# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

# ЛОКАЦИЯ И НАВИГАЦИЯ

УДК 621.382.2.029.64

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛУЧЕВОЙ РАДИОТОМОГРАФИИ

*А. Е. ПОЕДИНЧУК, К. А. ЛУКИН, С. К. ЛУКИН*

В работе предлагается численно-аналитический метод решения задач фазовой томографии прозрачных неоднородных сред. Входной информацией для этого класса задач является измерение фазы волны, прошедшей через неоднородную среду. В геометрическом приближении фаза прошедшей волны выражается в виде интеграла от показателя преломления среды вдоль луча, соединяющего передатчик и приемник. В том случае, когда можно пренебречь рефракцией (характерные размеры неоднородностей превышают радиус Френеля), луч представляет собой прямую линию, соединяющую передатчик и приемник. Значения таких интегралов при различных положениях передатчика (приемника) используются в фазовой томографии для восстановления пространственной структуры крупномасштабных неоднородностей среды [1–4].

*Ключевые слова:* лучевая томография, обратные задачи электродинамики.

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе на примере задач лучевой радиотомографии ионосферы Земли апробируется новый метод решения обратных задач для восстановления пространственной структуры крупномасштабных неоднородностей среды [1–4]. Рассматривается вариант спутниковой лучевой радиотомографии, реализуемой с помощью низкоорбитальных или высокоорбитальных искусственных спутников Земли (ИСЗ) [2]. Теоретической основой лучевой радиотомографии [2] является интегральное уравнение, связывающее разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi$ ($\varphi_0$ – фаза зондирующей волны, $\varphi$ – фаза прошедшей волны через атмосферу) и распределение электронов концентрации $N$

$$\lambda r_e \int N ds = \Delta\varphi , \tag{1}$$

где $\lambda$ – длина зондирующей волны, $r_e$ – классический радиус электрона.

Интегрирование в (1) осуществляется вдоль луча, соединяющего передатчик на ИСЗ, и приемник, расположенный на поверхности Земли. Таким образом, задача состоит в определении электронной концентрации $N$ как функции пространственных переменных по известной (измеренной) разности фаз $\Delta\varphi$ при различных положениях ИСЗ и приемника.

Для решения такой задачи были предложены различные методы. Мы не будем анализировать достоинства и недостатки этих методов (достаточно подробный анализ которых изложен в [2]). Отметим только, что, в основном, эти методы используют аппроксимацию интегрального оператора, задаваемого уравнением (1), конечномерными операторами. Такая аппроксимация сводит уравнение (1) к конечной системе линейных алгебраических уравнений, которая, как правило, является недоопределенной. Эти системы уравнений имеют неединственное решение (проблемы неоднозначности и неполноты входных данных) [2]. Кроме того, точность восстановления функции $N$ на прямую зависит от точности аппроксимации интегрального оператора (1). Поэтому повышение точности с необходимостью приводит к системам линейных алгебраических уравнений большой размерности. Численные построения решений таких систем уравнений требует разработки специальных методов [5].

Предлагаемый ниже метод решения уравнения (1) лишен этих недостатков. В частности, система линейных алгебраических уравнений, с помощью которой определятся функция $N$, имеет положительную полуопределенную симметричную квадратную матрицу. Это свойство позволяет для построения решения использовать хорошо известный метод $\alpha$ – регуляции Лаврентьева [6].

### 1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛУЧЕВОЙ РАДИОТОМОГРАФИИ

Прежде чем излагать основные этапы построения метода решения уравнения (1), следуя [2], введем параметры, характеризующие геометрию схемы регистрации входных данных задачи лучевой радиотомографии. Будем предполагать, не ограничивая общности, что ИСЗ движется по круговой орбите. Введем полярную систему координат в плоскости, проходящей через центр Земли и орбиту ИСЗ. Тогда $(r_0, \alpha_0)$ – координаты ИСЗ, $(R, \alpha_i)$ – координаты приемника, расположенного на поверхности Земли ($R$ – радиус Земли), $\beta$ – угол места ИСЗ, $0$ – центр Земли, $00'$ – ось полярной системы координат.

Используя результаты, полученные в [2], уравнение (1) можно представить в следующем виде

$$\lambda r_e R \int\limits_0^{h_0} \frac{N(h,\tau)dh}{\sqrt{1-\frac{cos^2\beta}{(1+h)^2}}} = \Delta\varphi(\beta). \qquad (2)$$

Здесь

$$h = \frac{r}{R} - 1, \; \tau = \alpha_i + \beta - arccos\left(\frac{\cos\beta}{1+h}\right), \; h_0 = \frac{r_0}{R} - 1.$$

Задача состоит в построении решения уравнения (2) по известной функции $\Delta\varphi(\beta)$. Суть предлагаемого метода построения решения такова. Предположим, что функцию $N(h,\tau)$ можно представить в виде

$$N(h,\tau) = \sum_{m=0}^{M} N_m(h)(\tau - \tau_i)^m, \qquad (3)$$

где коэффициенты $N_m(h)$ – некоторые неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставим (3) в (2), тогда будем иметь

$$\Delta\varphi(\beta) = \lambda r_e R \sum_{m=0}^{M} \int\limits_0^{h_0} N_m(h) Q_m(h,\beta) dh, \qquad (4)$$

где

$$Q_m(h,\beta) = \frac{\left(\beta - arccos\left(\frac{\cos\beta}{1+h}\right)\right)^m}{\sqrt{1-\frac{cos^2\beta}{(1+h)^2}}}. \qquad (5)$$

В задачах лучевой радиотомографии имеет место ситуация, когда функция $\Delta\varphi(\beta)$ задана (измерена) лишь для конечного множества углов места ИСЗ – $\beta_p$, $p = 1,\ldots,P$

$$\varphi_p = \Delta\varphi(\beta_p). \qquad (6)$$

По этим значениям требуется найти все функции $N_m(h)$, $m = 1,\ldots,M$. Понятно, что такая задача является типичной некорректной задачей [7]. Следуя работе [8], заменим ее следующей условной вариационной задачей

$$\sum_{m=0}^{M} \int\limits_0^{h_0} N_m^{\,2}(h) dh = min. \qquad (7)$$

$$N_m(h), \; \eta \le m \le M,$$

$$\varphi_p = \sum_{m=0}^{M} \int\limits_0^{h_0} N_m(h) Q_m^{\,p}(h) dh, \; p = 1,\ldots,P. \qquad (8)$$

Здесь

$$Q_m^p(h) = \lambda r_e R Q_m(h, \beta_p). \qquad (9)$$

Для решения задачи (7), (8) воспользуемся методом множителей Лагранжа [9]. Для этого условно вариационной задаче (7) (8) ставится в соответствие семейство безусловных вариационных задач

$$\varPhi\left(N_1(h),\ldots,N_m(h),\eta_1,\ldots,\eta_p\right) = min, \qquad (10)$$

$$N_m(h), \; 0 \le m \le M.$$

Здесь функционал $\varPhi(N_1(h),\ldots,N_m(h),$ $\eta_1,\ldots,\eta_p)$ имеет вид

$$\varPhi\left(N_1(h),\ldots,N_m(h),\eta_1,\ldots,\eta_p\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{M} \int\limits_0^{h_0} N_m^{\,2}(h) dh +$$

$$+2\sum_{p=1}^{p} \eta_p \left(\varphi_p - \sum_{m=0}^{M} \int\limits_0^{h_0} N_m(h) Q_m^{\,p} dh\right), \qquad (11)$$

$\eta_p$ $p = 1,\ldots,P$ – множители Лагранжа, с помощью которых учтены условия (8) исходной задачи (4).

Для нахождения функций $N_m(h)$, $m = 0,\ldots,M$, доставляющих минимальное значение функционалу (11) необходимо вычислить производную Фреше и приравнять ее нулю. Опуская подробности вычисления, приведем окончательный результат. Функции $N_m(h)$, $m = 0,\ldots,M$, при которых функционал (10) принимает минимальное значение, можно представить в следующем виде

$$N_m(h) = \sum_{p=1}^{P} \eta_p Q_m^p(h), \; m = 0,\ldots,M. \qquad (12)$$

Множители Лагранжа $\eta_p$, $p = 1,\ldots,P$ в формуле (12) являются решением системы линейных алгебраических уравнений.

$$\sum_{q=1}^{P} Q_{pq}\eta_q = \varphi_p, \; p = 1,\ldots,P. \qquad (13)$$

Матричные элементы $Q_{pq}$ выражаются через функции $Q_m^p(h)$ и имеют вид

$$Q_{pq} = \sum_{m=0}^{M} \int_0^{h_0} Q_m{}^p(h) Q_m{}^q(h) dh, \quad (14)$$

$$p,q = 1,\ldots,P.$$

Как следует из (14), матрица $Q = \left(Q_{pq}\right)_{p,q=1}^{P}$ является симметричной и положительно полуопределенной матрицей, а ее размерность совпадает с количеством отсчетов угла места ИСЗ.

Таким образом, исходная задача лучевой радиотомографии сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений (13).

Поскольку величины $\varphi_p$, $p = 1,\ldots,P$ получаются в результате измерений, то они известны с некоторой погрешностью $б_p$

$$\varphi_p^б = \varphi_p + б_p, \; p = 1,\ldots,P. \quad (15)$$

Следовательно, при построении решения уравнений (13) следует находить устойчивые приближения решения системы уравнений

$$\sum_{q=1}^{P} Q_{pq} \eta_q = \varphi_p{}^б, \; p = 1,\ldots,P. \quad (16)$$

Как было указано выше, матрица системы уравнений (16) является симметричной и положительно полуопределенной. Поэтому для ее решения можно воспользоваться методом $\alpha$ регуляции Лаврентьева [7]. Суть метода в следующем. Представим систему (16) в матричной форме

$$Q\eta = \varphi_б. \quad (17)$$

Здесь $\eta = \left(\eta_p\right)_{p=1}$, $\varphi_б = (\varphi_p + б_p)_{p=1}^{P}$.

В соответствии с методом Лаврентьева уравнение (17) заменяется на регуляризованное уравнение

$$\alpha\eta_\alpha + Q\eta_\alpha = \varphi_б. \quad (18)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Как легко видеть, уравнение (18) при любом $\alpha > 0$ имеет единственное решение

$$\eta_\alpha = \left(\alpha I + Q\right)^{-1} \varphi_б. \quad (19)$$

Здесь $I$ – единичная матрица, $\left(\alpha I + Q\right)^{-1}$ – обратная матрица.

Выбор параметра $\alpha$ осуществляется по невязке

$$\left\|\varphi_б - Q\eta_\alpha\right\|^2 = б^2, \quad (20)$$

где $\|...\|$ – обозначает норму вектора в конечномерном пространстве,

$$б^2 = \sum_{p=1}^{P} б_p^2.$$

Обратную матрицу в (19) можно находить, например, с помощью разложения Холецкого [10].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исходная задача лучевой томографии сведена к решению системы уравнений (18) с помощью которого функция электронной концентрации $N(h,\tau)$ выражается в следующем виде

$$N(h,\tau) = \sum_{p=1}^{P} \eta_p^\alpha \sum_{m=0}^{M} Q_m^p(h) \left(\tau - \tau_i\right)^m, \quad (21)$$

$$Q_m^p(h) = \lambda r_e R \frac{\left(\beta_p - arccos\left(\dfrac{\cos\beta_p}{1+h}\right)\right)^m}{\sqrt{1 - \dfrac{cos^2\beta_p}{(1+h)^2}}}. \quad (22)$$

где $\left(\eta_p^\alpha\right)_{p=1}^{P}$ – решение системы уравнений (18).

Отметим, что разработанный подход к решению задач лучевой томографии легко обобщается на случай, когда имеется несколько приемников. Кроме того, в представлении (3) для функции электронной концентрации были выбраны полиномиальные функции $\left(\tau - \tau_i\right)^m$, $m = 0,\ldots,M$, которые без особого труда могут быть заменены на любую систему линейно независимых функций.

**Литература**


[1] *Kak A., Sney M.* Principles of Computerized Tomography Imaging. N.Y. IEEE Press, 1988.

[2] *Куницын В.Е., Терещенко Е.Д., Андреева Е.С.* Радиотомография ионосферы. М.: Наука. 2007. – 336 с.

[3] *Кравцов Ю.А., Орлов Ю И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. – 304 с.

[4] *Кравцов Ю.А., Тинин М.В., Книжин С. И.* Дифракционная томография неоднородной среды при сильных вариациях фазы. Радиотехника и Электроника. – 2011. – Т 26, №7. – С. 816–822.

[5] *Страхов В.Я, Страхов А.В.* Аппроксимационный подход к решению задач гравиметрии и магнитометрии. II. Новые методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью: Российский журнал наук о Земле, 1999. – Т. 1, 5. – С. 353–400.

[6] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения АН СССР; 1962. – 82 с.

[7] *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. Наука, 1978. – 226 с.

[8] *Страхов В.Н.* Каким методом георфизики должны заменить метод Лаврентьева нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений с симмметричными положительно определенными матрицами и приближенно заданными векторами правых частей. Вычислительные технологии. 2007. – Т. 12, № 6. – С. 109–123.

[9] *Васильев В.В.* Численные методы решения экстремальных задач. М. Наука, 1980. – 518 с.

[10] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М. Наука, 1984. – 318 с.

Поступила в редколлегию 15.11.2017

**Поединчук Анатолий Ефимович**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, зав. отдела дифракции и дифракционной электроники Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины. Научные интересы: численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, прямые и обратные задачи электродинамики.

**Лукин Константин Александрович**, фото и сведенья об авторе см. на стр. 128.

**Лукин Сергей Константинович**, окончил Харьковский Национальный Аэрокосмический ун-т «ХАИ» в 2008. С 2009 г. – мл. научный сотрудник отдела нелинейной динамики электронных систем в Институте радиофизики и Электроники им. О.Я. Усикова НАН Украины. Область интересов: цифровая обработка сигналов, в том числе в FPGA; программируемые шумовые радары; формирование когерентных изображений в наземных шумовых РСА; методы сжатых выборок (compressive sensing).

УДК 621.382.2.029.64

**Чисельно-аналітичний метод вирішення проблем променевої томографії** / А.Ю. Поединчук, К.О. Лукін, С.К. Лукін // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2017. – Том 16, № 3, 4. – С. 166–169.

У роботі пропонується чисельно-аналітичний метод вирішення проблем променевої томографії прозорих неоднорідних середовищ. Вхідною інформацією для цього класу задач є вимір фази хвилі, що пройшла через неоднорідне середовище. У геометричному наближенні фаза хвилі, що пройшла, виражається у вигляді інтеграла від показника заломлення середовища уздовж променя, що з'єднує передавач і приймач. У цьому випадку, коли можна знехтувати рефракцією (характерні розміри неоднорідностей перевищують радіус Френеля), промінь є прямою лінією, що з'єднує передавач і приймач. Значення таких інтегралів при різних положеннях передавача (приймача) використовуються у фазовій томографії для відновлення просторової структури великомасштабних неоднорідностей середовища.

*Ключові слова:* променева томографія, обернені задачі електродинаміки.

Бібліогр.: 10 найм.

UDC 621.382.2.029.64

**Numerical-analytical method for solving the problems of radiotomography** / A.Yu. Poedinchuk, K.A. Lukin, S.K. Lukin.// Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2017. – Vol. The paper proposes a numeric-analytical method for solving the problems of phase tomography of transparent inhomogeneous media. The input information for this class of problems is the measurement of the phase of waves passing through an inhomogeneous medium. In the geometric approximation, the phase of the transmitted wave grows in the form of an integral of the refractive index of the medium along the beam connecting a transmitter and a receiver. In the case where the refraction can be neglected (the characteristic dimensions of the inhomogeneity exceed the Fresnel radius), the ray is a straight line connecting the transmitter and the receiver. The values of such integrals at different positions of the transmitter (receiver) are used in phase tomography to reconstruct the spatial structure of large-scale medium inhomogeneities.

*Keywords:* ray tomography, inverse problems of electrodynamics.

Ref.: 10 items.