УДК 519.161

А. В. Морозов

МЕТОД ПРИСКОРЕННЯ ПОШУКУ НИЖНІХ ОЦІНОК ПРИ ПОБУДОВІ ГАМІЛЬТОНОВИХ ЦИКЛІВ

У статті викладено результати досліджень, які дозволяють прискорити пошук розв'язків задач класу комівояжера в бінарній схемі методу гілок та меж. Можливість зменшення часових затрат на виконання кроків методу пошуку розв'язків відкривається завдяки використанню швидкого алгоритму розв'язання одного з варіантів задачі про призначення, яка застосовується для обчислення нижніх оцінок вартості гамільтонових циклів.

Постановка проблеми. Проблема маршрутизації потоків сировини, енергоресурсів, інформації є однією з найбільш актуальних для сучасної промисловості, транспорту, державного управління. Завдання оптимального вибору замкнених маршрутів, які виникають у реальних умовах управління транспортними потоками, мають комбінаторний характер.

Однією з важливих є відома задача комівояжера (ЗК), яка полягає в пошуку найкоротшого замкненого маршруту, що проходить усіма пунктами транспортної мережі рівно один раз. На практиці часто виникає необхідність побудови в транспортній мережі найкоротшого замкненого маршруту, для якого умова одноразового відвідування кожного пункту є зайвою. Задача побудови такого маршруту називається загальною задачею комівояжера (ЗЗК). ЗК, ЗЗК та інші їх варіанти формують клас задач, які можуть бути розв'язані за допомогою методів гілок та меж.

Огляд останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] сформульовано гамільтонову ЗК (ГЗК) і запропоновано використовувати задачу про призначення (ЗП) як нижню межу вартості оптимального розв'язку ГЗК, що є розвитком підходу Кристофідеса. У роботах [2–3] за нижні оцінки використовують 2-паросполучення та розв'язок задачі про мінімальне покриття 1-дерева. У [4–5] запропоновано підходи до отримання наближених розв'язків ЗК великих розмірностей. Для цього рекомендовано використовувати декомпозиційний підхід, методи локальної оптимізації та релаксації. У [6] розглянуто метод розв'язання одного узагальнення ЗК, у якому окрім пунктів транспортної мережі, обов'язкових для відвідування, задані ще й ділянки доріг. Для розв'язання запропоновано модифікацію методу Літтла, а для уточнення оцінки – ЗП.

Формулювання завдання дослідження. Складність усіх відомих алгоритмів розв'язання ЗП оцінюється величинами, не меншими за $O\left(n^3\right)$ [8]. Тому багаторазове звернення до будь-якого з них, характерне для методу гілок та меж [8], потребує значних часових затрат, які можуть бути зменшені знаходженням перестановки σ_{xy} алгоритмом, часова складність якого буде меншою, ніж $O\left(n^2\right)$.

Враховуючи це, **метою статті** є розробка швидкого алгоритму розв'язання ЗП з використанням теорії паросполучень, який може бути застосованим при обчисленні нижніх оцінок у методах гілок та меж для пошуку гамільтонових циклів [8].

Виклад основного матеріалу. Сформулюємо ЗП для матриці вартостей $C = \left[c_{ij}\right]_n$, де $c_{ij} = \infty$ при $i = j$ і $c_{ij} = \infty$ або $c_{ij} \in R_0^+$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Необхідно знайти

$$C(\sigma) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} c_{\pi[i]},$$

де $\pi = (\pi[1], \pi[2], ..., \pi[n])$ – перестановка *n* стовпців матриці *C*;

$\sigma = (\sigma[1], \sigma[2], ..., \sigma[n])$ – оптимальна перестановка або розв'язок ЗП вартістю $C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma[i]}$, $c_{\sigma[i]} \neq \infty$, $i = \overline{1, n}$. Зауважимо, що для матриці *C*, яка містить елементи $c_{ij} = \infty$, $i \neq j$, ЗП може не мати розв'язку.

Припустимо, що отримано перестановку σ. Задача, яка виникає при застосуванні методу гілок та меж, полягає у знаходженні за відомим розв'язком σ розв'язку ЗП σ_{xy} з матрицею вартостей C_{xy}, яка відрізняється від C тим, що: а) елемент $c_{xy} \in$ $\in \left(c_{\sigma[1]}, c_{\sigma[2]}, ..., c_{\sigma[n]}\right)$ у *C* рівний ∞ у C_{xy}; б) час пошуку σ_{xy} менший часу побудови σ.

Матриця *C* збігається з матрицею вартостей *NP*-повної ГЗК [1], у якій потрібно знайти циклічну перестановку мінімальної вартості. Зрозуміло, якщо ЗП не має розв'язку, то і відповідна їй ГЗК теж не має розв'язку. Оскільки ЗП може бути розв'язана ефективно, то її використовують як релаксацію в точних і наближених алгоритмах розв'язання *NP*-повних задач класу комівояжера [1, 4–5]. Точні перебірні методи побудови циклічних перестановок характеризуються зверненням до вже отриманого розв'язку ЗП σ для знаходження нового розв'язку в матриці, де один з елементів $c_{\sigma[i]}$ замінено на ∞, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ [1, 6]. До них належить точний алгоритм Кристофідеса [1, 8], який будує за схемою методу гілок та меж маршрут комівояжера у повному зваженому графі, заданому симетричною матрицею вартостей. Алгоритм Кристофідеса [1, 8] починає роботу з розв'язання ЗП, що дозволяє оцінити вартості всіх можливих замкнених маршрутів, і переходить до вибору в отриманому розв'язку елемента (x, y), який ініціює розгалуження. Після заміни в матриці C значення вибраного елемента на ∞ знову знаходять розв'язок ЗП, за яким визначають нижню межу вартості маршрутів комівояжера, які не включають цей елемент.

Ідея знаходження розв'язків ЗП для послідовності матриць, у яких щоразу при виборі елемента, що ініціює розгалуження, здійснюється заміна його значення на ∞, ефективніше реалізується в алгоритмі Літтла, що будує бінарне дерево перебору [1, 6, 8]. У корені дерева для вихідної матриці задачі класу комівояжера визначається розв'язок ЗП σ будь-яким відомим ефективним алгоритмом. Далі в σ вибирають елемент (x, y) і за час, менший, ніж час побудови σ, знаходять розв'язки σ_{xy} і $\sigma(x, y)$. Розв'язок $\sigma(x, y)$

дозволяє встановити нижню межу вартості маршрутів комівояжера, що включають елемент (x, y). В основу процедур швидкої побудови перестановок σ_{xy} і $\sigma(x, y)$ покладено відомі підходи до розв'язання задач про паросполучення.

Покажемо, як будується перестановка σ_{xy} за час, менший, ніж час розв'язання ЗП.

Матриці вартостей ЗП C поставимо у взаємнооднозначну відповідність дводольний граф (X, Y, U), $|X| = |Y| = n$, де вершина $i \in X$ з'єднана з вершиною $j \in Y$ ребром $(i, j) \in U$ вагою $c_{ij} \neq \infty$.

Паросполученням графа називають таку множину ребер, за якої ніякі два з них не мають спільної вершини. Ребра, які не входять у нього, називають вільними. Максимальне паросполучення має найбільшу кількість ребер для даного графа. Вершину, яка належить ребру паросполучення, називають насиченою, інші вершини графа – вільними. Ребро (i, j), яке входить у паросполучення, позначимо $[i, j]$. Вершина j ребра $[i, j]$ визначається як напарник i. Досконале паросполучення насичує всі вершини графа. У дводольному графі (X, Y, U), який відповідає матриці C, потужність досконалого паросполучення, якщо воно існує, дорівнює n [8].

Розв'язок ЗП σ є досконалим паросполученням дводольного графа (X, Y, U), що включає ребра з мінімальною сумарною вагою. Елемент (x, y) матриці C описаний у паросполученні σ ребром $[x, y]$, якому відповідає в матриці C_{xy} елемент вагою, рівною ∞. Зміна значення $c_{xy} \in R_0^+$ на ∞ означає видалення з σ ребра $[x, y]$. Таким чином, поставлена задача полягає в знаходженні досконалого паросполучення σ_{xy} з мінімальною сумарною вагою $C(\sigma_{xy})$ відносно заданого паросполучення $\sigma - [x, y]$.

Розглянемо альтернувальний шлях $(i_1, j_2, i_2, j_3, ..., i_{m-1}, j_m)$ графа $(X,\ Y, U - [x, y])$, у якому ребра (i_1, j_2), (i_3, j_4), ..., (i_{2k-1}, j_{2k}), ... є вільними, а ребра $[i_2, j_3]$, $[i_4, j_5]$, …, $[i_{2k}, j_{2k+1}]$, … входять у паросполучення. Альтернувальний шлях $(i_1,\ j_2,\ i_2,\ j_3,\ \ldots,\ i_m,\ j_m)$ називають збільшувальним, якщо вершини i_1 і j_m вільні. Збільшувальний шлях складається із зовнішніх та внутрішніх вершин, розташованих відповідно на непарних і парних позиціях, тому в ньому перше й останнє ребра вільні.

Лема 1. Розв'язок σ_{xy} існує, якщо і тільки якщо в графі $(X, Y, U - [x, y])$, що містить паросполучення $\sigma - [x, y]$, існує збільшувальний шлях з вершини $x \in X$ у вершину $y \in Y$.

Доведення. Задане паросполучення $\sigma - [x, y]$ складається з $n - 1$ ребер. Отже, у графі $(X, Y, U - [x, y])$ тільки дві вершини x і y вільні. Якщо в ньому існує збільшувальний шлях P з x в y відносно паросполучення $\sigma - [x, y]$, то існує паросполучення $(\sigma - [x, y]) \oplus P = ((\sigma - [x, y]) - P) \cup (P - (\sigma - [x, y]))$ потужністю n, а отже, і досконале паросполучення σ_{xy}.

Навпаки, нехай у графі $(X, Y, U - [x, y])$ існує паросполучення σ_{xy}. Тоді всі вершини графа є насиченими, а $x \in X$ і $j_r \in Y$ сполучені ребром, яке входить у σ_{xy}, $j_r \neq y$. Але вершини j_r і $i_s \in X$ інцидентні ребру паросполучення $\sigma - [x, y]$. Тому в графі

$(X, Y, U-[x, y])$ існує шлях, що включає $[x, j_r]$, (j_r, i_s). Якщо вершина i_s не суміжна з y, то вона суміжна з вершиною $j_t \in Y$, яка є насиченою в графі $(X, Y, U-[x, y])$. Отже, ребро, яке з'єднує i_s та j_t, належить паросполученню σ_{xy} та міститься в альтернувальному шляху $[x, j_r], (j_r, i_s), [i_s, j_t]$. Аналогічно розмірковуючи, отримаємо збільшувальний шлях $P = ([x, j_r], (j_r, i_s), [i_s, j_k], ..., [i_q, y])$.

Лема 2. Розв'язок ЗП σ_{xy} зводиться до побудови найкоротшого збільшувального шляху P_{xy} з вершини *x* у вершину *y* відносно паросполучення $\sigma-[x, y]$.

Доведення. Нехай у графі $(X, Y, U-[x, y])$ побудовано найкоротший збільшувальний шлях P_{xy} з вершини *x* у вершину *y* відносно паросполучення $\sigma-[x, y]$. Визначимо досконале паросполучення $\sigma_{xy} = ((\sigma-[x, y]) - P_{xy}) \cup (P_{xy} - (\sigma-[x, y]))$ і покажемо, що воно має мінімальну сумарну вагу ребер $C(\sigma_{xy})$ серед усіх досконалих паросполучень графа $(X, Y, U-[x, y])$.

Розглянемо σ_{xy} разом з досконалим паросполученням σ, побудованим у графі (X, Y, U). Очевидно, для σ і σ_{xy} правдивою є нерівність $C(\sigma) \le C(\sigma_{xy})$. Числа $C(\sigma)$ і $C(\sigma_{xy})$ містять загальну частину

$$C(x, y) = \sum_{\sigma[i] \in \sigma_{xy} \cap \sigma} c_{\sigma[i]}.$$

З нерівності $C(\sigma) \le C(\sigma_{xy})$ для $\sigma_{xy} \cap \sigma = (\sigma-[x, y]) - P_{xy} = (\sigma - P_{xy}) - [x, y]$ випливає нерівність

$$C(\sigma) - C(x, y) \le C(\sigma_{xy}) - C(x, y).$$

Але $C(\sigma_{xy}) - C(x, y)$ – мінімальна сума ваг ребер множини $P_{xy} - (\sigma-[x, y])$, оскільки P_{xy} – найкоротший збільшуючий шлях з вершини *x* у вершину *y* відносно паросполучення $\sigma-[x, y]$.

Лема 3. Якщо у графі (X, Y, U) містяться μ досконалих паросполучень σ_m, $\mu \ge 2$, які включають ребро $[x, y]$ і мають мінімальну вартість $C(\sigma_m)$, $m = \overline{1, \mu}$, то довжина найкоротшого збільшувального шляху в графі $(X, Y, U-[x, y])$ не залежить від того, відносно якого з паросполучень $\sigma_m - [x, y]$ побудовано цей шлях.

Доведення. Без втрати загальності припустимо, що граф (X, Y, U) містить два оптимальні досконалі паросполучення: $\sigma_1 = (\sigma_1[1], \sigma_1[2], ..., \sigma_1[n])$ і $\sigma_2 = (\sigma_2[1], \sigma_2[2], ..., \sigma_2[n])$, $C(\sigma_1) = C(\sigma_2)$, $[x, y] \in \sigma_1 \cap \sigma_2$.

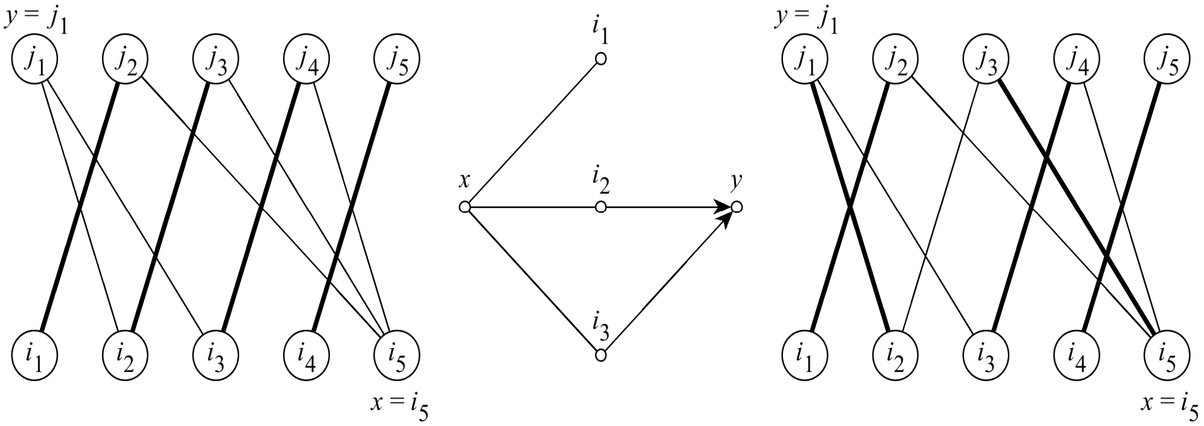
Оскільки $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то $\sigma_0 = (\sigma_1 - [x, y]) \cap (\sigma_2 - [x, y]) \neq \varnothing$, $(\sigma_1 - \sigma_0) \cap (\sigma_2 - \sigma_0) \neq \varnothing$, $|\sigma_1 - \sigma_0| = |\sigma_2 - \sigma_0|$, $C(\sigma_1 - \sigma_0) = C(\sigma_2 - \sigma_0)$. За відношенням до підмножини ребер $\sigma_1 - \sigma_0$ паросполучення $\sigma_1 - [x, y]$ кожне ребро $\sigma_2[l] \in \sigma_2 - \sigma_0$ є вільним, і навпаки, кожне ребро $\sigma_1[l] \in \sigma_1 - \sigma_0$ вільне відносно підмножини $\sigma_2 - \sigma_0$ паросполучення $\sigma_2 - [x, y]$. Найкоротший збільшувальний шлях P_{xy1} з вершини x у вершину y відносно паросполучення $\sigma_1 - [x, y]$ включає підмножину ребер $\sigma_1 - \sigma_0$ і підмножину вільних ребер $\sigma_2 - \sigma_0$ та має довжину $2C(\sigma_1 - \sigma_0)$. Але таку ж довжину має найкоротший збільшувальний шлях P_{xy2} відносно паросполучення $\sigma_2 - [x, y]$, який містить підмножину ребер $\sigma_2 - \sigma_0$ і підмножину вільних ребер $\sigma_1 - [x, y]$.

Наслідок. Нехай σ_m – досконале паросполучення мінімальної ваги в графі (X, Y, U), $m = \overline{1, \mu}$, $\mu \geq 2$. Вартість досконалого паросполучення σ_{xy} графа $(X, Y, U - [x, y])$ не залежить від паросполучення $\sigma_m - [x, y]$, відносно якого побудований найкоротший збільшувальний шлях з вершини x у вершину y в графі $(X, Y, U - [x, y])$.

Доведені твердження дають підґрунтя для переходу до організації ефективного пошуку σ_{xy} за допомогою знаходження тих збільшувальних шляхів з вершини x у вершину y відносно паросполучення $\sigma_{xy} - [x, y]$, серед яких міститься найкоротший шлях P_{xy}. Тому для розв'язання поставленої задачі може бути застосовано адаптований до її умов метод пошуку в ширину, який розвиває ідеї алгоритму побудови максимального паросполучення у дводольному графі [7].

Як і в алгоритмі з [7], віднесемо x до зовнішніх вершин шуканого шляху P_{xy}. Тоді y – внутрішня вершина P_{xy}. У дводольному графі $(X, Y, U - [x, y])$, який містить паросполучення $\sigma - [x, y]$, усі вершини $i \in X$ і $j \in Y$ за виключенням x і y є насиченими. Будемо шукати шлях P_{xy} побудовою усіх можливих альтернувальних шляхів з вершини x. У кожній парі ребер $((i_k, j_l), (j_l, i_m))$ альтернувального шляху з початком у вершині x вершини $i_k, i_m \in X$ – зовнішні, а вершина $j_l \in Y$ – внутрішня. Оскільки у ньому вершина x вільна, то вільним є і ребро (x, j_l), а ребро (j_l, i_m) міститься в паросполученні $\sigma_{xy} - [x, y]$, тобто $[i_m, j_l] \in \sigma_{xy} - [x, y]$.

Ідея ефективного пошуку шляху P_{xy} у ширину полягає в покроковій побудові орграфа, у якому вершина x має нульовий напівстепінь заходу, а вершина y – нульовий напівстепінь виходу [7]. Кожна пара ребер $((x, j_l), (j_l, i_k))$ описана в орграфі дугою (x, i_k) вагою $c_{xi_k} = c_{xj_l} + c_{j_l i_k}$. Оскільки i_k є напарником j_l, а будь-яка вершина не може мати більше одного напарника, то така заміна однозначно визначає чергову зовнішню вершину альтернувального шляху, ігноруючи внутрішню вершину. Вершини i_k, інцидентні x, утворюють перший ярус вершин орграфа. Тоді для кожної вершини i_k, суміжної з вільною вершиною *y*, можна побудувати збільшувальний шлях $(x,\ j_l,\ i_k,\ y)$ і визначити відповідне йому досконале паросполучення $[x,\ j_l]\cup[i_k,\ y]\cup(\sigma-[x,\ y]-[i_k,\ j_l])$, вага якого дорівнює $c_{xj_l}+c_{i_k y}+\sum_{i=1}^{n} c_{\sigma[i]}-c_{xy}-c_{i_k j_l}$. Серед усіх отриманих досконалих паросполучень оберемо σ_{xy}^1 з найменшою вагою $C\left(\sigma_{xy}^1\right)$, приймемо за рекордне поточне значення *MIN* верхньої межі для $C\left(\sigma_{xy}\right)$. У кожному побудованому збільшувальному шляху позначимо дугу, яка входить в *y*, і вершину i_k, якщо вона не суміжна в $(X, Y, U-[x,\ y])$ з внутрішніми вершинами або суміжна тільки з вершиною *y*. Паросполучення σ_{xy}^1 є розв'язком поставленої задачі тоді, коли воно має вагу, рівну *MIN*, і всі вершини i_k, а відповідно, і дуги $(i_k,\ y)$ відмінні (рис. 1).



а) *б)* *в)*

Рис. 1: а) дводольний граф $(X, Y, U-[x,\ y])$ *і його паросполучення* $\sigma-[x,\ y]=\{[i_1,\ j_2],[i_2,\ j_3],[i_3,\ j_4],[i_4,\ j_5]\}$; *б) збільшувальні шляхи з вершини* $x=i_5$ *у вершину* $y=j_1$ *відносно паросполучення* $\sigma-[x,\ y]$; *в) дводольний граф* $(X, Y, U-[x,\ y])$ *і його досконале паросполучення* $\sigma_{xy}=\{[i_1,\ j_2],[i_2,\ j_1],[i_3,\ j_4],[i_4,\ j_5],[i_5,\ j_3]\}$

Для кожної невідзначеної вершини i_k першого ярусу обчислимо її вагу $C(i_k)=c_{xj_l}$, $[i_k,\ j_l]\in\sigma-[x,\ y]$ (рис. 2). Знайдемо вагу вершин другого ярусу. Не втрачаючи загальності, припустимо, що в графі $(X, Y,\ U-[x,\ y])$ вершина i_k інцидентна двом вільним ребрам $(i_k,\ j_r)$ та $(i_k,\ j_s)$, вершина i_m вагою $C(i_m)=c_{xj_t}$ – одному вільному ребру $(i_m,\ j_s)$, $j_r\neq y$, $j_s\neq y$, $[i_m,\ j_t]\in\sigma-[x,\ y]$, i_p є напарником i_r, а i_q – напарником j_s (рис. 2). Зобразимо пари ребер $\left((i_k,\ j_r),\left(j_r,i_p\right)\right)$, $\left((i_k,\ j_s),\left(j_s,i_q\right)\right)$, $\left((i_m,\ j_s),\left(j_s,i_q\right)\right)$ графа $(X, Y, U-[x,\ y])$ відповідними дугами $\left(i_k,\ i_p\right)$, $\left(i_k,i_q\right)$, $\left(i_m,i_q\right)$ у будованому орграфі й віднесемо вершини i_p, i_q до другого рівня його вершин (рис. 2).

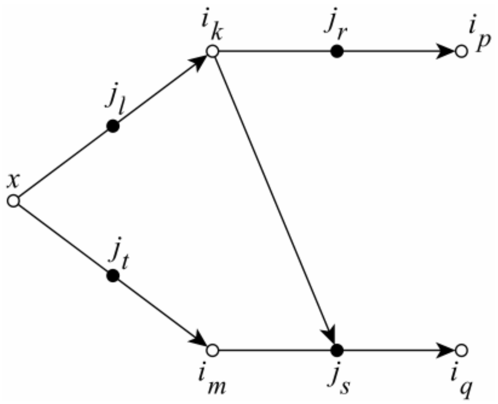


Рис. 2. Збільшувальні шляхи з вершини x, які містять дуги (x, i_k), (x, i_m), (i_k, i_q), (i_k, i_p), (i_m, i_q)

Обчислимо вагу для i_p та i_q:

$$C(i_p) = C(i_k) + c_{i_k j_r}, [i_p, j_r] \in \sigma - [x, y];$$
$$C(i_q) = min\{C(i_k) + c_{i_k j_s}, C(i_m) + c_{i_m j_s}\}, [i_q, j_s] \in \sigma - [x, y].$$

Нехай i_q – вершина другого ярусу, з якої виходить дуга (i_q, y). Вершина i_k у графі $(X, Y, U - [x, y])$ належить збільшувальному шляху з x в y, довжина якого дорівнює $C(i_q) + c_{i_q y}$. Припустимо, що це шлях $(x,\ j_l,\ i_k,\ j_s,\ i_q,\ y)$. За ним знайдемо досконале паросполучення $\sigma_{i_q} = ([x, j_l] \cup [i_k, j_s] \cup [i_q, y] \cup (\sigma - [x, y] - [i_k, j_l] - [i_q, j_s]))$ із сумарною вагою ребер

$$C(\sigma_{i_q}) = c_{x j_l} + c_{i_k j_s} + c_{i_q y} + \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma[i]} - c_{xy} - c_{i_k j_l} - c_{i_q j_s},$$

позначимо дугу (i_q, y) і вершину i_q, якщо вона не суміжна в $(X, Y, U - [x, y])$ ні з якою іншою внутрішньою вершиною. Після виконання таких дій для кожної вершини другого ярусу, інцидентної *y*, визначимо досконале паросполучення σ_{xy}^2 з мінімальною сумарною вагою ребер $C(\sigma_{xy}^2)$ і, якщо $C(\sigma_{xy}^2) < MIN$, то покладемо $MIN = C(\sigma_{xy}^2)$.

Процес знаходження збільшувальних шляхів продовжується для непозначених вершин ярусу, сформованого на черговому кроці, і завершується побудовою орграфа, у якому позначені всі дуги, які входять у вершину *y*. Шуканим розв'язком σ_{xy} є отримане на кроці *n* досконале паросполучення σ_{xy}^n із сумою ваг ребер, що дорівнює *MIN*.

Пошук σ_{xy} у ширину спрощується в орграфі (V, A), де $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $|V| = |X| = |Y|$, $v_x = x$, $v_y = y$, A – множина таких дуг, що $(v_k, v_l) \in A$, якщо і тільки якщо в дводольному графі $(X, Y, U - [x, y])$: а) $(i_k, j_l) \in U - [x, y]$, $y \in \{j_l \mid l = \overline{1, n}\}$; б) вершина

$i_k \in X$ суміжна з напарником $j_m \in Y$ вершини $i_l \in X$, тобто вершини i_k, j_m, i_l утворюють пару ребер (i_k, j_m), $[i_l, j_m]$ деякого збільшувального шляху. В орграфі (V, A) дуга має вагу $c_{v_k v_l} = c_{i_k j_l}$, якщо $j_l = y$, і $c_{v_k v_l} = c_{i_k j_m}$ інакше. Таким чином, розв'язок σ_{xy} знаходять побудовою в зваженому орграфі (V, A) найкоротшого шляху з вершини $v_r = x$ у вершину $v_s = y$.

Висновки. Викладені ідеї знайшли застосування в модифікації метода Літтла, у якій нижню межу уточняють у результаті розв'язання одного з варіантів ЗП за менший час, ніж витрачений на розв'язання класичної ЗП. Версія ЗП, сформульована в термінах паросполучень на дводольному зваженому графі, зводиться до побудови в ньому найкоротшого збільшувального шляху, який перетворюється за лінійний час у розв'язок нової ЗП у вигляді циклового розкладання з меншою кількістю контурів.

Викладені в статті ідеї можуть бути розвинені для розробки точного методу розв'язання задачі пошуку 2-фактора мінімальної ваги і створення універсальної обчислювальної схеми для розв'язання узагальнень та частинних випадків ЗП.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Панишев А. В. Оптимизация замкнутых маршрутов на транспортной сети / А. В. Панишев, А. Ю. Левченко, О. Б. Маций // Штучний інтелект. – 2010. – № 1. – С. 43–49.
2. Сергеев С. И. Симметричная задача коммивояжера II. Новые нижние границы / С. И. Сергеев // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 4. – С. 150–167.
3. Сергеев С. И. Симметричная задача коммивояжера. Новые быстрые нижние границы для задачи оптимального 2-паросочетания / С. И. Сергеев // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 148–160.
4. Базилевич Р. П. Алгоритм оптимізації розв'язків задачі комівояжера у локальній області / Р. П. Базилевич, Р. К. Кутельмах // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2009. – № 7. – С. 41–45.
5. Базилевич Р. П. Декомпозиційні алгоритми для розв'язування задачі комівояжера / Р. П. Базилевич, Р. К. Кутельмах // Комп'ютерні науки та інформаційні технології : Вісник Нац. ун-ту "Львів. політехніка". – 2007. – № 598. – С. 138–148.
6. Ovezgeldyyev A. O. Developing the Branch and Bound Method in the Problem of Searching for the Optimal Cyclic Route (Cyclic Rural Postman Problem) / A. O. Ovezgeldyyev, A. V. Morozov // Cybernetics and Systems Analysis. – September 2013. – Volume 49. – Issue 5. – P. 739–748.
7. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 510 с.
8. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети : монография / А. В. Панишев, А. В. Морозов. – Житомир : ЖДТУ, 2014. – 316 с.

Подано 18.05.2015

А. В. Морозов

МЕТОД УСКОРЕНИЯ ПОИСКА НИЖНИХ ОЦЕНОК ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ

В статье изложены результаты, позволяющие ускорить поиск решений задач класса коммивояжера в бинарной схеме метода ветвей и границ. Возможность уменьшения временных затрат на выполнение шагов метода открывается при использовании быстрого алгоритма решения одного из вариантов задачи о назначении, которая применяется для вычисления нижних оценок стоимости гамильтоновых циклов.

A. V. Morozov

ACCELERATION METHOD OF FINDING LOWER BOUNDS UNDER THE CONSTRUCTION OF HAMILTONIAN CYCLES

The article presents the results to speed up the search for solutions of problems of class Salesman in a binary scheme branch and bound method. The ability to reduce the time expenses for performance the steps of the method is opened using a fast algorithm for solving one of the variants of the Assignment Problem, which is used to calculate the lower valuations of Hamiltonian cycles.