

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ НАВАНТАЖЕННЯ КОЛІННОГО СУГЛОБА У ФРОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Проф. О. М. Хвисяк, К. Б. Пустовойт, д-р мед. наук Б. А. Пустовойт\*,  
М. Ю. Карпінський\*, О. Д. Карпінська\*

Харківська медична академія післядипломної освіти,

\*ДУ «Інститут патології хребта та суглобів ім. проф. М. І. Ситенка НАМНУ», м. Харків

*У статті на математичних моделях фронтальної площини колінного суглоба визначено особливості функціонування суглоба за різних видів навантаження й порушень осьових відносин.*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ НАГРУЗКИ КОЛЕННОГО СУСТАВА ВО ФРОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Проф. А. Н. Хвисяк, К. Б. Пустовойт,  
д-р мед. наук Б. А. Пустовойт\*,  
М. Ю. Карпинский\*, Е. Д. Карпинская\*

*В статье на математических моделях фронтальной плоскости коленного сустава определены особенности функционирования сустава при различных видах нагрузки и нарушениях осевых отношений.*

## THE MATHEMATICAL MODELING OF THE KNEE JOINT IN CONDITIONS OF LOADING IN THE FRONTAL PLANE

A. N. Khvisyuk, K. B. Pustovoyt, B. A. Pustovoyt\*,  
M. Yu. Karpynskyy\*, E. D. Karpynskaya\*

*On the mathematical models of the knee joint in the frontal plane are defined characteristics of functioning knee joint depending on different loads and disorders the axis.*

Фронтальні деформації (варус-вальгус) та деформації в сагітальній площині є агресивно-негативним компонентом патології колінного суглоба [4; 7]. Вони присутні за вродженої патології, диспластичної (зі спадкоємним нахилом) патології, посттравматичних станів, що призводять до поступового і невідворотного руйнування структур колінного суглоба – гонартрозу [2; 5]. Кінцевий результат цього процесу для хворого – інвалідність [6].

Одним із найважчих серед цих питань для лікаря є питання порушення навантажень суглоба та всієї кінцівки та те, як вони зміняться після втручання. Важливим є, яка саме методика втручання буде найбільш ефективною для даного хворого. У час комп'ютерної ери ці питання доцільно вирішувати на базі створення індивідуальної комп'ютерної моделі колінного суглоба хворого [1].

Багаторічний клінічний досвід з даної патології та наявність в інституті лабораторії біомеханіки, рентгенографічного архіву,

обчислювальної техніки і програмного забезпечення дозволяють нам провести дослідження, що буде достатнім для формування власної теоретичної бази (математичної, біомеханічної, кінематичної й інших моделей колінного суглоба). Це надасть великому колу фахівців можливість використовувати розроблені комп'ютерні моделі та методики планування оперативних втручань для кожного хворого.

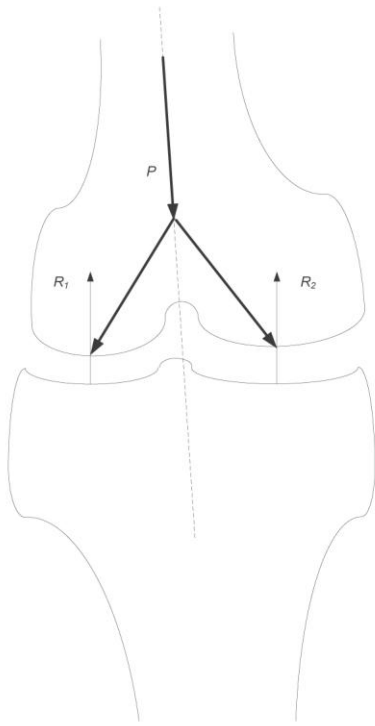
**Мета** роботи – дослідити особливості функціонування колінного суглоба за різних видів навантажень та порушень осьових співвідношень у фронтальній площині на математичних моделях.

## МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Для реалізації вказаної мети ми застосували метод графо-математичного аналізу розрахунків сил, що діють у колінному суглобі, із побудовою графіків залежності цих сил від деяких параметрів колінного суглоба у фронтальній площині.

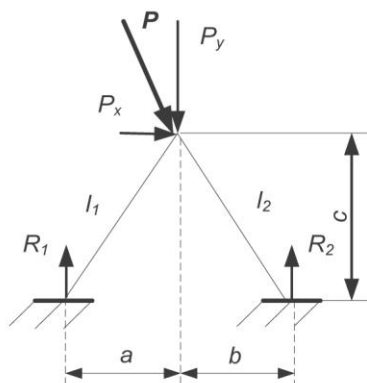
**РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХНЄ ОБГОВОРЕННЯ**

Розглянемо умови навантаження колінного суглоба у фронтальній площині. Стегнову кістку у фронтальній площині можна уявити як конструкцію з двома опорами (виростками) (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема навантаження виростків стегнової кістки

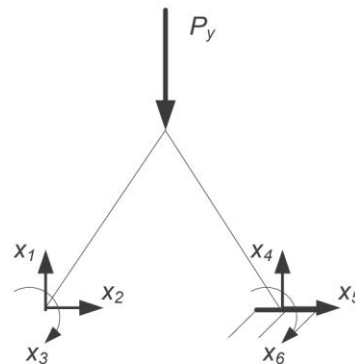
Логічно передбачити, що зміна кута докладання сили дії ваги людини ( $P$ ) (за варусної або вальгусної деформації) призведе до перерозподілу навантажень на виростки стегнової кістки та, як наслідок, їхньої деформації. Спробуємо розрахувати зміни величини навантаження виростків стегна від величини варусної (або вальгусної) деформації суглоба (рис. 2).



**Рис. 2.** Розрахункова схема навантаження виростків стегнової кістки

На схемі (рис. 2) стегнову кістку подано як двоопорну механічну систему, на вершину якої діє сила ваги людини  $P$ . Кут нахилу сили  $P$  будемо змінювати варіацією вертикальної  $P_y$  та горизонтальної  $P_x$  її складових. Плечі опор мають довжину  $l_1$  та  $l_2$ , горизонтальні проекції яких дорівнюють  $a$  та  $b$ , відповідно, а вертикальна проекція дорівнює величині  $c$ . Для досягнення нашої мети потрібно розрахувати величини сил реакції опори  $R_1$  та  $R_2$ .

Вирішення поставленого завдання почнемо з того, що звільнимо опору 1 і докладемо до неї одиничну силу (що дорівнює 1 Н), а також розрахуємо сили, що виникають у системі за такого впливу (рис. 3).



**Рис. 3.** Схема розрахунку реакції системи на вплив одиничної сили

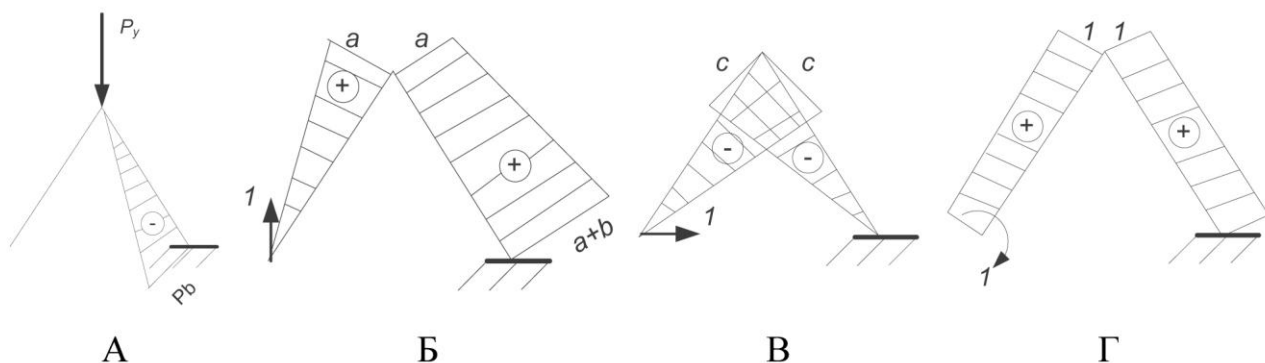
Запишемо систему рівнянь (1), котра описує рівновагу системи на опорі 1, що наведена на рис. 3 [3]:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0, \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $x_1$  – величина вертикальної складової сили реакції опори 1;  $x_2$  – величина горизонтальної складової сили реакції опори 1;  $x_3$  – величина крутного моменту, що діє на опору 1;  $\delta_{11}$ – $\delta_{33}$  – величини переміщень, викликаних відповідними силами;  $\Delta_{1P}$ – $\Delta_{3P}$  – величини переміщень, викликаних відповідними моментами.

Наступним етапом нашої роботи буде побудова епюри сил та моментів, що діють на систему під впливом одиничних сил (рис. 4).

Для розрахунку величин переміщень у системі використаємо довідкові рівняння (2) для різних форм епюр [3]:



**Рис. 4.** Епюри сил та моментів, що виникають у системі: А – під впливом вертикальної складової сили ваги тіла людини; Б – під впливом вертикальної складової одиничної сили реакції опори; В – під впливом горизонтальної складової одиничної сили реакції опори; Г – під впливом одиничного моменту сили реакції опори

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} l_1 a a + \frac{1}{6} \left( a(2a + (a + b)) + (a + b)(2(a + b) + a) \right) l_2 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} l_1 a^2 + \frac{1}{6} \left( 3a^2 + ab + 2a^2 + 4ab + 2b^2 + a^2 + ab \right) l_2 \right] = \quad (2) \\ &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} l_1 a^2 + \frac{1}{6} l_2 (6a^2 + 2b^2 + 6ab) \right] = \\ &= \frac{1}{3EJ} (l_1 a^2 + 3l_2 a^2 + l_2 b(b + 3a)). \end{aligned}$$

У закінченому вигляді отримуємо рівняння (3):

$$\delta_{11} = \frac{1}{3EJ} (a^2 (l_1 + 3l_2) + l_2 b (b + 3a)), \quad (3)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу;

$J$  – момент інерції.

Далі – рівняння (4)–(8):

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} a c l_1 + \frac{1}{6} a l_2 (a + 2(a + b)) \right] = \\ &= -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} a c l_1 + \frac{1}{2} a^2 l_2 + \frac{1}{3} a b l_2 \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{a}{EJ} \left[ \frac{1}{3} c l_1 + \left( \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b \right) l_2 \right],$$

$$\begin{aligned} \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} a l_1 + \frac{1}{2} (a + (a + b)) l_2 \right] = \quad (5) \\ &= \frac{1}{2EJ} (a l_1 + (2a + b) l_2), \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{3} l_1 c^2 + \frac{1}{3} l_2 c^2 \right] = \frac{c^2}{3EJ} (l_1 + l_2), \quad (6)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} c l_1 + \frac{1}{2} c l_2 \right] = -\frac{c}{2EJ} (l_1 + l_2), \quad (7)$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} (l_1 + l_2). \quad (8)$$

За формулами (9)–(11) визначимо переміщення, що викликані дією крутного моменту сили  $P$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{P_Y}{EJ} \left[ \frac{1}{6} b l_2 (a + 2(a + b)) \right] = \quad (9) \\ &= -\frac{P_Y b l_2 (3a + 2b)}{6EJ}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{P_Y}{EJ} \left[ \frac{1}{6} b c l_2 \right] = \frac{P_Y b c l_2}{6EJ}, \quad (10)$$

$$\Delta_{3P} = -\frac{P_Y}{EJ} \left[ \frac{1}{2} b l_2 \right] = -\frac{P_Y b l_2}{2EJ}. \quad (11)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (1), для чого перенесемо вільні члени до правої частини рівнянь системи (12):

$$\begin{cases} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{13} x_3 = -\Delta_{1P}, \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \delta_{23} x_3 = -\Delta_{2P}, \\ \delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_2 + \delta_{33} x_3 = -\Delta_{3P}. \end{cases} \quad (12)$$

Подамо коефіцієнти рівнянь у вигляді матриці (13):

$$A = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

За формулами Крамера корені рівнянь визначаються як (14):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\det A}, \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\det A}, \\ x_3 &= \frac{\Delta_3}{\det A}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $\det A$  – детермінант матриці  $|A|$  (23), що визначається як (15):

$$\begin{aligned} \det A &= \delta_{11} \delta_{22} \delta_{33} + \delta_{12} \delta_{23} \delta_{31} + \delta_{21} \delta_{13} \delta_{32} - \\ &- \delta_{13} \delta_{22} \delta_{31} - \delta_{11} \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{12} \delta_{21} \delta_{33}. \end{aligned} \quad (15)$$

Величини  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  визначаються заміною відповідного стовпця матриці  $|A|$  (13) стовпцем вільних членів (16)–(18):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\Delta_{1P} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ -\Delta_{2P} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ -\Delta_{3P} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Delta_{1P} \delta_{22} \delta_{33} - \Delta_{3P} \delta_{12} \delta_{23} - \\ &- \Delta_{2P} \delta_{13} \delta_{32} + \Delta_{3P} \delta_{13} \delta_{22} + \Delta_{1P} \delta_{23} \delta_{32} + \Delta_{2P} \delta_{12} \delta_{33}; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & -\Delta_{1P} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & -\Delta_{2P} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & -\Delta_{3P} & \delta_{33} \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -\Delta_{2P} \delta_{12} \delta_{33} - \Delta_{1P} \delta_{23} \delta_{31} - \\ &- \Delta_{3P} \delta_{13} \delta_{21} + \Delta_{2P} \delta_{13} \delta_{31} + \Delta_{3P} \delta_{12} \delta_{23} + \Delta_{1P} \delta_{21} \delta_{33}; \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & -\Delta_{1P} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & -\Delta_{2P} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & -\Delta_{3P} \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= -\Delta_{3P} \delta_{11} \delta_{22} - \Delta_{2P} \delta_{12} \delta_{31} - \\ &- \Delta_{1P} \delta_{21} \delta_{32} + \Delta_{1P} \delta_{22} \delta_{31} + \Delta_{2P} \delta_{11} \delta_{32} + \Delta_{3P} \delta_{12} \delta_{21}. \end{aligned}$$

Після підстановки значень коефіцієнтів  $\delta$  та  $\Delta$  із виразів (2)–(11) можемо отримати корені рівнянь.

Аналогічно визначаються величини сил та моментів, що виникають від дії горизонтальної складової сили ваги тіла людини (рис. 5).

Значення величин реакції опори 2 та крутних моментів, що діють на неї, визначаються за рівняннями рівноваги:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - P_Y = 0, \\ -P_X + x_2 + x_5 = 0, \\ x_4(a + b) - P_Y a + P_X c + x_6 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

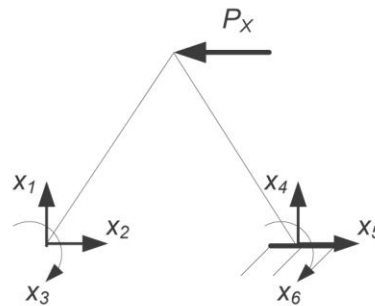


Рис. 5. Схема розрахунку сил та моментів, що виникають під дією горизонтальної складової ваги тіла людини

За системою рівнянь (19) виразимо значення сил та моменту, що діють на опору 2:

$$\begin{cases} x_4 = P_Y - x_1, \\ x_5 = P_X - x_2, \\ x_6 = P_Y a - P_X c - x_4. \end{cases} \quad (20)$$

Підставимо до третього рядка (20) значення сили  $x_4$  з рівняння в першому рядку і отримаємо (21):

$$\begin{cases} x_4 = P_1 - x_1, \\ x_5 = P_2 - x_2, \\ x_6 = P_1 a - P_2 c - P_1 + x_1. \end{cases} \quad (21)$$

У зв'язку з великим обсягом обчислювань та складністю кінцевих розрахункових рівнянь розв'яжемо задачу за допомогою програмного пакета, що використовує метод кінцевих елементів. Для цього прийемо значення сили  $P$  таким, що дорівнює середній вазі тіла людини, тобто  $P = 700$  Н. Оскільки значення модуля пружності матеріалу  $E$  та моменту інерції  $J$  присутні в усіх рівняннях переміщень, для визначення залежності величин реакції опори від кута докладання сили ваги тіла ці показники можна не враховувати. Тому прийемо, що їхні значення дорівнюють 1. Кут нахилу сили  $P$  до вертикальної осі будемо змінювати від  $0^\circ$  до  $20^\circ$  з кроком  $2^\circ$ .

У результаті проведеного розрахунку побудуємо графіки залежності величин складових сил реакцій опор та крутних моментів від кута докладання сили ваги людини (рис. 6–8).

Як показано на рис. 6, навантаження на виросток з боку нахилу сили ваги ( $x_2$ ) зростає, а з протилежного боку ( $x_5$ ), зі збільшенням кута нахилу сили ваги тіла, навпаки, знижується.

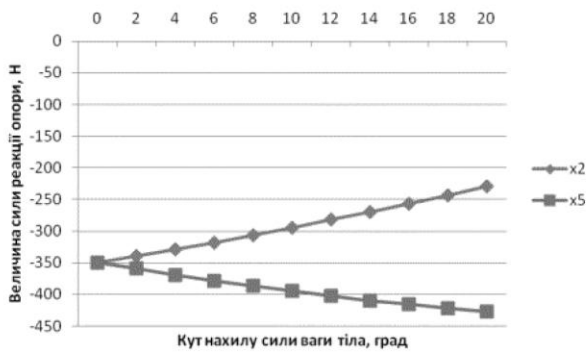


Рис. 6. Графік залежності величини вертикальних складових сил реакції опор від кута докладання сили ваги тіла людини

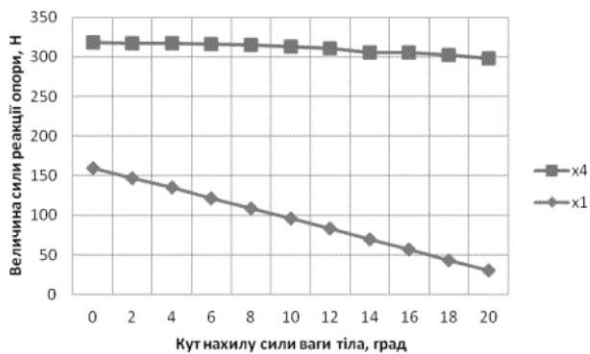


Рис. 7. Графік залежності величини горизонтальних складових сил реакції опор від кута докладання сили ваги тіла людини

Величина горизонтальної складової сили реакції опори ( $x_1$ ) на виросток стегнової кістки з боку нахилу сили ваги тіла зменшується зі збільшенням кута нахилу сили. З протилежного боку, зміна кута нахилу сили ваги тіла практично не викликає зміну горизонтальної складової сили реакції опори ( $x_4$ ).

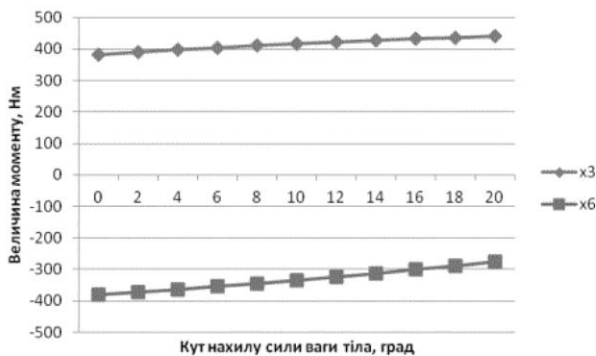


Рис. 8. Графік залежності величини горизонтальних складових сил реакції опор від кута докладання сили ваги тіла людини

На рис. 8 показано, що величини крутих моментів на обох точках опори незначно зростають зі збільшенням кута нахилу дії сили ваги тіла людини.

Як показали наші розрахунки, зміна кута деформації в колінному суглобі веде до перерозподілу навантажень на виростки стегнової кістки. Коли припустити, що в основі нормального функціонування суглоба лежить рівність тиску на опорну поверхню великогомілкової кістки, то можна записати рівняння (22):

$$\sigma_1 = \sigma_2, \tag{22}$$

де  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  – величина тиску виростків стегна на опору.

Оскільки величина тиску визначається відношенням сили до площі поверхні, на яку вона діє, то:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \tag{23}$$

За рівнянням (23) можна виразити співвідношення між величинами сил, що діють у суглобі, та величинами площ опорних поверхонь, на які вони діють:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}. \tag{24}$$

Математичне рівняння (24) доводить, що зміни величин навантаження в суглобах можуть викликати перебудову кісткових структур для компенсації перенавантажень, а саме зміни геометричних розмірів виростків стегна; і навпаки, зміни розмірів виростків стегна (наприклад, їхня деформація спадково схильного генезу) викликають порушення навантаження кісткових структур колінного суглоба з подальшим їхнім руйнуванням.

### ВИСНОВКИ

Наші дослідження показали, що зміна тільки одного геометричного показника в будові колінного суглоба призводить до значного перерозподілу навантажень на опорні поверхні суглоба, що, у свою чергу, може викликати зміни геометрії опорних структур у суглобі з подальшим порушенням навантаження кісткових структур колінного суглоба та розвитком остеоартрозу.

Вважаємо перспективними подальші дослідження з використанням отриманих даних у клінічній практиці, наприклад у розробленні кінцевої елементної моделі навантаження виростків стегнової кістки в умовах її деформації.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Денисов А. С. Математическое моделирование нагруженности коленного сустава и прогнозирование результата оперативного лечения / А. С. Денисов, Н. М. Белокрылов, В. М. Тверье // Гений ортопедии. – 2000. – № 3. – С. 39–41.
2. Кризь-Пугач А. П. Наш досвід лікування дисплазії колінного суглоба у дітей / А. П. Кризь-Пугач, Т. А. Кінча-Поліщук, Ю. М. Гук // Ортопед. травматология. – 2007. – № 3. – С. 95–97.
3. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев ; отв. ред. Г. С. Писаренко – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1988. – 736 с.
4. Пустовойт Б. А. Роль конституциональных наследственно предрасположенных особенностей опорно-двигательной системы в развитии фронтальных деформаций нижних конечностей / Б. А. Пустовойт, Е. П. Бабуркина, Тарик Рашид // Ортопед. травматология и протезирование – 2005. – № 1. – С. 60–61.
5. Пустовойт Б. А. Особенности клинического течения диспластического гонартроза у лиц молодого возраста / Б. А. Пустовойт, Е. П. Бабуркина, Тарик Рашид // Матеріали IV Нац. конгресу ревматологів України / МОЗ України ; Асоціація ревматологів України – Полтава, 2005. 18–21 жовт. 2005 р. – 58 с.
6. Сіменач Б. І. Синдром артрозуючої деформації, зумовленої спадковою схильністю / Б. І. Сіменач, О. П. Бабуркіна, П. І Снісаренко // Ортопед. травматология. – 2004. – № 3 – С. 95–106.
7. Wang J. W. Distal femoral varus osteotomy for osteoarthritis of the knee. Surgical technique / J. W. Wang, C.C. Hsu // J Bone Joint Surg, 2006. – Vol. 88-A. – P. 100–108.

*Перелік платних циклів, проведення яких планується в 2012 р.*

**Кафедра  
НАРОДНОЇ І НЕТРАДИЦІЙНОЇ МЕДИЦИНИ**

**Зав. кафедри д-р мед. наук С. П. Шкляр, тел.: 764-52-68, 732-56-02**

Санологія (для лікарів лікувального, педіатричного, медико-профілактичного профілю)	27.08–23.11
Народна та нетрадиційна медицина (для лікарів, які атестуються на II, I, вищу категорії)	10.09–09.10
Фітотерапія та фармакологія нових препаратів (для лікарів лікувального профілю, лікарів поліклінік та стаціонарів)	15.10–13.11
Клінічна біоритмологія та хрономедицина (лікарі-санологи, лікарі лікувального профілю)	14.11–28.11
Оздоровчий масаж та вісцеральна хіропрактика (лікарі-санологи, лікарі лікувального профілю)	03.12–17.12

**За довідками звертатись до навчального відділу ХМАПО  
за тел. (057) 711-80-31**