нормированных (в долях ширины главного луча) ДН линейных эквидистантных АР показаны на рис. 5 для $M = 10$ (a, б) и $M = 100$ (в, г). На рис. 5 a, в они соответствуют значениям параметров $P = 2, 3, 4$. Штриховыми кривыми на этих рисунках показаны ДН "не взвешенных" ($w_n = 1; n \in 1, M$) АР с относительным уровнем первого бокового лепестка ≈ -13 дБ. Уровень боковых лепестков ДН "взвешенных по Тейлору (65a)" ФАР с ростом P меняется в соответствии с табл. 1, достигая ≈ -45 дБ при $P = 8$ (рис. 5 б, г). Это, однако, сопровождается неизбежным

расширением главного лепестка, который при $P = 8$ примерно вдвое шире, чем в "невзвешенной" ФАР.

Б. Штриховыми кривыми на рис. 5 б, г показаны ДН линейных эквидистантных ФАР со взвешиванием "по Хеммингу" с весами [7]

$$wH_n = 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n-1}{M-1}\right), \quad (66)$$

$n \in 1, M,$

показанными **штриховыми** кривыми на рис. 4.

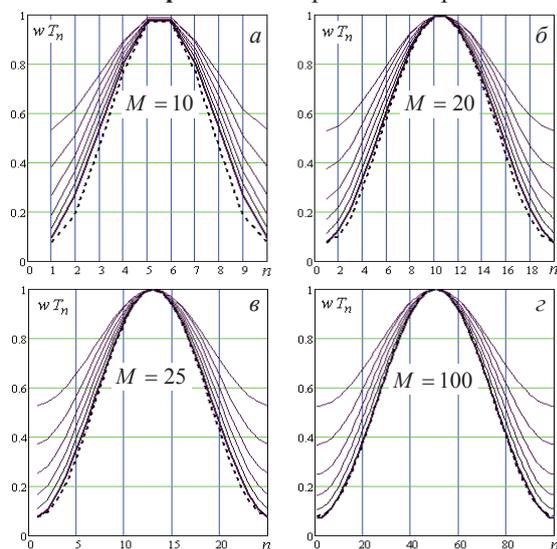


Рис. 4. Элементы распределений Тейлора (65а) различных "размеров" M

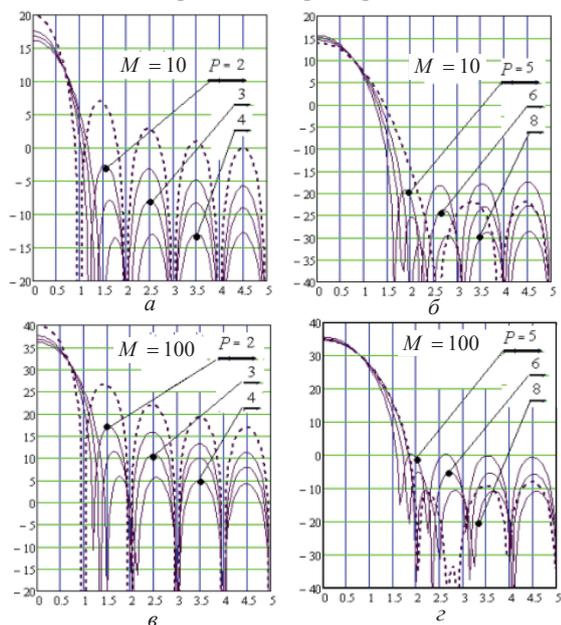


Рис. 5. ДН "взвешенных по Тейлору (65а)" линейных эквидистантных ФАР

Видно, что как распределение Хемминга (рис. 4), так и УБЛ соответствующей ДН (рис. 5) близки к распределению и УБЛ ДН АР, "взвешенной по Тейлору (65а)" с параметром $P = 8$. Различия между ними более заметны при относительно малых $M \leq 10$, но существенно уменьшаются с ростом $M > 10$.

В. Распределение, подобное (66), можно приблизить к распределению Тейлора (65а) и с другими значениями параметра P , записав его в виде

$$wH_n(P) = a(P) - (1 - a(P)) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n-1}{M-1}\right), \quad (67)$$

$n \in 1, M,$

где $a(P)$ – параметр, выбираемый из условия $wH_1(P) = wT_1(P)$ равенства "пьедесталов" обоих распределений. Удовлетворяющие этому условию значения $a(P)$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Взаимосвязь параметров распределений Тейлора и Хемминга

A	0,9527	1,1367	1,3197	1,5034	1,6864	1,8701
P	3	4	5	6	7	8
$a(P)$	0,7637	0,6859	0,6265	0,5847	0,5562	0,5370

Г. На рис. 6 показаны семейства таких распределений Хемминга (67) различных "размеров" M при наборе параметров $a(P)$, указанных в табл. 3.

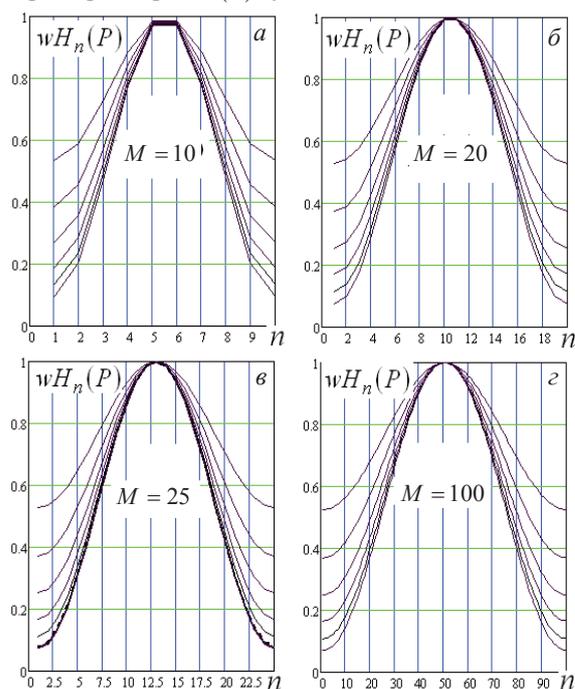


Рис. 6. Обобщенные распределения Хемминга (67) различных "размеров" M

Наблюдаемая близость с соответствующими распределениями Тейлора (рис. 4) объясняет и близость формы и УБЛ соответствующих ДН для распределения Хемминга, показанных на рис. 7.

Как и для распределений Тейлора (рис. 5) (и любых других), снижение УБЛ за счет соответствующего выбора уровня "пьедестала" $a(P)$ здесь также сопровождается расширением главного лепестка по сравнению с ДН "невзвешенных" ($w_n = 1; n \in 1, M$)

ФАР, показанными штриховыми кривыми, но степень расширения на низком уровне при относительно малых размерах $M \leq 10$ несколько больше. Различия уменьшаются по мере роста $M > 10$.

2.5 Трансформация сигналов и их КМ в ДОС и блоках согласованной фильтрации

А. Начнем с представляющей основной практический интерес структуры блока **БСФ–ДОС**, показанной на рис. 3, б. Решаемая при этом задача заключается в отыскании КМ.

$$\begin{aligned} \Phi_{w_{proc}} &= \overline{w_{proc} \cdot w_{proc}^*} = \tilde{F} \cdot \Phi_w \cdot \tilde{F}^* = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{(proc)} & \Phi_{proc}^* \\ \Phi_{proc} & \Phi_{comp} \end{bmatrix}, \quad \dim \Phi_{w_{proc}} = N_{proc} \times N_{proc}, \\ \Phi_{11}^{(proc)} &= |w_{1proc}|^2 = f^* \cdot \Phi_w \cdot f, \\ \Phi_{proc} &= F_{comp} \cdot w \cdot w_{1proc}^* = F_{comp} \cdot \Phi_w \cdot f, \\ \Phi_{comp} &= F_{comp} \cdot \Phi_w \cdot F_{comp}^* \end{aligned} \quad (68)$$

вектора

$$w_{proc} = \tilde{F} \cdot w, \quad \dim w_{proc} = N_{proc} = N_{comp} + 1, \quad (69)$$

на выходе ДОС с **МИХ**

$$\tilde{F} = \tilde{F}_i = \begin{bmatrix} f_i^* \\ F_{comp} \end{bmatrix}, \quad \dim f_i^* = M_L^2, \\ \dim F_{comp} = N_{comp} \times M_L^2, \quad (70) \\ i \in 1, N_{main},$$

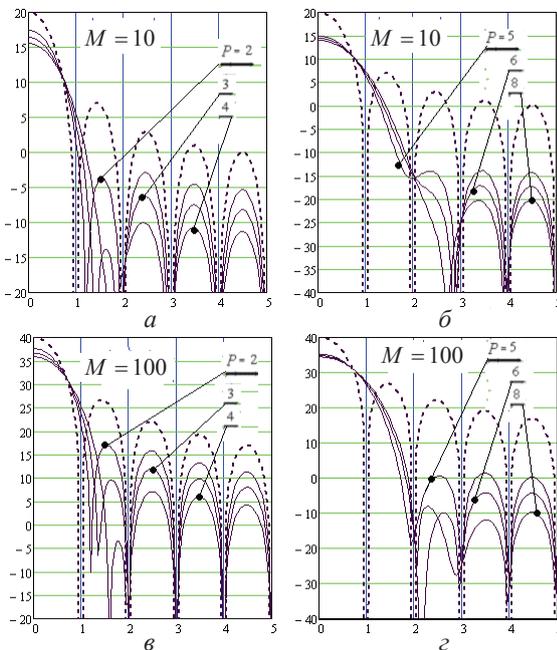


Рис. 7. ДН "взвешенных по Хеммингу (67)" линейных эквидистантных ФАР

Б. Для рассматриваемой ФАР естественны формователи основного канала приема с **ИХ** вида

$$f = c \cdot f_1 \otimes f_1, \quad \dim f_1 = M_L. \quad (71)$$

Так, согласованному приему сигнала с направления нормали соответствует выбор **ИХ** (71) с кронекевыми множителями

$$f_1 = T_1 \cdot E_M, \quad (72a)$$

которая пропорциональна опорному вектору ожидаемого отраженного сигнала с направления нормали к ФАР на выходе блоков рис. (2) (см. (62) и строку (с) формулы (64а)). Более прост несогласованный вектор (71) с множителем

$$f_1 = E_M, \quad (72б)$$

уступающий, однако, согласованному по достижимому значению **ОСШ** в основном канале приема. Структуре (71) удовлетворяют и "промежуточные" опорные векторы, полученные при различных параметрах P в распределениях Тейлора или Хемминга.

В. Используя свойства (56в), (56г), нетрудно показать, что в условиях (71), (63), (64) элементы и блоки искомой матрицы $\Phi_{w_{proc}}$ (68) равны

$$\Phi_{11}^{(proc)} = c^2 \cdot (v_1^* \cdot v_1) \cdot (v_2^* \cdot v_2), \quad (73a)$$

$$v_1 = \Phi_1^* \cdot f_1, \quad v_2 = \Phi_2^* \cdot f_1,$$

$$\Phi_{proc} = c \cdot F_{comp} \cdot \Phi_1 \cdot v_1 \otimes \Phi_2 \cdot v_2, \quad (73б)$$

$$\Phi_{comp} = F_{comp} \cdot \Phi_1 \otimes \Phi_2 \cdot \Phi_1^* \otimes \Phi_2^* \cdot F_{comp}^*. \quad (73в)$$

Если, что вполне возможно, **МИХ** ДОС компенсационных каналов также допускает кронекевскую факторизацию вида

$$F_{comp} = F_{1comp} \otimes F_{2comp}, \quad (74)$$

то по сравнению с (73в) резко упрощается и вычисление **КМ**

$$\begin{aligned} \Phi_{comp} &= V_{1comp} \cdot V_{1comp}^* \otimes V_{2comp} \cdot V_{2comp}^* \\ V_{1comp} &= F_{1comp} \cdot \Phi_1, \quad V_{2comp} = F_{2comp} \cdot \Phi_2 \end{aligned} \quad (75)$$

сигналов компенсационных каналов.

Г. Нормирующая константа $c \neq 0$ **ИХ** (71) в равной степени изменяет мощности шума, мешающих излучений и отраженного сигнала цели в основном канале приема и поэтому не влияет на значение **ОСШ** в нем. Поэтому она может произвольно выбираться из каких-либо практических соображений. Логичное требование к ней может заключаться в том, чтобы накопленная в процессе объединения модулей мощность собственного шума излучателей в основном канале (73а) совпала с принятой за единицу мощностью шумов излучателей ФАР.

Используя (64), нетрудно показать, что это требование выполнится при

$$c = 1 / (v_1^* \cdot v_1), \quad v_1 = T_1^* \cdot f_1, \quad (76)$$

где матрица T_1 определена в (62).

Аналогичным образом может быть найдена нормирующая константа $c_\eta \neq 0$ для диагональной матрицы h (47б), обеспечивающая заданное **ОПШ** η в основном канале. Она определяется из (73а) при ис-

пользовании в качестве Φ_1 и Φ_2 матриц Φ_{1y} и Φ_{2y} (64) соответственно.

Проанализируем в заключение трансформацию **КМ** (68) в системе неидентичных каналов приема.

2.6 Трансформация КМ в системе неидентичных каналов приема

А. До сих пор полагалось, что полосы пропускания трактов взвешивания, формирования модулей и ДОС существенно превышают ширину спектра полезного отраженного сигнала. Для устранения связанных с этим потерь в **ОСШ** они согласовываются в блоке согласованной фильтрации (**БСФ**), подключенном к выходу ДОС (рис. 3, б). **БСФ** представляет собой набор **линейных** фильтров с **постоянными**, но в общем случае **различными** импульсными характеристиками (**ИХ**). Различие **ИХ** декоррелирует входные сигналы **БСФ**, снижая тем самым эффективность обработки по базовым критериям. Потери зависят от степени декорреляции, расчетные соотношения для которой выводятся ниже.

Б. Используемая модель ввода неидентичности (различий) **ИХ** каналов приема показана на рис. 8.

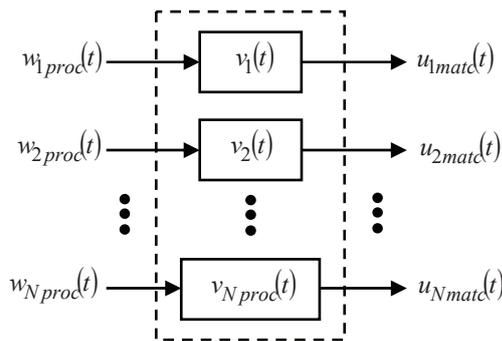


Рис. 8. Модель неидентичных каналов приема

Здесь полагается, что входной вектор комплексных амплитуд (69)

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_{proc}(t) = \left(w_{n,proc}(t) \right)_{n=1}^{N_{proc}},$$

$$\dim \mathbf{w}_{proc}(t) = N_{proc}$$

преобразуется в вектор

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{matc}(t) = \left(u_{n,matc}(t) \right)_{n=1}^{N_{proc}}$$

выходных сигналов N_{proc} линейных фильтров с в общем случае различными **ИХ** $v_m(t)$ ($m \in 1, N_{proc}$). Для упрощения обозначений ниже полагается, что $N_{proc} = N$.

Решаемая задача сводится к отысканию связи между входными и выходными векторами сигналов и их **КМ** в модели рис. 8.

В. Векторы $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ связаны интегралом свертки

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\tau) \cdot \mathbf{w}(t - \tau) d\tau, \quad (77)$$

где $\mathbf{D}(t) = \text{diag} \left(v_m(t) \right)_{m=1}^N$ – диагональная матрица **ИХ** каналов приема, а под интегралом от вектора понимается, как обычно, вектор интегралов от его элементов.

КМ вектора $\mathbf{u}(t)$

$$\Phi_{\mathbf{u}} = \left(\varphi_{pq}(\mathbf{u}) \right)_{p,q=1}^N = \overline{\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^*(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\tau) \Phi_{\mathbf{w}}(\tau, s) \mathbf{D}^*(s) d\tau ds, \quad (78)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{w}}(\tau, s) = \overline{\mathbf{w}(t - \tau) \cdot \mathbf{w}^*(t - s)} \quad (79)$$

– пространственно-временная **КМ** вектора $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$.

В соответствии с (37), (44), (49) в данном случае можно считать, что

$$\Phi_{\mathbf{w}}(\tau, s) = \Phi_{\mathbf{w}} \cdot \delta(\tau - s), \quad (80)$$

где $\Phi_{\mathbf{w}}$ – пространственная **КМ** (68) соответствующих процессов. Поэтому

$$\Phi_{\mathbf{u}} = \left(\varphi_{pq}(\mathbf{u}) \right)_{p,q=1}^N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(t) \cdot \Phi_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{D}^*(t) dt, \quad (81)$$

откуда следует, что

$$\varphi_{mn}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} v_m(s) \cdot \varphi_{mn}(\mathbf{w}_{\mathbf{n}}) \cdot v_n^*(s) ds = \varphi_{mn}(\mathbf{w}) \cdot a_{mn},$$

$$m, n \in 1, N,$$

$$\mathbf{A} = (a_{mn})_{m,n=1}^N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}^*(t) dt, \quad (82)$$

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} v_m(t) \cdot v_n^*(t) dt.$$

Тем самым каждый элемент искомого **КМ** (80) равен произведению соответствующих элементов входной **КМ** $\Phi_{\mathbf{w}}$ и **КМ** $\mathbf{A} = (a_{pq})_{p,q=1}^{N_{proc}}$ вектора $\mathbf{v}(t) = (v_m(t))_{m=1}^N$ **ИХ** каналов приема. Такое **поэлементное** перемножение матриц называется произведением **Шура – Адамара** [3] и ниже обозначается жирной точкой, с использованием которой равенства (80), (81) переписываются в виде

$$\Phi_{\mathbf{u}} = \left(\varphi_{pq}(\mathbf{u}) \right)_{p,q=1}^N = \Phi_{\mathbf{w}} \bullet \mathbf{A}, \quad (83)$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_n \ \mathbf{u}_y \ \mathbf{u}_s], \quad \mathbf{w} = [\mathbf{w}_n \ \mathbf{w}_y \ \mathbf{w}_s].$$

Очевидно, что произведение **Шура – Адамара** перестановочно ($\Phi \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A} \bullet \Phi$) и определено для матриц произвольного, но одинакового размера.

В частном случае идентичных **ИХ** $v_m(t) = v_0(t)$ ($m \in 1, N$), когда

$$\mathbf{v}(t) = v_0(t) \cdot \mathbf{E}_N, \quad \mathbf{E}_N^* = [1, 1, \dots, 1],$$

$$\mathbf{A} = c \cdot \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{E}_N^*, \quad c = \int_{-\infty}^{\infty} |v_0(t)|^2 dt \quad (84)$$

КМ (82) выходных векторов пропорциональны соответствующим входным **КМ**, что не меняет потенциальных возможностей обработки по базовым критериям по сравнению с использованием непосредственно входных векторов $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{proc}(t)$. Но в реальных условиях, когда совпадения может не быть, потери обработки по базовым критериям определяются отличиями от (84) матрицей **A** (82), зависящей от вида и различия параметров **ИХ** каналов приема.

Г. Эти потери в следующей статье рассчитываются для двух видов **ИХ** – гауссовых

$$v_m(t) = c \cdot \exp\{-\pi \cdot F_m^2 \cdot (t - \tau_m)^2\} \cdot \exp\{j \cdot 2\pi \cdot (f_0 + \delta f_m) \cdot t\},$$

$$m \in 1, N; \quad c = \sqrt{F_s \sqrt{2}} \quad (85)$$

и прямоугольных ЛЧМ.

Параметрами гауссовой **ИХ** являются:

$F_m = 1/T_m = v_m \cdot F_s$ – ширина частотной характеристики (**ЧХ**) (полоса пропускания) m -го фильтра на уровне $\exp\{-\pi/4\} \approx 0,456$ от максимума, обратная временной протяженности T_m его **ИХ** на том же уровне, в v_m раз отличающаяся от ширины спектра F_s полезного сигнала;

τ_m – временной сдвиг огибающей **ИХ** m -го канала приема;

δf_m – сдвиг центральной частоты m -го фильтра от номинального значения f_0 ;

c – нормирующий коэффициент, при котором интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |v_0(t)|^2 dt$ равен единице, где

$v_0(t) = c \cdot \exp\{-\pi \cdot F_s^2 \cdot t^2\} \cdot \exp\{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t\}$ – "номинальная" **ИХ**.

Аналогичные параметры характеризуют и неидентичности ЛЧМ **ИХ**. Их влияние дополнительно проявляется в неидентичности наклонов прямой, характеризующей зависимость частоты от времени, для различных фильтров.

Д. Можно показать, что для гауссовых (колокольных) **ИХ** (85) подынтегральную функцию в (82) можно записать в виде

$$v_m(t) \cdot v_n(t)^* = c_0^2 \cdot \exp\{-\alpha_{mn} \cdot (t - \beta_{mn})^2\} \times \exp\{j \cdot \gamma_{mn} \cdot t\} \cdot \exp\{-\delta_{mn}\},$$

$$\alpha_{mn} = \pi \cdot F_s^2 \cdot (v_m^2 + v_n^2),$$

$$\gamma_{mn} = 2\pi \cdot (\delta f_m - \delta f_n),$$

$$\beta_{mn} = \frac{v_m^2 \cdot \tau_m + v_n^2 \cdot \tau_n}{v_m^2 + v_n^2},$$

$$\delta_{mn} = \pi \cdot F_s^2 \cdot \frac{v_n^2 \cdot v_m^2 \cdot (\tau_m - \tau_n)^2}{v_m^2 + v_n^2}.$$
(86)

Используя далее табличный интеграл [7, с. 451, №2.5.36.1]

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha \cdot ((\tau - \beta))^2\} \cdot \exp\{j \cdot \gamma \cdot \tau\} \cdot d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{4 \cdot \alpha}\right\} \cdot \exp\{j \cdot \gamma \cdot \beta\}$$

для элементов матрицы неидентичностей (82), получим

$$a_{mn} = \sqrt{\frac{2}{v_m^2 + v_n^2}} \times \exp\left\{-\frac{\pi \cdot (v_n^2 \cdot v_m^2 \cdot (\chi_m - \chi_n)^2 + (\mu_m - \mu_n)^2)}{v_m^2 + v_n^2}\right\} \times \exp\left\{j \cdot 2\pi \cdot \frac{(v_m^2 \cdot \chi_m + v_n^2 \cdot \chi_n) \cdot (\mu_m - \mu_n)}{v_m^2 + v_n^2}\right\},$$

$$m, n \in 1, N,$$
(87)

где

$$v_p = F_p / F_0 = 1 + \varepsilon_p, \quad \mu_p = \delta f_p / F_0, \quad \chi_p = \tau_p / T_0, \quad p \in 1, N$$
(88)

– относительные значения соответствующих параметров гауссовых **ИХ** фильтров.

Аналогичные выражения получены и для прямоугольных ЛЧМ **ИХ**.

В общем случае значения параметров неидентичности случайны, поэтому случайны и полученные на их основе значения базовых критериев. Практически важны их средние по ансамблю параметров фильтров значения, зависящие от их законов распределения. При расчетах полагается, что эти параметры взаимно независимы и имеют нормальные (гауссовы) распределения:

$$\varepsilon_p \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad \mu_p \sim N(0, \sigma_\mu^2),$$

$$\chi_p \sim N(0, \sigma_\chi^2), \quad p \in 1, N$$

с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\mu^2, \sigma_\chi^2$ соответственно.

Количественные оценки влияния неидентичности **ИХ** на эффективность обработки отраженных сигналов на фоне шума и внешних мешающих отражений приводятся в следующей статье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана математическая модель системы пространственной обработки отраженных сигналов на фоне собственного шума излучателей и внешних помех от точечных источников независимых шумовых излучений в РЛС с прямоугольной (в том числе – квадратной) многоэлементной плоской ФАР, а также оценены потенциальные возможности такой обработки.

2. Основное внимание уделено преодолению вычислительных сложностей, связанных с высокой размерностью решаемых задач из-за большого числа излучателей и модулей ФАР. Эта задача решена за счет учета специфики ФАР, связанной с прямоугольной (квадратной) формой апертуры и эквидистантным расположением идентичных излучателей вдоль главных осей. В этих условиях входные воздействия и их преобразования в каналах приема удается представить в виде кронекеровских произведений, что позволяет заменить операции с векторами и матрицами большой размерности операциями с их кронекеровскими множителями, размерность которых обычно существенно меньше.

3. Получены кронекеровские множители векторов комплексных амплитуд и корреляционных матриц (КМ) шума, мешающих излучений внешних источников и отраженных сигналов целей при всех предусмотренных преобразованиях в приемных трактах. Финальные КМ на входе исследуемых адаптивных устройств пространственной (межканальной) обработки позволяют получить и сравнить их энергетические характеристики в переходном и установившихся режимах и на этой основе обосновать рекомендации по их выбору для практической реализации.

Литература

- [1] *Рябуха В.П.* Адаптивные системы защиты РЛС от шумовых помех. 1. Корреляционные автокомпенсаторы на основе стохастических градиентных алгоритмов адаптации – Х.: Прикладная радиоэлектроника. — 2016. — Т. 15, № 1 — С. 11–25.
- [2] *Рябуха В.П.* Адаптивные системы защиты РЛС от шумовых помех. 2. Квазиньютоновские корреляционные автокомпенсаторы. Адаптивные решетчатые фильтры. – Х.: Прикладная радиоэлектроника. — 2016. — Т. 15, № 2 — С. 88–99.
- [3] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука. — 1984. — 320 с.
- [4] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Пер. с англ., под ред. Лидского В. Б. – М.: Наука. — 1976. — 367 с.
- [5] Радиолокационные системы. Основы построения и теория: Справочник/ Я.Д. Ширман, С.Т. Багдасарян, А.С. Маляренко, Д.И. Леховицкий, С.П. Лещенко, Ю.И. Лосев, А.И. Николаев, С.А. Горшков, С.В. Москвитин, В.М. Орленко / Под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: Радиотехника. — 2007. — 512 с.
- [6] Справочник по радиолокации. Под ред. М. Скольника. Нью-Йорк, 1970. Пер. с англ. под общей редакцией КН. Трофимова. Том 2. Радиолокационные антенные устройства. / Под ред. П.И. Дудника. – М.: Сов. радио". — 1977. — 408 с.
- [7] Интегралы и ряды. Элементарные функции. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. — 1981. — 800 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2016



Рябуха Вячеслав Петрович, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов – радиолокационные системы, обнаружение и измерение параметров сигналов на фоне помех.

УДК 621.396.965:621.391.26

Адаптивні системи захисту РЛС від шумових завад.

3. Математична модель системи просторової обробки сигналів у РЛС з двовимірною плоскою ФАР / В.П. Рябуха // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2016. – Том 15, № 4. – С. 301–315.

Третя стаття циклу статей з адаптивних систем захисту РЛС від маскувальних шумових завад. Описується математична модель системи просторової обробки сигналів на тлі адитивної суміші власного шуму випромінювачів і зовнішніх завад від точкових джерел незалежних шумових випромінювань у РЛС з прямокутною плоскою ФАР, що використовує математичний апарат кронекерівських добутків.

Ключові слова: математична модель, шумові завади, просторова обробка, кореляційна матриця, кронекерівський добуток.

Табл.: 03. Іл.: 08. Бібліогр.: 07 найм.

UDC 621.396.965:621.391.26

Adaptive radar noise jamming protection systems.

3. Mathematical model of the system of spatial signal processing in a radar with a rectangular planar PAA / V.P. Riabukha // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 301–315.

This is the third paper of a series on adaptive radar masking noise jamming protection systems. The paper describes a mathematical model for a system of spatial processing of signals embedded in an additive mixture consisting of radiators' internal noise and external jamming from point sources of independent noise radiations in a radar that includes a rectangular planar PAA. The model is based on the mathematical apparatus of Kronecker products.

Keywords: mathematic model, rectangular planar PAA, noise jamming, spatial processing, correlation matrix, Kronecker product.

Tab.03: Fig.: 08. Ref.: 07 items.