

Борисова Алина Алексеевна, доц., кафедра иностранных языков, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-69.

Borysova Alina, Associate Professor, Department of foreign languages, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-69.

*Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. В.М. Михайловим.
Отримано 1.08.2015. ХДУХТ, Харків.*

УДК 519.87:664.8.036

ВИКОРИСТАННЯ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОВОЇ ОБРОБКИ

**В.М. Михайлов, М.С. Синєкоп,
Л.О. Пархоменко, С.В. Михайлова, М.С. Софронова**

Запропонована математична модель процесу теплової обробки напівфабрикатів у вигляді нестационарного рівняння теплопровідності, початкових умов та основних типів межових умов. Основу розрахункового алгоритму складають проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна та метод R-функцій, що дозволяє розглядати довільні геометричні форми напівфабрикатів та враховувати широкий спектр засобів підводу тепла для раціональної теплової обробки. Зведення початково-межової задачі до задачі Коші для системи диференціальних рівнянь дозволяє проводити чисельні експерименти з використанням ПК із метою вибору оптимальних режимів теплообробки напівфабрикатів.

***Ключові слова:** тепла обробка напівфабрикатів, рівняння теплопровідності, проєкційний метод, R-функції.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ R-ФУНКЦИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОВОЙ ОБРАБОТКИ

**В.М. Михайлов, Н.С. Синєкоп,
Л.А. Пархоменко, С.В. Михайлова, М.С. Софронова**

Предложена математическая модель процесса тепловой обработки полуфабрикатов в виде нестационарного уравнения теплопроводности,

© Михайлов В.М., Синєкоп М.С., Пархоменко Л.О., Михайлова С.В.,
Софронова М.С., 2015

начальных условий и основных типов краевых условий. Основу расчетного алгоритма составляют проекционный метод Бубнова-Галеркина и метод R-функций, что позволяет рассматривать произвольные геометрические формы полуфабрикатов и учитывать широкий спектр средств подвода тепла для рациональной тепловой обработки. Сведение начально-краевой задачи к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений позволяет проводить численные эксперименты с использованием ПК с целью выбора оптимальных режимов теплообработки полуфабрикатов.

Ключевые слова: тепловая обработка полуфабрикатов, уравнение теплопроводности, проекционный метод, R-функции.

R-FUNCTIONS APPLICATION FOR MATHEMATICAL MODELLING OF HEAT TREATMENT PROCESSES

V. Mikhaylov, M. Sinekop, L. Parhomenko, S. Michaylova,
M. Sofronova

The investigations on the establishment of optimal mode of heat treatment process of semi-finished products are carried out in this paper. A mathematical model of heat treatment process of semi-finished products is considered in the form of non-stationary heat equation with the initial conditions and main types of boundary conditions. The presence of time component in the initial-boundary problem and the desire to take into account real geometric shapes of semis, complicate the mathematical model of the problem. There are three types of boundary conditions in the problem statement, which are corresponding to different types of external conditions. In the first type of boundary condition the temperature of external environment is given, in the second heat flux is given, and in the third – heat exchange with external environment of the given temperature. The basis of the calculation algorithm is projective Bubnov-Galyorkin method in conjunction with R-function method, which will enable to consider arbitrary geometric forms of semi-finished products and to take into account wide range of tools for efficient supply of heat treatment process. The structures of problem solution are constructed by means of R-function method. These structures exactly satisfy the boundary conditions. To determine unknown coefficients of approximate solution of Bubnov-Galyorkin projective method is proposed. Reduction of the initial-boundary problem to Cauchy problem to a system of differential equations allows carrying out numerical experiments with the use of PC in order to select optimal modes of heat treatment of semis. The solution of Cauchy problem for the differential equations system can be obtained by means of Runge-Kutta method.

Keywords: heat treatment process of a semi-finished product, heat equation, projective method, R-function method, Runge-Kutta method.

Постановка проблеми у загальному вигляді. З метою встановлення оптимальних режимів процесу теплової обробки

напівфабрикатів пропонується математична модель процесу у вигляді нестационарного рівняння теплопровідності із початковими та межовими зовнішніми умовами. Наявність часової складової в початково-межовій задачі та прагнення враховувати реальні геометричні форми напівфабрикату ускладнюють математичну модель задачі. Для дослідження моделі в праці запропоновано сумісне використання методу R-функцій і проєкційного методу. За допомогою R-функцій будуються структури розв'язання задачі, які враховують наявні межові умови.

У результаті задача зводиться до дискретної моделі процесу у вигляді системи диференціальних рівнянь із початковими умовами. Розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь здійснюється за допомогою метода Рунге-Кутта.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Запропонована математична модель процесу у вигляді нестационарного рівняння теплопровідності розглядається в [1; 2].

Наближені розв'язки, які точно задовольняють межовим умовам, будуються за допомогою апарата R-функцій, описаного в [3; 4]. Для визначення невідомих коефіцієнтів наближеного розв'язку задачі пропонується проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна [5].

Мета статті – провести дослідження для встановлення оптимального режиму процесу теплової обробки напівфабрикатів, розглянувши різні типи зовнішніх умов.

Вклад основного матеріалу дослідження. Розглядаються процеси теплової обробки напівфабрикату, переріз якого в площині x_1Ox_2 має обмежену область Ω . Ці процеси описуються двовимірним нестационарним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad t > 0, x \in \Omega, \quad (1)$$

початковою умовою є

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

На поверхні напівфабрикату $\partial\Omega$ розглядаються наступні межові умови (або їх комбінації):

1) задана температура

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad (3)$$

2) заданий тепловий потік

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -k^{-1} q(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad (4)$$

3) відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем температури $T_0(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\lambda [u(x, t) - T_0(x, t)], x \in \partial\Omega, \quad (5)$$

де $x = (x_1, x_2)$; $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коефіцієнт теплопровідності,

c – теплоємність, ρ – густина, ν – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, λ – коефіцієнт теплообміну, $\varphi(x)$, $\psi(x, t)$, $q(x, t)$, $T_0(x, t)$ – задані функції.

Відзначимо, що праві частини початкових і межових умов задач не суперечливі, тобто вони задовольняють умові узгодженості,

наприклад, $\varphi(x) \Big|_{\partial\Omega} = \psi(x, 0)$. Зауважимо, що на практиці

зустрічаються задачі, які називаються мішаними, коли, наприклад, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ і на ділянці $\partial\Omega_i$ ($i=1,2,3$) задається та чи інша умова із раніше визначених (3)–(5).

Для побудови наближених розв'язків поставлених задач пропонується метод R-функцій. За допомогою цього методу наближені розв'язки, які точно задовольняють трьом визначеним задачам з межовими умовами (3)–(5), представлені наступними формулами:

1) умова (3)

$$u(x, t) = \psi_0(x, t) + \omega(x)\Phi(x, t); \quad (6)$$

2) умова (4)

$$u(x, t) = \lambda^{-1}\omega(x)q_0(x, t) + \Phi(x, t) - \omega(x)D_1\Phi(x, t); \quad (7)$$

3) умова (5)

$$u(x, t) = \lambda\omega(x)T_1(x, t) + \Phi(x, t) - \omega(x)(D_1\Phi(x, t) + \lambda\Phi(x, t)), \quad (8)$$

де: $\omega(x)$ – ліва частина рівняння межі області Ω , що виражена

таким чином: $(\omega(x) = 0, \frac{\partial\omega(x)}{\partial\nu} = -1$ на $\partial\Omega$, $\omega(x) > 0$ в Ω);

$D_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$ ($D_1 = \frac{\partial}{\partial \nu}$ на $\partial\Omega$); $\psi_0(x, t)$, $q_0(x, t)$, $T_1(x, t)$ –

продовження в Ω відповідно до функцій $\psi(x, t)$, $q(x, t)$, $T_0(x, t)$; $\Phi(x, t)$ – невизначена компонента формул (6)–(8).

Для побудови функції $\omega(x)$ використовуються R-операції

$$x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} - \text{R-диз'юнкція,}$$

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} - \text{R-кон'юнкція.}$$

Продовження функцій, які задані на межі $\partial\Omega$, в усю область Ω може бути здійснено за допомогою функції «склеювання» [4]

$$\varphi = \left(\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \frac{\varphi_2}{\omega_2} + \dots + \frac{\varphi_m}{\omega_m} \right) / \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \dots + \frac{1}{\omega_m} \right)$$

із властивостями

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{іà} & \partial\Omega_1, \\ \varphi_2 & \text{іà} & \partial\Omega_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_m & \text{іà} & \partial\Omega_m. \end{cases}$$

Функції $\omega_i(x)$ ($i = \overline{1, m}$) є лівими частинами рівнянь меж $\partial\Omega_i$ ($i = \overline{1, m}$), які є покриттям межі $\partial\Omega$, а саме $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \partial\Omega_i$.

Невизначену компоненту структурних формул (6)-(8) будемо представляти розвиненнями

$$\Phi = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x), \quad (9)$$

де $\varphi_k(x)$ – елементи деяких повних систем функцій (степеневих поліномів, сплайнів тощо), $c_k(t)$ – невизначені коефіцієнти.

Після підстановки виразу (9) в структури розв'язку (6)–(8) наближений розв'язок можна надати формулою

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k(x), \quad (10)$$

де $u_0(x, t)$ задовольняє неоднорідним межовим умовам (3)–(5), $u_k(x)$ – відповідним однорідним; $c_k(t)$ – невизначені коефіцієнти. Для знаходження коефіцієнтів $c_k(t)$ пропонується проєкційний метод Бубнова-Гальборкіна [5].

Для компактності викладу алгоритму проєкційного методу рівняння (1) запишемо з використанням оператора Лапласа (Δ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta^* u = 0, \quad t > 0, \quad \Delta^* = a^2 \cdot \Delta = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right). \quad (11)$$

Для рівняння (11) функції u_1, u_2, \dots, u_n утворюють базис, який залежить лише від просторових координат, а u_0 залежить як від просторових координат, так і від часу. Підстановка розвинення (10) в рівняння (11) за деяких конкретних значень $c_k(t)$ не перетворює (11) в тотожність. У лівій частині рівняння (11) одержуємо деяку відмінну від нуля величину $\delta(x, c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$, яка називається нев'язкою.

Коефіцієнти $c_k(t)$ будемо визначати за умови, щоб нев'язка δ була ортогональною в Ω до усіх функцій u_1, u_2, \dots, u_n . Ця вимога приводить до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dc_k(t)}{dt} (u_k, u_l) - \sum_{k=1}^n c_k(t) (\Delta^* u_k, u_l) = \left(\left(\Delta^* - \frac{\partial}{\partial t} \right) u_0, u_l \right), \quad l = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де (u_k, u_l) – скалярний добуток функцій u_k, u_l , який визначається формулою $(u_k, u_l) = \iint_{\Omega} u_k u_l d\Omega$.

Введемо позначення

$$A_{kl} = (u_k, u_l), \quad B_{kl} = (\Delta u_k, u_l), \quad d_l = \left(\left(\Delta^* - \frac{\partial}{\partial t} \right) u_0, u_l \right)$$

та представимо систему (12) у вигляді

$$\sum_{k=1}^n \frac{dc_k(t)}{dt} \cdot A_{kl} + \sum_{k=1}^n c_k(t) \cdot B_{kl} = d_l, \quad l = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Початкові умови для системи звичайних диференціальних рівнянь (13) одержуємо природнім шляхом із початкових умов (2): розв'язок (10) підставляємо в (2) і одержуємо значення $c_1(0), c_2(0), \dots, c_n(0)$ за умови ортогональності нової нев'язки усім функціям u_1, u_2, \dots, u_n . Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $c_1(0), c_2(0), \dots, c_n(0)$

$$\sum_{k=1}^n c_k(0) (u_k, u_l) = -(\varphi, u_k), \quad l = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Задача Коші для системи (13) розв'язується за початковими умовами, які визначаються із системи (14).

Таким чином, нестационарна задача теплопровідності зведена до системи диференціальних рівнянь, розв'язання яких може бути здійснено на сучасних ПК.

Висновки. Побудовано математичну модель процесу теплової обробки напівфабрикатів. Отримано алгоритм знаходження розв'язку задачі за різних типів зовнішніх умов.

Список джерел інформації. References

1. Черевко О. І. Процеси та апарати жаріння харчових продуктів / О. І. Черевко, В. М. Михайлов, І. В. Бабкіна. – Харків : ХДУХТ, 2000. – 332 с.
Cherevko, O.I. Mihaylov, V.M. Babkina, I.V. (2000), *Processes and equipment cooking food [Process ta apparati garinnya harshovih produktiv]*, Kharkiv, HDUHT, 332 p.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков / Гостехиздат, М., 1952. – 392 с.

Likov, A.V. (1952), *The theory of thermal conductivity*, [Teoriya teploprovodnosti], Gostehizdat, Moskow, 392 p.

3. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев : Наук. думка, 1976. – 288 с.

Rvachev, V.L., Slesarenko, A.P. (1976), *The algebra of logic and integral transforms in boundary value problems* [Algebra logiki i integralnie preobrazovaniya v kraevih zadachah], Nauk. dumka, Kiev, 288 p.

4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев : Наук. думка, 1982. – 552 с.

Rvachev, V.L. (1982), *The theory of R-functions and some of its applications* [Teoriya R-funkcii i nekotorie prilogeniya], Nauk. dumka, Kiev, 552 p.

5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.

Mihlin, S.G. (1970), *Variational methods in mathematical physics* [Variacionnie metodi v matematicheskoi fizike], Nauka, Moskow, 512 p.

Михайлов Валерій Михайлович, д-р техн. наук, проф., кафедра процесів, апаратів та автоматизації харчових виробництв, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-03; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Михайлов Валерий Михайлович, д-р техн. наук, проф., кафедра процессов, аппаратов и автоматизации пищевых производств, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-03; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Mikhaýlov Valerij, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Processes, apparatus and automation of food production, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkov, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-03; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Синькоп Микола Сергійович, д-р техн. наук, проф., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-46.

Синькоп Николай Сергеевич, д-р техн. наук, проф., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-46.

Sin'kop Mykola, Doctor of Technical Sciences, Professor, department of physical and mathematical and engineering disciplines, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkov, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-46.

Пархоменко Лариса Олександрівна, ст. викл., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-46; e-mail: larisa_p99@mail.ru.

Пархоменко Лариса Александровна, ст. преп., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-46; e-mail: larisa_p99@mail.ru.

Parhomenko Larysa, Senior Lecturer, department of physical and mathematical and engineering disciplines, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkov, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-46; e-mail: larisa_p99@mail.ru.

Михайлова Світлана Володимирівна, канд. техн. наук, кафедра процесів, апаратів та автоматизації харчових виробництв, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-03, 0508415699; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Михайлова Светлана Владимировна, канд. техн. наук, кафедра процессов, аппаратов и автоматизации пищевых производств, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-03, 0508415699; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Mikhaýlova Svitlana, Candidate of Technical Sciences, Department of Processes, apparatus and automation of food production, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkov, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-03, 0508415699; e-mail: prociap_hduht@mail.ru.

Софронова Марина Сергіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-46.

Сафронова Марина Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доц., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-46.

Safronova Maryna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, department of physical and mathematical and engineering disciplines, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkov, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-46.

*Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. О.І. Черевком.
Отримано 1.08.2015. ХДУХТ, Харків.*