

ПОТОК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

С. Д. ПРИЙМЕНКО, К. А. ЛУКИН

Для электрических и магнитных зарядов и токов рассмотрены потоки электромагнитной энергии, которые формируются потенциальными электрическими и магнитными полями. Эти потоки, обусловлены электрическими и магнитными скалярными потенциалами, а также потенциальными и динамическими составляющими напряженностей электрического и магнитного полей. Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов.

Ключевые слова: электрические и магнитные заряды и токи, потоки электромагнитной энергии, потенциальные электрические и магнитные поля.

ВВЕДЕНИЕ

В ускорительной технике важную роль играют потенциальные электрические и магнитные поля. Последние возникают, в частности, при возбуждении электромагнитного поля через отверстия в волноводах и резонаторах. В этом случае потенциальная и вихревая составляющие напряженности электрического и магнитного полей, электрические заряды и токи носят реальный, а магнитные заряды и токи фиктивный характер. Однако при ненулевой нормальной компоненте вектора магнитной индукции на идеально проводящей поверхности необходимо вводить в рассмотрение поверхностные магнитные заряды. Известно, что введение в рассмотрение эквивалентного поверхностного магнитного тока в области отверстия существенно упрощает процедуру расчета.

В магнитодиэлектриках магнитный поляризационный ток возникает благодаря изменению во времени и пространстве элементарных магнитных диполей среды, т. е. он существует реально [1] (с.32). Такой подход был использован авторами книги [2], где рассмотрено распространение электромагнитных сигналов в межзвездной среде с атомарным водородом с очень малой плотностью.

Для электрических зарядов и токов при гармонической зависимости от времени наличие потенциальной составляющей напряженности электрического поля \vec{E}_e^p , сравнимой с вихревой составляющей электрического поля \vec{E}_e^r , пожалуй, впервые установлено в [3] (с.236). Для произвольной зависимости от времени аналогичный результат отмечается в обобщенном законе Кулона [4] (с.246). Однако слабо исследованным остается вопрос о потоке электромагнитной энергии при наличии как потенциального, так и вихревого электрического полей. При нулевой напряженности электрического поля в области источника частичный ответ на этот вопрос дан в [5] (с.123), где уравнение баланса энергии определяется через электрические скалярный ψ_e и векторный \vec{A}_e потенциалы.

Для магнитных зарядов и токов в уравнении баланса энергии электромагнитного поля плотность потока энергии в единицу времени определяется через напряженности электрического \vec{E}_m и магнитного \vec{H}_m полей [1] (с.88).

Целью выполненных исследований является определение потока электромагнитной энергии при наличии потенциальных электрических и магнитных полей.

В данной публикации показано, что при наличии электрических зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока ($\vec{j}_e + \partial \vec{D}_e / \partial t$, \vec{j}_e и \vec{D}_e есть плотность электрического тока и вектор электрического смещения соответственно). Перенос электромагнитной энергии в местах локализации электрического свободного заряда и в других точках пространства осуществляют электрический обобщенный ток и электрический ток смещения соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом ψ_m и плотностью обобщенного магнитного тока ($\vec{j}_m + \partial \vec{D}_m / \partial t$, \vec{j}_m и \vec{D}_m есть плотность магнитного тока и вектор магнитного смещения соответственно). Перенос электромагнитной энергии в местах локализации магнитного тока и в других точках пространства осуществляют магнитный обобщенный ток и магнитный ток смещения соответственно.

Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов в неограниченном однородном изотропном пространстве.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Теорема Пойнтинга

2.1.1. *Электрические заряды и токи.* При наличии электрических зарядов ρ_e и токов \vec{j}_e уравнение баланса энергии для электромагнитного поля получаем, подставляя (П.1.12) в (П.1.10)

$$\begin{aligned} -\partial\vec{A}_e/\partial t \cdot \vec{j}_e &= \text{div}[\partial\vec{A}_e/\partial t \times \vec{H}_e] - \\ -\vec{H}_e \cdot \partial\vec{B}_e/\partial t + \partial\vec{A}_e/\partial t \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом (П.1.3), $\vec{E}_e^p = -\text{grad}\psi$ и (П.1.6) получаем уравнение баланса энергии для электрического поля

$$\begin{aligned} -\text{grad}\psi_e \cdot \vec{j}_e &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) - \\ -\text{div}(\psi_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t) + \text{grad}\psi_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (2)$$

Объединяя (1), (2), принимая во внимание $\vec{E}_e = -\text{grad}\psi_e - \partial\vec{A}_e/\partial t$, находим при наличии потенциальной составляющей напряженности электрического поля, обусловленной электрическим скалярным потенциалом, уравнения баланса энергии электрического и электромагнитного полей в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_e \cdot \vec{j}_e &= -\text{div}(\psi_e \cdot (\vec{j}_e + \partial\vec{D}_e/\partial t)) - \\ -\text{div}[\vec{H}_e \times \partial\vec{A}_e/\partial t] - \vec{H}_e \cdot \partial\vec{B}_e/\partial t - \vec{E}_e \cdot \partial\vec{D}_e/\partial t. \end{aligned} \quad (3)$$

Сопоставляя (П.1.1) и (3), получаем

$$\vec{S}_e^{\psi j} + \vec{S}_e^{\psi} + \vec{S}_e^{\psi A} = \psi_e \cdot (\vec{j}_e + \partial\vec{D}_e/\partial t), \quad (4)$$

$$\vec{S}_e^A = [\vec{H}_e \times \partial\vec{A}_e/\partial t], \quad (5)$$

$$\vec{S}_e^{\psi j} = \psi_e \cdot \vec{j}_e, \quad (6)$$

$$\vec{S}_e^{\psi} = \psi_e \partial\vec{D}_e^{\psi}/\partial t = \psi_e \partial(-\epsilon_0 \text{grad}\psi_e)/\partial t, \quad (7)$$

$$\vec{S}_e^{\psi A} = \psi_e \partial\vec{D}_e^A/\partial t = \psi_e (-\epsilon_0 (\partial\vec{A}_e/\partial t))/\partial t, \quad (8)$$

где $\vec{S}_e^{\psi j}$; \vec{S}_e^{ψ} ; $\vec{S}_e^{\psi A}$ являются плотностями потока энергии в единицу времени, обусказанные электрическим скалярным потенциалом и плотностью тока свободных зарядов; электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей плотности электрического тока смещения; электрическим скалярным потенциалом и динамической составляющей плотности электрического тока смещения соответственно, а \vec{S}_e^A есть плотность потока энергии, обусловленная электрическим векторным потенциалом.

Из (П.1.9) и (4), (5)–(8) следует, что плотность потока энергии, которая формируется потенциальной составляющей напряженности электрического поля и обусловлена электрическим скалярным потенциалом, в местах локализации свободного заряда направлена

вдоль плотности электрического обобщенного тока, а в других точках пространства вдоль плотности электрического тока смещения.

Согласно (П.1.9) поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, обусловленным электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока.

Отметим, что при наличии только электрических зарядов и токов, напряженности электрического и магнитного полей с точностью до постоянных определяются соотношениями (1.90), (1.88) [1] (с.35)

$$\vec{E}_e = -\text{grad}\psi_e - \partial\vec{A}_e/\partial t, \quad (9)$$

$$\vec{H}_e = (1/\mu_0) \text{rot}\vec{A}_e. \quad (10)$$

При этом напряженность электрического \vec{E}_e поля включает как потенциальную, так и вихревую части, а напряженность магнитного поля \vec{H}_e есть строго вихревым вектором.

Соотношения (4) и (5) с энергетической точки зрения описывают поток электрической и электромагнитной энергии соответственно, а с кинематической точки зрения описывают продольную электрическую и поперечную электромагнитные волны.

Отметим, что если \vec{A}_e есть строго потенциальным вектором, согласно (10) и (5) $\vec{H}_e = 0$ и $\vec{S}_e^A = 0$, а поток энергии определяется (4), (6) – (7), т. е. за пределами свободного заряда имеет место поток электрической энергии, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей тока смещения.

2.1.2. *Магнитные заряды и токи.* При наличии магнитных зарядов ρ_m и токов \vec{j}_m уравнение баланса энергии для электромагнитного поля получаем, подставляя (П.2.18) в (П.2.15)

$$\begin{aligned} -(\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \vec{j}_m &= -\text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] - \\ -\vec{E}_m \cdot (\partial\vec{D}_m/\partial t) + (\partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot (\partial\vec{B}_m/\partial t). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (П.2.7), (П.2.8) и (П.2.9), (П.2.12) получаем уравнение баланса энергии для магнитного поля

$$\begin{aligned} -\text{grad}\psi_m \cdot \vec{j}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \partial\vec{B}_m/\partial t)) + \\ + \text{grad}\psi_m \cdot \partial\vec{B}_m/\partial t. \end{aligned} \quad (12)$$

Объединяя (11), (12), находим уравнение баланса энергии как для магнитного так и электромагнитного полей при наличии магнитных зарядов и токов

$$\begin{aligned} (-\text{grad}\psi_m - \partial\vec{A}_m/\partial t) \cdot \vec{j}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \\ + \partial\vec{B}_m/\partial t)) - \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m/\partial t] - \end{aligned}$$

$$-\vec{E}_m \cdot (\partial \vec{D}_m / \partial t) + (\text{grad} \psi_m + \partial \vec{A}_m / \partial t) \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \quad (13)$$

С учетом (П.2.14) перепишем уравнение баланса энергии для магнитных зарядов и токов (13) в виде

$$\begin{aligned} H_m \cdot \vec{J}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{J}_m + \partial \vec{B}_m / \partial t)) - \\ &- \text{div}[\vec{E}_m \times (-1) \partial \vec{A}_m / \partial t] - \vec{E}_m \cdot (\partial \vec{D}_m / \partial t) - \\ &- H_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \end{aligned} \quad (14)$$

Сопоставляя (П.2.5) и (14), получаем поток магнитной и электромагнитной энергий при наличии только сторонних магнитных зарядов и токов

$$\vec{S}_m^{\psi j} + \vec{S}_m^{\psi} + \vec{S}_m^{\psi A} = \psi_m \cdot (\vec{J}_m + \partial \vec{B}_m / \partial t), \quad (15)$$

$$\vec{S}_m^A = [\vec{E}_m \times \partial \vec{A}_m / \partial t] = [\vec{E}_m \times (-1) \vec{H}_m^d], \quad (16)$$

$$\vec{S}_m^{\psi j} = \psi_m \cdot \vec{J}_m, \quad (17)$$

$$\vec{S}_m^{\psi} = \psi_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t = \psi_m \cdot \partial(-\mu_0 \text{grad} \psi_m) / \partial t, \quad (18)$$

$$\vec{S}_m^{\psi A} = \psi_m \cdot \partial \vec{B}_m^A / \partial t = -\psi_m \cdot \mu_0 (\partial^2 \vec{A}_m / \partial t^2), \quad (19)$$

где $\vec{S}_m^{\psi j}$; \vec{S}_m^{ψ} ; $\vec{S}_m^{\psi A}$ – плотности потока энергии в единицу времени, обусловленные магнитным скалярным потенциалом и плотностью тока магнитных зарядов; магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей плотности магнитного тока смещения; магнитным скалярным потенциалом и динамической составляющей плотности магнитного тока смещения соответственно, а \vec{S}_m^A – плотность потока энергии, обусловленная магнитным векторным потенциалом.

Из (П.2.12) и (15), (16)–(19) следует, что плотность потока энергии, формируемая потенциальной составляющей напряженности магнитного поля и обусловленная магнитным скалярным потенциалом, в местах локализации магнитного тока направлена вдоль плотности магнитного обобщенного тока, а в других точках пространства вдоль плотности магнитного тока смещения.

Согласно (П.2.12) поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, обусловленным магнитным скалярным потенциалом и плотностью обобщенного магнитного тока.

Отметим, что при наличии только магнитных зарядов и токов, напряженности электрического и магнитных полей согласно (П.2.17), (П.2.14) есть

$$\vec{E}_m = -(1/\epsilon_0) \text{rot} \vec{A}_m, \quad (20)$$

$$\vec{H}_m = -\text{grad} \psi_m - \partial \vec{A}_m / \partial t. \quad (21)$$

При этом напряженность электрического поля \vec{E}_m есть строго вихревым вектором, а напряженность магнитного поля \vec{H}_m включает как потенциальную, так и вихревую части.

Соотношения (15) и (16) с энергетической точки зрения описывают поток магнитной и электромагнитной энергии соответственно, а с кинематической точки зрения описывают продольную магнитную и поперечную электромагнитные волны.

Отметим, что если \vec{A}_m есть строго потенциальным вектором, то согласно (20) и (16) $\vec{E}_e = 0$ и $\vec{S}_m^A = 0$, а поток энергии определяется (15), (17)–(18), т. е. за пределами магнитного заряда имеет место поток магнитной энергии, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей тока смещения.

2.1.3. *Плоский лист электрического тока.* Для плоского листа электрического тока в однородном изотропном пространстве с поверхностной плотностью тока J_0^e , направленной вдоль оси Oх, и частотой ω , используя результаты [1] (с.78), находим сначала электрические векторный \vec{A}_e и скалярный ψ_e потенциалы, а потом получаем для медленной волны тока $v_e < c$ (v_e есть скорость свободных зарядов)

$$\begin{aligned} S_{ex}^{\psi} &= (1/2) \psi_e \cdot (\partial D_{ex}^{\psi} / \partial t) = \\ &= |J_0^e|^2 / 8 \cdot \beta_e / \epsilon_0 \omega \cdot \beta_e^2 / (\beta_e^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_{ex}^{\psi A} &= (1/2) \psi_e \cdot (\partial D_{ex}^A / \partial t) = |J_0^e|^2 / 8 \times \\ &\times (-\beta_e / \epsilon_0 \omega) \cdot (k^2 / (\beta_e^2 - k^2)) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} S_{ex} &= S_{ex}^{\psi} + S_{ex}^{\psi A} = \\ &= |J_0^e|^2 / 8 \cdot \beta_e / \epsilon_0 \omega \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_e^2 - k^2} y}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\beta_e = \omega / v_e$, $k = \omega / c$, знаки плюс и минус в показателе экспоненты выбираются для $y < 0$ и $y > 0$ соответственно. Соотношение (24) совпадает с выражением для S_{ex} [1] (с.81), которое получено классическим образом.

2.1.4. *Плоский лист магнитного тока.* Для плоского листа стороннего магнитного тока в однородном изотропном пространстве с поверхностной плотностью J_0^m , направленной вдоль оси Oх, и частотой ω , используя результаты [1] (с.80, с.87), находим сначала магнитный векторный \vec{A}_m и скалярный ψ_m потенциалы, а затем получаем для медленной волны тока

$v_m < c$ (v_m есть фазовая скорость волны магнитного тока)

$$S_{mx}^{\Psi} = (1/2)\psi_m \cdot (\partial B_{mx}^{\Psi} / \partial t) = -|J_0^m|^2 / 8 \times \\ \times \beta_m / \mu_0 \omega \cdot \beta_m^2 / (\beta_m^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (25)$$

$$S_{mx}^{\Psi A} = (1/2)\psi_m \cdot (\partial B_{mx}^A / \partial t) = |J_0^m|^2 / 8 \times \\ \times \beta_m / \mu_0 \omega \cdot k^2 / (\beta_m^2 - k^2) \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (26)$$

$$S_{mx} = S_{mx}^{\Psi} + S_{mx}^{\Psi A} = \\ = -|J_0^m|^2 / 8 \cdot \beta_m / \mu_0 \omega \cdot e^{\pm 2\sqrt{\beta_m^2 - k^2} y}, \quad (27)$$

где $\beta_m = \omega / v_m$, $k = \omega / c$, знаки плюс и минус в показателе экспоненты выбираются для $y < 0$ и $y > 0$ соответственно. Соотношение (27) совпадает с выражением для S_{mx} [1] (с.88), которое получено классическим образом.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

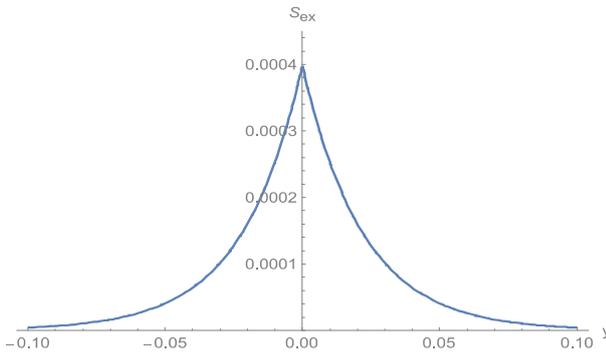


Рис. 1. Зависимость $S_{ex}(y)$

($|J_0^e| = 2.82 \cdot 10^{-3} A/m$, $v_e = 2.82 \cdot 10^8 m/s$, $\omega = 1.49 \cdot 10^{10} Hz$)

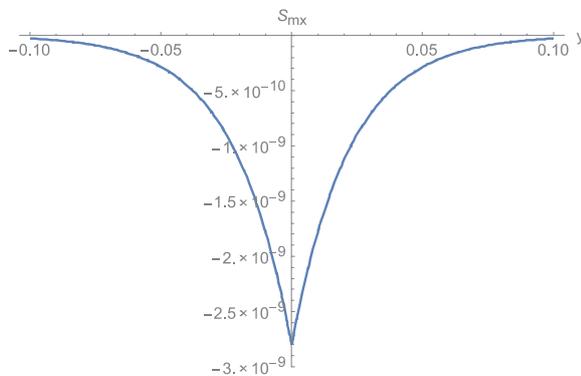


Рис. 2. Зависимость $S_{mx}(y)$

($|J_0^m| = 2.82 \cdot 10^{-3} V/m$, $v_e = 2.82 \cdot 10^8 m/s$
 $\omega = 1.49 \cdot 10^{10} Hz$)

Зависимости результирующих плотностей потока энергии в единицу времени S_{ex} и S_{mx} от поперечной координаты y , рассчитанные согласно (24) и (27), построены на рис. 1 и рис. 2 соответственно, отражая свойства поверхностных волн, которые распространяются вдоль электрического и магнитного листов тока.

4. ВЫВОДЫ

При наличии электрических зарядов и токов потоки энергии в единицу времени, обусловленные электрическими скалярным и векторным потенциалами представляют собой потоки электрической и электромагнитной энергии соответственно.

При наличии электрических зарядов и токов, когда динамическая составляющая напряженности электрического поля есть строго потенциальным вектором, вектор Пойнтинга, который определяет поток электромагнитной энергии, равен нулю. Имеет место поток только электрической энергии, которая за пределами свободного заряда обусловлена электрическим скалярным потенциалом и потенциальной составляющей электрического тока смещения.

При наличии электрических зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности электрического поля совпадает с потоком, который обусловлен электрическим скалярным потенциалом и плотностью обобщенного электрического тока.

Перенос электрической энергии в местах локализации электрического свободного заряда и в других точках пространства осуществляют электрический обобщенный ток и электрический ток смещения соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов потоки энергии, обусловленные магнитными скалярным и векторным потенциалами представляют собой потоки магнитной и электромагнитной энергии соответственно.

При наличии магнитных зарядов и токов, когда динамическая составляющая напряженности магнитного поля является строго потенциальным вектором, вектор Пойнтинга, который определяет поток электромагнитной энергии, равен нулю. Имеет место поток только магнитной энергии, которая за пределами магнитного заряда обусловлена магнитным скалярным потенциалом и потенциальной составляющей магнитного тока смещения.

При наличии магнитных зарядов и токов поток вектора Пойнтинга для потенциальной составляющей напряженности магнитного поля совпадает с потоком, который обусловлен магнитным скалярным потенциалом и плотностью обобщенного магнитного тока

Перенос магнитной энергии в местах локализации магнитного тока и в других точках пространства осуществляет магнитный обобщенный ток и магнитный ток смещения соответственно.

При наличии только электрических зарядов и токов, напряженность электрического поля включает как потенциальную, так и вихревую части, а напряженность магнитного поля есть строго вихревым вектором.

При наличии только магнитных зарядов и токов напряженность электрического поля есть строго вихревым вектором, а напряженность магнитного поля включает как потенциальную, так и вихревую части. Энергетические соотношения апробированы на примере плоских листов электрического и магнитного токов в неограниченном однородном изотропном пространстве.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Используем уравнение баланса энергии электромагнитного поля [6] (с.286) для электрических зарядов ρ_e и токов \vec{j}_e

$$\vec{E}_e \cdot \vec{j}_e = -\partial u_e / \partial t - \text{div} \vec{S}_e, \quad (\text{П.1.1})$$

без конкретизации плотностей электромагнитной энергии u_e и ее потока \vec{S}_e . Для получения явного вида u_e и \vec{S}_e привлекаем первое уравнение Максвелла

$$\vec{j}_e = \text{rot} \vec{H}_e - \partial \vec{D}_e / \partial t, \quad (\text{П.1.2})$$

$$\vec{E}_e \cdot \vec{j}_e = \vec{E}_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e - \vec{E}_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t. \quad (\text{П.1.3})$$

Потенциальная составляющая напряженности электрического поля $\vec{E}_e^p = -\text{grad} \psi_e$. Воспользуемся тождеством

$$\text{div}(\psi_e \cdot \vec{M}) = \psi_e \cdot \text{div} \vec{M} + \vec{M} \cdot \text{grad} \psi_e, \quad (\text{П.1.4})$$

где \vec{M} – произвольный вектор.

Полагая $\vec{M} = \text{rot} \vec{H}_e$, получаем

$$\text{div}(\psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e) = \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \quad (\text{П.1.5})$$

С учетом (П.1.2), (П.1.5)

$$\begin{aligned} \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e &= \text{div}(\psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e) = \\ &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) + \text{div}(\psi_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

Привлекаем тождество

$$\text{div}[\vec{C} \times \vec{P}] = \vec{P} \cdot \text{rot} \vec{C} - \vec{C} \cdot \text{rot} \vec{P}, \quad (\text{П.1.7})$$

где \vec{C} и \vec{P} – произвольные векторы.

Полагая $\vec{C} = -\text{grad} \psi_e$, $\vec{P} = \vec{H}_e$ получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad} \psi_e \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \text{rot}(-\text{grad} \psi_e) + \\ &+ \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e = \text{grad} \psi_e \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

С учетом (П.1.8) и (П.1.6)

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad} \psi_e \times \vec{H}_e] &= \text{div}(\psi_e \cdot \vec{j}_e) + \\ &+ \text{div}(\psi_e \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t) = \text{div}(\psi_e \cdot (\vec{j} + \partial \vec{D}_e / \partial t)). \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

Динамическую составляющую напряженности электрического поля, связанную с векторным потенциалом $\vec{E}_e^d = -\partial \vec{A}_e / \partial t$ [7] (с.218), подставим в (П.1.3)

$$\begin{aligned} -\partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \vec{j}_e &= -\partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e + \\ &+ \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \partial \vec{D}_e / \partial t. \end{aligned} \quad (\text{П.1.10})$$

Полагая в (П.1.7), $\vec{C} = -\partial \vec{A}_e / \partial t$, $\vec{P} = \vec{H}_e$ имеем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\partial \vec{A}_e / \partial t \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \text{rot}(-\partial \vec{A}_e / \partial t) \\ &+ \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.11})$$

Подставляя $\vec{H}_e = (1/\mu_0) \cdot \text{rot} \vec{A}_e$ с учетом $\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_e = \text{rot} \vec{A}_e$ в (П.1.11), получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[\partial \vec{A}_e / \partial t \times \vec{H}_e] &= \vec{H}_e \cdot \partial \vec{B}_e / \partial t - \\ &- \partial \vec{A}_e / \partial t \cdot \text{rot} \vec{H}_e. \end{aligned} \quad (\text{П.1.12})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

При наличии только сторонних магнитных зарядов ρ_m и токов \vec{j}_m , уравнения Максвелла запишутся в виде [1] (с.34)

$$\text{rot} \vec{H}_m = -\partial \vec{D}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.1})$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -\vec{j}_m - \partial \vec{B}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.2})$$

$$\text{div} \vec{D}_m = 0, \quad (\text{П.2.3})$$

$$\text{div} \vec{B}_m = \rho_m. \quad (\text{П.2.4})$$

Используя принцип перестановочной двойственности [1] (с.34), уравнение баланса энергии электромагнитного поля [6] для сторонних магнитных зарядов и токов запишется в виде

$$\vec{H}_m \cdot \vec{j}_m = -\partial u_m / \partial t - \text{div} \vec{S}_m, \quad (\text{П.2.5})$$

где u_m – объемная плотность электромагнитной энергии, а \vec{S}_m – поток электромагнитной энергии.

Для получения явного вида u_m и \vec{S}_m привлекаем второе уравнение Максвелла (П.2.2)

$$\vec{j}_m = -\text{rot} \vec{E}_m - \partial \vec{B}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.6})$$

$$-\vec{H}_m \cdot \vec{j}_m = \vec{H}_m \cdot \text{rot} \vec{E}_m + \vec{H}_m \cdot \partial \vec{B}_m / \partial t. \quad (\text{П.2.7})$$

Согласно (1.98) [1] (с.35) потенциальная часть напряженности магнитного поля, обусловленная магнитными зарядами и токами H_m^p

$$\vec{H}_m^p = -\text{grad}\psi_m, \quad (\text{П.2.8})$$

где ψ_m – магнитный скалярный потенциал.

Используя тождество (П.1.4), заменяя ψ_e на ψ_m , считая, $\vec{M} = \text{rot}\vec{E}_m$, получаем

$$\begin{aligned} \text{div}(\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m) &= \psi_m \cdot \text{div}\text{rot}\vec{E}_m + \\ + \text{rot}\vec{E}_m \cdot \text{grad}\psi_m &= \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m. \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

С учетом (П.2.2), (П.2.9) находим

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m &= \text{div}(\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m) = \\ &= -\text{div}(\psi_m \cdot \vec{j}_m) - \text{div}(\psi_m \cdot \partial\vec{B}_m / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.10})$$

Привлекая тождество (П.1.7), полагая $\vec{C} = -\text{grad}\psi_m$, $\vec{P} = \vec{E}_m$, получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad}\psi_m \times \vec{E}_m] &= \vec{E}_m \cdot \text{rot}(-\text{grad}\psi_m) + \\ + \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m &= \text{grad}\psi_m \cdot \text{rot}\vec{E}_m. \end{aligned} \quad (\text{П.2.11})$$

Согласно (П.2.10), (П.2.11)

$$\begin{aligned} \text{div}[-\text{grad}\psi_m \times \vec{E}_m] &= \\ &= \text{div}(\psi_m \cdot (\vec{j}_m + \partial\vec{B}_m / \partial t)). \end{aligned} \quad (\text{П.2.12})$$

Составляющую напряженности магнитного поля, связанную с магнитным векторным потенциалом \vec{A}_m

$$\vec{H}_m^d = (-1)(\partial\vec{A}_m / \partial t), \quad (\text{П.2.13})$$

по аналогии с динамической составляющей напряженности электрического поля назовем динамической составляющей напряженности магнитного поля.

Для среды без потерь (1.98) [1] (с.35) с учетом (П.2.8), (П.2.13) имеем

$$\vec{H}_m = \vec{H}_m^p + \vec{H}_m^d = -\text{grad}\psi_m - \partial\vec{A}_m / \partial t, \quad (\text{П.2.14})$$

Подставим \vec{H}_m^d в (П.2.7)

$$\begin{aligned} (\partial\vec{A}_m / \partial t) \cdot \vec{j}_m &= -(\partial\vec{A}_m / \partial t) \cdot \text{rot}\vec{E}_m - \\ - (\partial\vec{A}_m / \partial t) \cdot (\partial\vec{B}_m / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.15})$$

Полагая в (П.1.7) $\vec{C} = \vec{E}_m$, $\vec{P} = -\partial\vec{A}_m / \partial t$, получаем

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m / \partial t] &= -\partial\vec{A}_m / \partial t \cdot \text{rot}\vec{E}_m + \\ + \vec{E}_m \cdot \text{rot}(\partial\vec{A}_m / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.16})$$

Принимая во внимание (1.97) [1] (с.35), имеем

$$\vec{D}_m = \varepsilon_0 \vec{E}_m = (-1)\text{rot}\vec{A}_m. \quad (\text{П.2.17})$$

Откуда записываем соотношение (П.2.16) в виде

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{E}_m \times (-1)\partial\vec{A}_m / \partial t] &= -\vec{A}_m / \partial t \cdot \text{rot}\vec{E}_m - \\ - \vec{E}_m \cdot (\partial\vec{D}_m / \partial t). \end{aligned} \quad (\text{П.2.18})$$

Литература

- [1] Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П.. Электродинамика и распространение радиоволн. М: «Сов. радио», 1979.
- [2] Harmuth H. F., Lukin K. A. Interstellar Propagation of Electromagnetic Signals. N. Y.: «Kluwer Academic/Plenum Publ.», 2000.
- [3] В. Пановский, М. Филипп. Классическая электродинамика. М: «Физматгиз», 1963.
- [4] J. D. Jackson. Classical electrodynamics. Third Edition. «John Wiley», 1998.
- [5] Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма. М: «Гос. изд. техн.- теор. лит», 1948.
- [6] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т.6. М: «Мир», 1966.
- [7] С. Щелкунов, Г. Фриис. Антенны. М «Сов. радио», 1955.

Поступила в редколлегию 12.01.2018



Прийменко Сергей Дмитриевич, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник, Институт плазменной электроники и новых методов ускорения ННЦ ХФТИ НАНУ. Область научных интересов: переходное излучение; вибраторные антенны, возбуждаемые релятивистским электронным пучком; интегральные уравнения макроскопической электродинамики.

Лукин Константин Александрович, фото и сведения об авторе см. на стр. 28

УДК 537.87

Прийменко С. Д. Потік електромагнітної енергії за наявності потенційних електричних і магнітних полів / С. Д. Прийменко, К. О. Лукін // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2018. – Том 17, № 1, 2. – С. 28–34.

Для електричних і магнітних зарядів та струмів розглянуто потоки електромагнітної енергії, які формуються потенційними електричними і магнітними полями. Ці потоки обумовлені електричними і магнітними скалярними потенціалами, а також потенційними і динамічними складовими напруженостей електричного і магнітного полів. Енергетичні співвідношення апробовані на прикладі плоских листів електричного і магнітного струмів.

Ключові слова: електричні та магнітні заряди і струми, потоки електромагнітної енергії, потенційні електричні і магнітні поля.

Лл. 02. Бібліогр.: 07 найм.

UDC 537.87

Prijmenko S. D. **Electromagnetic Energy Flows at the Presence of Potential Electric and Magnetic Fields** / S. D. Prijmenko, K. A. Lukin // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2018. – Vol. 17. № 1, 2. – P. 28–34.

Electromagnetic energy flows for electric and magnetic charges and currents are considered which are formed by potential electric and magnetic fields. These flows are caused by electric and magnetic scalar potentials, as well as by potential and dynamic components of the electric and magnetic field strengths. The energy relationships are approved using flat sheets of electric and magnetic currents as an example.

Keywords: electric and magnetic charges and currents, fluxes of electromagnetic energy, potential electric and magnetic fields.

Fig. 02. Ref.: 07 items.