УДК 629.78

М. Ю. Ракушев, О. Ю. Пермяков

ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ МЕТОДОМ БАГАТОВИМІРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано числово-аналітичну обчислювальну схему інтегрування диференціального рівняння руху космічного апарата в гринвіцький прямокутній системі координат, яку розроблено на основі багатовимірних диференціально-тейлорівських перетворень. Відмінною особливістю даної схеми є розрахунок прискорень у диференціальному рівнянні руху космічного апарата на основі диференціально-тейлорівських перетворень різної мірності, а саме: прискорень від консервативних сил (геопотенціалу) – на базі двовимірних диференціально-тейлорівських перетворень; прискорень від неконсервативних сил (опір атмосфери, притягання Місяця, Сонця, переносна відцентрова сила, сила інерції Коріоліса) – на основі одновимірних диференціально-тейлорівських перетворень. Такий підхід зменшує необхідні аналітичні викладки при отриманні диференціального рівняння руху космічного апарата та, відповідно, зменшує методичну складність розроблення процедур прогнозування руху космічних апаратів. Проведено порівняння за критерієм "точність – обчислювальна складність" запропонованої обчислювальної схеми інтегрування з відомою схемою на основі одновимірних диференціально-тейлорівських перетворень.

Ключові слова: *прогнозування руху, інтегрування, космічний апарат, балістико-навігаційне забезпечення, багатовимірні диференціально-тейлорівські перетворення.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Досвід антитерористичної операції на сході України свідчить, що інформація від космічних систем суттєво підвищує ефективність забезпечення дій збройних сил. В Україні реалізується Загальнодержавна цільова науково-технічна космічна програма, відповідно до якої створюється космічна система спостереження Землі "Січ", призначена, у тому числі, для виконання завдань у сфері національної безпеки та оборони. Експлуатація цієї системи неможлива без складного програмного забезпечення, одне з центральних місць у ньому займає процедура прогнозування руху космічних апаратів (КА), у якій реалізоване інтегрування відповідного диференціального рівняння.

До основних вимог, що висуваються до процедур прогнозування руху КА, належать [1]: висока точність, абсолютна достовірність, оперативність, максимальне відпрацювання використовуваних методів та можливість автоматичного розв'язання вторинних, відносно прогнозування руху КА, задач; відповідність методів, алгоритмів та програм технічним характеристикам ЕОМ. Крім того, слід додати вимоги до вартості створення таких процедур, їх уніфікації, а також гнучкості при удосконаленні чи зміні [1].

Описані особливості обумовлюють те, що розробці процедур прогнозування руху КА при вирішенні завдань балістико-навігаційного забезпечення управління КА приділяється значна увага. Актуальними є розробки нових підходів, які покращують відповідність процедур прогнозування руху КА вимогам які до них висуваються.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Числові методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь є основними для високоточного короткострокового прогнозування руху КА ближнього космосу (на інтервалі до 1–2 тижнів, що відповідає 100–200 періодам обертання апарата). На теперішній час у вітчизняній практиці балістико-навігаційного забезпечення (БНЗ) управління КА для короткострокового прогнозування руху КА ближнього космосу найбільше розповсюдження отримав числовий кінцево-різницевий метод Адамса 7-го порядку, що використовується за екстраполяційно-інтерполяційною схемою, розгін якого проводиться методом Рунге – Кутти 4-го порядку [1, 2].

Якщо розглянути останні дослідження з упровадження інших методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь у практику БНЗ, то можна зазначити, що одним з перспективних є метод диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень [3, 4]. У [4–6] розроблено обчислювальні схеми прогнозування руху КА на основі ДТ-перетворень для найбільш поширених моделей руху КА ближнього космосу – моделей руху в гринвіцькій системі координат (ГСК) та в системі оскулювальних елементів. У [4, 7] запропоновано підхід до зменшення обчислювальних витрат на зазначене прогнозування, а в [4, 8] – адаптивні за кроком та (чи) порядком обчислювальні схеми.

Характерною ознакою усіх зазначених вище підходів до прогнозування руху КА є те, що числовий метод інтегрування (як кінцево-різницевий, так і ДТ-перетворення) використовується тільки для числового розв'язку попередньо отриманого (аналітично записаного у відповідній системі координат) диференціального рівняння руху КА, причому деякі члени таких рівнянь (відповідні прискорення) мають доволі громіздкий вигляд, насамперед це стосується, врахування впливу геопотенціалу (подається у вигляді відповідних рядів, що мають рекурентну форму), прискорення від якого знаходять через його градієнт. Визначення таких (громіздких) членів є окремим завданням, для вирішення якого використовуються спеціальні, передусім аналітичні методи, що, у цілому, підвищує складність розробки відповідних процедур для прогнозування руху КА. Такий порядок дій є обов'язковим (не має альтернативних рішень) для традиційних числових методів, однак не використовує усіх математичних (насамперед аналітичних) властивостей ДТ-перетворень різної мірності (коли деякі аналітичні викладки проводяться в області ДТ-спектрів у числово-аналітичному вигляді). Прикладом використання зазначених властивостей багатовимірних ДТ-перетворень є розроблені на їх основі методи для розрахунку часткових похідних від прогнозованого положення КА за початковими умовами (ПУ) руху та його прогнозування за стохастичною моделлю руху [4, 9]. Однак у наведених методах багатовимірні ДТ-перетворення використовуються тільки після отримання розв'язку (як його "розширення") задачі інтегрування диференціального рівняння руху КА одновимірними ДТ-перетвореннями і не стосуються саме задачі прогнозування руху КА. Таким чином, актуальним є проведення досліджень щодо розробки обчислювальної схеми для прогнозування руху КА на основі багатовимірних ДТ-перетворень, що забезпечуватиме зменшення необхідних аналітичних викладок та покращить їх уніфікацію і гнучкість.

Формулювання завдання дослідження. Метою статті є розробка числово-аналітичної обчислювальної схеми інтегрування диференціального рівняння руху КА в гринвіцькій прямокутній системі координат на основі багатовимірних ДТ-перетворень, у якій прискорення від геопотенціалу розраховуються в області багатовимірних ДТ-спектрів, що зменшує необхідні аналітичні викладки.

Виклад основного матеріалу. У загальному вигляді рух КА в ГСК можна подати як рух матеріальної частки нескінченно малої маси в полі тяжіння центрального тіла (Землі) під дією сил, які визначаються потенціальною функцією U та сукупністю сил R, що не мають потенціалу. У цій постановці диференціальне рівняння руху КА в ГСК має такий вигляд [10]:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial w} + R \tag{1}$$

з ПУ

$$w_0 = w(t_0),\; \dot{w}_0 = v_0 = v(t_0), \tag{2}$$

де $w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$, $v = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}^T$ – вектори положення та швидкості КА в ГСК;

t – фізичний час;

$U = U(w)$, $\partial/\partial w$ – градієнт;

$R = R(t, w, \dot{w})$ – сили, що не мають потенціалу.

Останній доданок в (1) R (сили, що не мають потенціалу) враховує опір атмосфери, притягання Місяця та Сонця, а також включає переносну відцентрову силу та силу інерції Коріоліса. Причому дві останні сили (є обов'язковими членами в R) визначають те, що ГСК не є інерціальною системою координат (ГСК жорстко зв'язана із Землею, що обертається), а їх врахування є обов'язковим для моделей руху КА в ГСК. Вигляд R детально описаний у літературі [1, 10, 11]. Без втрати узагальненості подальших викладок запишемо R для переносної відцентрової сили та сили інерції Коріоліса:

$$R = \begin{pmatrix} 2\Omega_0 \mathrm{v}_y \\ 2\Omega_0 \mathrm{v}_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_0^2 x \\ \Omega_0^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де перший доданок – переносна відцентрова сила, а другий – сила інерції Коріоліса;

$\Omega_0 = 0{,}7292115805 \cdot 10^{-4}$ рад/с – кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі;

x, y, v_x, v_y – складові векторів w та v відповідно.

При прогнозуванні руху КА найбільш поширеною формою подання потенціалу земного тяжіння є розклад його в ряд за сферичними функціями, який має такий вигляд [1, 11, 12]:

$$U = \frac{\mu_3}{r}\left(1 + \sum_{n=2}^{N}\left(C_{n0}\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n(\sin\phi)\right) + \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n^m(\sin\phi)\left[C_{nm}\cos(m\lambda) + d_{nm}\sin(m\lambda)\right]\right)\right), \tag{4}$$

де μ_3, r_3 – гравітаційний параметр та середній екваторіальний радіус Землі;

r, φ, λ – геоцентричний радіус, широта та довгота точки, що розглядається;

$P_n(\sin\varphi)$, $P_n^m(\sin\varphi)$ – поліноми Лежандра та приєднані сферичні функції відповідно;

C_{n0}, C_{nm}, d_{nm} – безрозмірні сталі, що характеризують гравітаційне поле Землі.

На даний час є моделі гравітаційного потенціалу з коефіцієнтами до 320-го степеня, але для переважної більшості задач прогнозу руху КА їх повне врахування не доцільне. Так, на практиці для прогнозування руху КА ближнього космосу використовується розклад геопотенціалу $N \times N$ – 4 × 4 [2].

Для поліномів Лежандра та приєднаних сферичних функцій виконуються рекурентні залежності, які використовуються для їх ефективного розрахунку при прогнозуванні руху КА:

$$P_n(\sin\phi) = \frac{1}{n}\left[-(n-1)P_{n-2}(\sin\phi) + (2n-1)\sin\phi\, P_{n-1}(\sin\phi)\right], \tag{5}$$

$$P_n^m(\sin\phi) = \frac{1}{n-m}\left[-(n+m-1)P_{n-2}^m(\sin\phi) + (2n-1)\sin\phi\, P_{n-1}^m(\sin\phi)\right], \tag{6}$$

$$P_n(\sin\phi) = \frac{1}{n}\left[-(n-1)P_{n-2}(\sin\phi) + (2n-1)\sin\phi\, P_{n-1}(\sin\phi)\right], \tag{7}$$

$$P_n^m(\sin\phi) = \frac{1}{n-m}\left[-(n+m-1)P_{n-2}^m(\sin\phi) + (2n-1)\sin\phi\, P_{n-1}^m(\sin\phi)\right], \tag{8}$$

$$P_m^m(\sin\varphi) = (2m-1)\cos\varphi\, P_{m-1}^{m-1}(\sin\varphi), - \tag{9}$$

з такими початковими значеннями:

$$P_0(\sin\varphi) = 1,\;\; P_1(\sin\varphi) = \sin\varphi,\;\; P_{m-1}^m(\sin\varphi) = \cos\varphi,\;\; P_1^1(\sin\varphi) = \cos\varphi, \tag{10}$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r},\;\; \sin\phi = \frac{z}{r},\;\; r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;, - \tag{11}$$

де усі позначення в (4)–(11) збігаються з (1)–(3).

Для тригонометричних функцій від кратних довгот виконуються такі рекурентні залежності, які також використовуються для ефективного прогнозування руху КА:

$$\cos(m\lambda) = \cos[(m-1)\lambda]\cos\lambda - \sin[(m-1)\lambda]\sin\lambda\;, \tag{12}$$

$$\sin(m\lambda) = \sin[(m-1)\lambda]\cos\lambda + \cos[(m-1)\lambda]\sin\lambda\;, - \tag{13}$$

з такими початковими значеннями:

$$\cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\;\; \sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, - \tag{14}$$

де усі позначення в (12)–(14) збігаються з (1)–(3).

Визначення прискорень від геопотенціалу (4) для моделі руху КА (1) (градієнта $\partial U/\partial w$) проводиться аналітично в такій послідовності [1, 11]:

знаходимо три ортогональні прискорення (аналітично беруться часткові похідні від потенціалу (4)): радіальне (напрямлене за радіусом-вектором КА до центру Землі), меридіональне (лежить у площині меридіана точки, що розглядається та направлена в сторону екватора) та нормальне (направлене перпендикулярно до площини меридіана на схід);

визначаємо проекції (шляхом геометричних побудов) отриманих прискорень (радіального, меридіонального та нормального) на осі ГСК (які і є шуканим градієнтом).

Кінцеві формули для розрахунку прискорень в (1) від геопотенціалу (4) будуть більш громіздкими (включатимуть більшу кількість залежностей) та, відповідно, більш методично складними при використанні (5)–(14) за вирази для визначення вихідного геопотенціалу (4). Так, для розрахунку таких прискорень до формул (5)–(14) додаються залежності (збільшується кількість рекурентних залежностей) для похідних від функцій Лежандра та приєднаних сферичних функцій і вводяться додаткові прискорення (змінні), які потрібно знайти окремо.

У цілому, можна зазначити, що позбавлення (чи принаймні послаблення) впливу описаного вище "додаткового збільшення методичної складності" за рахунок зменшення необхідних аналітичних викладок є бажаним для практичної реалізації при прогнозуванні руху КА.

Можливим для вирішення цього завдання є використання математичного апарата ДТ-перетворень академіка НАН України Г. Є. Пухова [3]. *Двовимірними ДТ-перетвореннями* називають функціональні перетворення такого вигляду [3, 4]:

$$Q(k,k_w)=\frac{h^k h_w^{k_w}}{k!\,k_w!}\frac{\partial^{k+k_w} q(t,w)}{\partial t^k \partial w^{k_w}}\bigg|_{\substack{t=t_*\\ w=w_*}}=\frac{h^k h_w^{k_w}}{k!\,k_w!}\frac{\partial^{k+k_w} q(t_*,w_*)}{\partial t^k \partial w^{k_w}}, \tag{15}$$

$$q(t,w)=\sum_{k_w=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}\frac{(w-w_*)^{k_w}}{h_w^{k_w}}Q(k,k_w)\right), \tag{16}$$

де $q(t,w)$ – скалярна функція, диференційована потрібну кількість разів (має похідні необхідного порядку) за t та w;

t, w – скалярні аргументи, за якими проводиться перетворення;

t_*, w_* – значення аргументів, за яких проводиться перетворення;

h, h_w – відрізки аргументів, за яких функція $q(t,w)$ подається рядом Тейлора за t та w відповідно;

k, k_w – цілочислові аргументи 0, 1, …;

$Q(k,k_w)$ – дискретна функція за аргументами k, k_w.

Вираз (15) визначає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $q(t,w)$ знайти ДТ-зображення $Q(k,k_w)$. Обернене перетворення, яке відновлює оригінал $q(t,w)$ у вигляді ряду Тейлора, знаходимо за виразом (16). Множину значень $Q(k,k_w)$ прийнято називати ДТ-спектром, а значення функції $Q(k,k_w)$ при конкретних значеннях аргументів k, k_w – дискретами ДТ-спектра або Т-дискретами.

На даний час найбільший розвиток (розповсюдження та вивчення) з погляду класів розв'язуваних задач отримали одновимірні ДТ-перетворення (отримується з (15), (16) при

$k_w = 0$). Найширшим класом задач, що розв'язуються з їх допомогою, є розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

Обчислювальні схеми, отримані з використанням ДТ-перетворень, для широкого кола практичних задач мають кращі розрахункові характеристики за узагальненим критерієм "точність – обчислювальна складність", ніж схеми, отримані на основі традиційних числових методів.

Метод багатовимірних ДТ-перетворень значно менш розповсюджений, ніж одновимірний підхід, що обумовлено насамперед відносною новизною їх математичного апарату і, відповідно, ще недостатнім вивченням багатовимірного випадку в теоретичному та практичному аспектах.

Основною властивістю ДТ-перетворень є реалізація рекурентного методично простого (числово-аналітичного) визначення членів ряду Тейлора будь-якого порядку за відсутності методичних помилок. Її можна сформулювати в такому вигляді: *для визначення (розрахунку) Т-спектра складної функції необхідно відповідно до її внутрішньої структури визначити (задати) Т-спектри всіх її аргументів, при цьому їх вимірність повинна збігатися з необхідною вимірністю Т-спектра даної складної функції.* Тобто значення (вигляд) Т-спектрів аргументів визначає результуюче значення (вигляд) Т-спектра складної функції. Властивість виконується для ДТ-перетворень будь-якої вимірності.

Для більшої наочності нижче надано пояснення описаної властивості на прикладі одновимірного випадку. Якщо функція $q(x(t), y(t), t)$ має Т-спектр (функція q розкладається в ряд Тейлора за степенями змінного t), то відомі Т-спектри її аргументів $X(k)$, $Y(k)$ та внутрішня структура функції $q(x, y, t)$. Тоді застосування ДТ-перетворень до $q(x(t), y(t), t)$ дає Т-спектр $Q(k) = Q(X(k), Y(k), T(k))$.

Зазначена властивість спирається на порядок взяття (отримання) похідних (будь-якого порядку та частинних похідних будь-якої вимірності) складних функцій. Так, нехай функція $q(x(t), y(t), t)$ диференційована за своїми аргументами. Її аргументи – функції $x(t), y(t)$ – диференційовані за t. Тоді відповідно до порядку отримання похідних складної функції (функції багатьох змінних) маємо таке співвідношення:

$$\frac{dq(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial t}, \tag{17}$$

де $\partial q(x, y, t)/\partial x$ – частинна похідна, при отриманні якої для функції $q(x, y, t)$ припускається, що x є змінним (аргументом), а y та t – сталі;

$\partial q(x, y, t)/\partial y$ – припускається, що y є змінним (аргументом), а x та t – сталі;

$\partial q(x, y, t)/\partial t$ – припускається, що t є змінним (аргументом), а y та x – сталі.

Для порівняння, якщо для складної функції $q(x(t), y, t)$ аргумент y не є функцією t, то похідна буде іншою (у (17) у другому доданку останній множник буде нульовим):

$$\frac{dq(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial q(x, y, t)}{\partial t} \Rightarrow \left| \ \frac{dy}{dt} = 0 \ \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq\left(x(t),y(t),t\right)}{dt}=\frac{\partial q\left(x,y,t\right)}{\partial x}\frac{dx\left(t\right)}{dt}+\frac{\partial q\left(x,y,t\right)}{\partial t}, \qquad (18)$$

а Т-спектр $Q(k)$, через “інший” Т-спектр $Y(k)$, буде теж іншим.

Градієнт $\partial U/\partial w$ від геопотенціалу має такий вигляд:

$$\frac{\partial U\left(w\right)}{\partial w}=\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x} & \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y} & \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\end{pmatrix}^{T}. \qquad (19)$$

З урахуванням властивостей взяття частинних похідних градієнт (19) можна записати як

$$\frac{\partial U\left(w\right)}{\partial w}=\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}\Rightarrow \qquad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U\left(w\right)}{\partial w}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\end{pmatrix}\Rightarrow \qquad (21)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U\left(w\right)}{\partial w}=E_{3\times 3}\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y}\\ \frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z}\end{pmatrix}, \qquad (22)$$

де $E_{3\times 3}$ – одинична матриця.

Таким чином, (19) та (20) є тотожними, оскільки виконується співвідношення

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E_{3\times 3}. \qquad (23)$$

З урахуванням описаної вище властивості визначення Т-спектрів задамо Т-спектри складових вектора w відповідно до (23). Тоді застосування ДТ-перетворень до $U(w)$ дасть Т-спектр у такому вигляді:

$$U\left(k_w\right)=U\left(W\left(k_w\right)\right) \text{ при } W\left(k_w=0\right)=w_* \text{ та } W\left(k_w=1\right)=h_w E_{3\times 3} \qquad (24)$$

або з розкриттям векторно-матричних позначень

$$\begin{pmatrix} U\left(X\left(k_w\right), Y\left(k_w\right), Z\left(k_w\right)\right) : \left\{X\left(1\right)=h_w, Y\left(1\right)=0, Z\left(1\right)=0\right\} \\ U\left(X\left(k_w\right), Y\left(k_w\right), Z\left(k_w\right)\right) : \left\{X\left(1\right)=0, Y\left(1\right)=h_w, Z\left(1\right)=0\right\} \\ U\left(X\left(k_w\right), Y\left(k_w\right), Z\left(k_w\right)\right) : \left\{X\left(1\right)=0, Y\left(1\right)=0,\ Z\left(1\right)=h_w\right\} \end{pmatrix} : \\ : \left\{X\left(0\right)=x_*, Y\left(0\right)=y_*, Z\left(0\right)=z_*\right\}, \tag{25}$$

де $U(k_w)$, $W(k_w)$, $X(k_w)$, $Y(k_w)$, $Z(k_w)$ – Т-спектри геопотенціалу, вектора w та його складових відповідно;

w_*, x_*, y_*, z_* – значення вектора w (його складових), для якого розраховується Т-спектр;

h_w – відрізок вектора w.

З урахуванням прямого ДТ-перетворення (15) розглянемо Т-дискрету в (24) при $k_w = 1$:

$$U\left(k_w = 1\right) = h_w \frac{\partial\, U\left(w_*\right)}{\partial w}. \tag{26}$$

З порівняння (19) та (26) видно, що останній вираз є результатом множення шуканого градієнта на h_w. Для його отримання необхідно, відповідно до властивостей ДТ-перетворень [3, 4], провести диференціювання (26) за k_w. Зазначена операція в області Т-спектрів має такий вигляд:

$$\frac{\partial\, U\left(w_*\right)}{\partial w} = D_{k_w}\left\{U\left(k_w = 1\right)\right\} = \frac{1}{h_w} U\left(1\right). \tag{27}$$

Унаслідок того, що введений в (24) відрізок аргументу h_w у (27) скорочується, при визначенні градієнта його можна прийняти як

$$h_w = 1. \tag{28}$$

Таким чином, (27) (у вигляді (24) при (28)) є Т-спектром шуканого градієнта геопотенціалу – складової рівняння (1).

З урахуванням властивостей ДТ-перетворень запишемо явну обчислювальну ДТ-схему інтегрування (1) при (2), у якій Т-спектр градієнта визначається двовимірними ДТ-перетвореннями у вигляді (24) при (28):

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \qquad T\left(k\right) = t_i \delta_T\left(k\right) + h\delta_T\left(k-1\right), \\ W\left(0{,}0\right) = w\left(t_i\right), \quad W\left(1{,}0\right) = hv\left(t_i\right), \\ W\left(k{,}1\right) = E_{3\times 3}\delta_T\left(k, k_w - 1\right), \\ U\left(k, k_w = 1\right) = U\left(W\left(k, k_w\right)\right) : \quad \left\{k_w = \overline{0{,}1}\right\}, \\ R\left(k\right) = R\left(T\left(k\right), W\left(k{,}0\right), \dfrac{k+1}{h} W\left(k+1{,}0\right)\right), \\ W\left(k+2, 0\right) = \dfrac{h^2}{\left(k+2\right)\left(k+1\right)}\left(-U\left(k{,}1\right) + R\left(k\right)\right) : \qquad \left\{k = \overline{0, k_{max} - 2}\right\}, \end{cases} \tag{29}$$

$$w\left(t_{i+1}\right)=\sum_{k=0}^{k_{max}} W\left(k, 0\right), \quad v\left(t_{i+1}\right)=\sum_{k=0}^{k_{max}} \frac{k+1}{h} W\left(k+1, 0\right), \tag{30}$$

де $w(t_{i+1})$, $v(t_{i+1})$ – прогнозоване положення КА (розв’язок вихідного диференціального рівняння) та прогнозована швидкість КА відповідно;

h, i – крок інтегрування та вузол обчислювальної сітки відповідно;

$W(k,k_w)$, $U(k,k_w)$ – двовимірні Т-спектри вектора w та потенціалу U відповідно;

$(k+1)/h W(k+1,0)$ – Т-спектр швидкості КА;

$R(k)$ – одновимірний Т-спектр сил (прискорень), що не мають потенціалу;

$T(k)$ – Т-спектр незалежного змінного диференціального рівняння t;

$\delta_T(k)$, $\delta_T(k, k_w)$ – одно- та двовимірні “теди” відповідно;

k_{max} – порядок точності інтегрування (визначається кількістю враховуваних при відновленні Т-дискрет).

Отримання Т-зображень правої частини вихідного диференціального рівняння (потенціалу $U(k,k_w)$ та неконсервативних сил $R(k)$) у прямому ДТ-перетворенні проводиться (методично просто) у такому порядку [3–6]:

вихідні функції $U=U(w)$, $R=R(t, w, \dot{w})$ розділяють на “базові” математичні операції (сума, різниця, множення, ділення, піднесення до степеня), які визначають оригінали;

кожна операція (окремо) разом з оригіналом замінюється на взяте зі стандартного переліку відповідне зображення (яке є рекурентною формулою).

Так, отримання Т-зображень для геопотенціалу $U=U(w)$ буде ґрунтуватися на залежностях (4)–(15). А отримання Т-зображення для сил R – на залежності (3).

Пряме ДТ-перетворення (28) проводиться в такій послідовності:

1) задається $k=0$ та визначаються вихідні Т-дискрети $W(0,0)$ та $W(1,0)$;

2) при заданому k для $k_w=0$ розраховується Т-спектр $U(k,0)$;

3) при заданому k для $k_w=1$ рекурентно розраховується Т-спектр $U(k,k_w=1)$. Розрахунок проводиться послідовно тричі для кожного стовпця з $E_{3\times3}$ у $W(k,1)$ відповідно до (25);

4) при заданому k розраховується Т-спектр $R(k)$;

5) при заданому k рекурентно розраховується Т-спектр $W(k+2,0)$;

6) цілочисловий аргумент збільшується на одиницю (задається $k=k+1$) та, якщо не розраховано необхідної кількості Т-дискрет (тобто $k<k_{max}-1$) для реалізації рекурентного розрахунку Т-спектра, робиться перехід до п. 2.

У цілому пряме та обернене ДТ-перетворення (29), (30) визначають обчислювальну схему інтегрування диференціального рівняння руху КА у ГСК (1). Дана схема дозволяє послідовно (починаючи з $i=0$ при ПУ (2)) провести прогнозування руху КА у ГСК.

Основною ознакою розробленої ДТ-схеми (29), (30) є те, що в ній визначення прискорень від геопотенціалу (4) для моделі руху КА (1) (визначення градієнта $\partial U/\partial w$) проводиться в числово-аналітичному вигляді в області Т-спектрів, це зменшує методичну складність її реалізації порівняно з традиційним (аналітичним) підходом [1, 11].

Точність (обчислювальна похибка) розробленої обчислювальної схеми буде еквівалентна точності традиційного (аналітичного) підходу. Зазначене обумовлено властивостями ДТ-перетворень, які дозволяють без методичних похибок визначати в області Т-спектрів градієнт $\partial U/\partial w$, що забезпечує рівність (однаковість) Т-спектрів правої частини вихідного диференціального рівняння (1), визначеного традиційним та розробленим підходом.

Оцінку обчислювальної складності розробленої ДТ-схеми для прогнозування руху КА у ГСК (29), (30) порівняно з традиційним підходом (при розрахунку градієнта $\partial U/\partial w$ аналітично) наведено в табл. 1, де $\tilde{S}/S$ – відношення обчислювальних витрат (множень, ділень) в удосконаленій ДТ-схемі (29), (30) до обчислювальних витрат в традиційній ДТ-схемі [5]; $N \times N$ – прийнята модель гравітаційного поля Землі; k_{max} – порядок точності інтегрування (визначається кількістю врахованих при відновленні Т-дискрет). У моделі руху КА (1) сили, що не мають потенціалу, визначено у вигляді (3).

Таблиця 1

Порівняльна обчислювальна складність

$N \times N$	2×2	4×4	8×8	16×16	360×360
k_{max}	5…20	5…20	5…20	5…20	5…20
$\tilde{S}/S$	3,4…3,7	3,0…3,4	2,7…3,0	2,5…2,7	2,1…2,3

З наведених результатів випливає, що розроблений підхід потребує у 2–4 рази більших обчислювальних витрат на розрахунок прогнозованого положення КА. Зазначене є об'єктивною компенсацією за зменшення методичної складності його реалізації.

З іншого боку, описане вище зменшення методичної складності яскраво проявляється при розробці процедури прогнозування руху КА. Так, розмір коду програми щодо розрахунку правої частини Т-спектра для розробленої ДТ-схеми (29), (30) є на ~40% порівняно з традиційним (аналітичним) підходом. Слід окремо зазначити, що розмір коду програми фактично визначає складність її розробки і, відповідно, працевитрати на її розробку (програмісту оплачують кількість рядків чи розмір коду програми, або кількість операторів, які входять до неї).

Висновки. Відмінною особливістю запропонованої числово-аналітичної обчислювальної схеми інтегрування диференціального рівняння руху КА у ГСК, розробленої на основі багатовимірних ДТ-перетворень, є те, що розрахунок прискорень у диференціальному рівнянні руху КА проводиться на основі ДТ-перетворень різної мірності, а саме: прискорень від консервативних сил (геопотенціалу) – на базі двовимірних ДТ-перетворень, а прискорень від неконсервативних сил – на основі одновимірних ДТ-перетворень. Такий підхід зменшує необхідні аналітичні викладки при отриманні диференціального рівняння руху КА та, відповідно, спрощує методичну складність розробки процедур прогнозування руху КА – розмір коду процедури зменшується до 40%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мамон П. А., Половников В. И., Слезкинский С. К. Баллистическое обеспечение космических полетов. Ленинград : ВИКИ, 1990. 622 с.
2. Проект EGYPTSAT-1. Центр управления полётом. СПО подсистемы траекторного обеспечения. Программный комплекс BOSAT. Руководство оператора. Днепропетровск : Гос. космич. агентство Украины; Гос. конструкторское бюро “Южное”, 2004. 59 с.
3. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Київ : Наукова думка, 1986. 159 с.
4. Ракушев М.Ю. Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень : монографія. Житомир : Видавець О.О. Євенок, 2015. 224 с. ISBN 978-617-7265-43-5.
5. Прогнозування руху КА у гринвіцькій прямокутній системі координат методом диференціально-тейлорівських перетворень / М. Ю. Ракушев, А. А. Завада, С. В. Ковбасюк, В. Й. Болотніков // Системи озброєння і військова техніка. Харків : ХУПС, 2009. № 2 (18). С. 109–114.
6. Ракушев М. Ю., Завада А. А., Ковбасюк С. В. Прогнозування руху КА в оскулюючих елементах методом диференціально-тейлорівських перетворень // Вісник НАУ. Київ : НАУ, 2009. № 3 (40). С. 108–116.
7. Ракушев М. Ю. Схема інтегрування рівняння руху космічного апарата на основі диференціально-тейлорівського перетворення зі зменшеними обчислювальними витратами // Космічна наука і технологія : наук.-практич. журнал. Київ, 2010. Т. 16; № 6. С. 51–56.
8. Ракушев М. Ю. Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка // Проблемы управления и информатики : междунар. науч.-технич. журнал. Киев : НАНУ; Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; Ин-т космич. исследований, 2012. № 6. С. 87–96.
9. Ракушев М. Ю. Численный метод интегрирования решения стохастического дифференциального уравнения на основе дифференциальных преобразований // Проблемы управления и информатики : междунар. науч.-технич. журнал. Киев : НАНУ; Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; Ин-т космич. исследований, 2013. № 6. С. 68–78.
10. Бордовицина Т. В., Авдюшев В. А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы : учеб. пособ. Томск : Томский гос. ун-т, 2007. 178 с.
11. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. Москва : Сов. радио, 1978. 384 с., ил.
12. Система геодезических параметров Земли “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90) / [В. Ф. Галазин, Б. Л. Каплан, М. Г. Лебедев и др.]. Москва : Координационный научно-информационный центр, 1998. 40 с.

Подано 22.01.2018

М. Ю. Ракушев, А. Ю. Пермяков

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ МЕТОДОМ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Предложена численно-аналитическая вычислительная схема интегрирования дифференциального уравнения движения космического аппарата в гринвичской *прямоугольной системе координат, которая разработана на основе многомерных дифференциально-тейлоровских преобразований. Отличительной особенностью предложенной схемы является расчет ускорений в дифференциальном уравнении движения космического аппарата на основе дифференциально-тейлоровских преобразований различной мерности, а именно: ускорений от консервативных сил (геопотенциала) – на базе двумерных дифференциально-тейлоровских преобразований, а ускорений от неконсервативных сил (сопротивление атмосферы, притяжение Луны, Солнца, переносная центробежная сила, сила инерции Кориолиса) – на основе одномерных дифференциально-тейлоровских преобразований. Такой подход, уменьшает необходимые аналитические выкладки при получении дифференциального уравнения движения космического аппарата и, соответственно, уменьшает методическую сложность при разработке процедур прогнозирования движения космических аппаратов. Проведено сравнение по критерию "точность – вычислительная сложность" предложенной вычислительной схемы интегрирования с известной схемой на основе одномерных дифференциально-тейлоровских преобразований.*

Ключевые слова: *прогнозирование движения, интегрирование, космический аппарат, баллистико-навигационное обеспечение, многомерные дифференциально-тейлоровские преобразования.*

M. Yu. Rakushev, O. Yu. Permiakov

PREDICTION OF SPACECRAFT MOTION ACCORDING BY THE METHOD OF MULTIDIMENSIONAL DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

A numerical-analytical computational scheme for integrating the differential equation of motion of a spacecraft in the Greenwich rectangular coordinate system is proposed, which is developed on the basis of multidimensional differential-Taylor transformations. A distinctive feature of the proposed scheme is the calculation of the accelerations in the differential equation of motion of the spacecraft on the basis of differential-Taylor transformations of various dimensions, namely: accelerations from conservative forces (geopotential) – based on two-dimensional differential-Taylor transformations, and accelerations from non-conservative forces (resistance of the atmosphere, attraction of the Moon, the Sun, portable centrifugal force, Carioles inertia force) – based on one-dimensional differential-Taylor transformations. This approach reduces the necessary analytical computations in obtaining the differential equation of motion of the spacecraft and, accordingly, reduces the methodological complexity in developing procedures for predicting the motion of space vehicles. A comparison is made by the criterion "accuracy-computational complexity" of the proposed computational scheme of integration with a known scheme on the basis of one-dimensional differential-Taylor transformations.

Keywords: *motion prediction, integration, spacecraft, ballistic-navigation support, multidimensional differential-Taylor transformations.*