УДК.621.317

ПАРАМЕТРАЛЬНІ ПРИЙОМИ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ ЧАСТОК ДЛЯ ЕЛІПСОЇДНОГО СФЕРОЇДА НА ПРИКЛАДІ СПЕРМІЇВ ТВАРИН

Федюшко Ю.М., д.т.н.
Таврійський державний агротехнологічний університет,
Тел.+38(0619)42-57-97

Анотація **– пропонується математична модель процесу масопереносу часток кріоконсервуючого середовища до поверхні біологічних об'єктів за наявності акустичних коливань.**

Ключові слова **– еліпсоїдний сфероїд, біологічний об’єкт, середовище**.

Постановка проблеми. Процес дії звукової хвилі на біологічний об'єкт описується краєвим завданням лінійної акустики. В результаті рішення цієї задачі отримані аналітичні вирази для коливальної швидкості і надмірного тиску в границях меж біологічного об'єкту. Ці величини використовуються для розрахунків швидкості мікропотоків, що виникають в кріоконсервуючому середовищі на межі біологічних об'єктів та при моделюванні процесу масопереносу часток кріоконсервуючого середовища до поверхні біологічного об'єкту[1,4].

Аналіз останніх досліджень. Кріоконсервуюче середовище розглядається як суцільне середовище із заданими значеннями щільності, швидкості звуку і в'язкості. Біологічні об'єкти моделюються геометричними тілами у вигляді кулі і еліпсоїдами обертання (витягнутий сфероїд). На поверхнях цих тіл ставиться гранична умова: рівність нулю, суми тиску збудливої звукової хвилі і надмірного тиску, що виникає в результаті дифракції звукової хвилі на біологічному об'єкті.

Асимптотичні методи засновані на використанні параметрів щодо малої величини. З урахуванням деяких припущень, рівняння механіки безперервних середовищ можуть бути спрощені [2]. Наприклад, такий експериментальний факт, як незначна зміна профілю сигналу на відстанях порівняних з довжиною хвилі, визначається мінімальністю числа Маху (*M*). Малий параметр *M1* може бути використаний для отримання рівняння Бюргера, що описує розповсюдження плоских нелінійних хвиль. Для опису слабкої дифракції ультразвукової хвилі використовується інший малий параметр, тобто відношення довжини ультразвукової хвилі до радіусу ультразвукового випромінювача. Відповідне припущення може бути застосоване в теорії розповсюдження електромагнітних хвиль і лазерних променів (так зване квазіоптичне приближення). Повна система диференціальних рівнянь в окремих похідних для ультразвукового пучка і поля гідродинамічних швидкостей і температур [3], має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\tilde{M}}{c_0}\frac{\partial p}{\partial \tau}-\frac{\varepsilon}{c_0^3\rho_0}\cdot p\frac{\partial p}{\partial \tau}-\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right]=\Delta_{\_}p=\frac{c_0}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+U_x\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_r\frac{\partial U_x}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_0}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho_0}\Delta_{\_}U_x+F-\beta gT; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r)=0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+U_x\frac{\partial T}{\partial x}+U_r\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\chi}{\rho C_p}\Delta_{\_}T+\frac{c_0}{C_p}F, \qquad (4)$$

де (x,r) – циліндричні координати, вісь x співпадає з віссю пучка;

p – звуковий тиск;

$\tau=t-x/c_0$ – час;

ρ_0 і c_0 – щільність середовища та швидкість звуку;

g – гравітаційне прискорення;

$\varepsilon=1-\frac{1}{2}c_0^4\rho_0\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_s$ – параметр нелінійності;

$b=\xi+\frac{4}{3}\eta+\chi\left(\frac{1}{C_v}+\frac{1}{C_p}\right)$ – параметр, який описує ефективні втрати;

ξ і η – відповідно, коефіцієнти об’ємний та зсуву в’язкості;

χ – теплопровідність середовища;

C_p і C_v – теплоємності середовища при постійному тиску та об’ємі.

У кріоконсервуючому середовищі розповсюджується задана монохроматична звукова хвиля з потенціалом швидкостей U^i. В результаті розсіювання цієї хвилі на біологічному об'єкті виникає розсіяна акустична хвиля з потенціалом коливальної швидкості U^S. Тоді функція U^S повинна задовольняти однорідне рівняння Гельмгольця, а на межі біологічного об'єкту повний тиск повинен обертатися в нуль, тобто:

$$\left(U^i+U^s\right)\Big|_{\partial S}=0, \qquad (5)$$

де ∂S – гранична поверхня біологічного об'єкту.

На великих відстанях від біологічного об'єкту функція U^S повинна прагнути до нуля при $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\to\infty$. Якщо поглинання в кріоконсервуючому середовищі достатньо мале ($\gamma\to 0$), то функція U^S повинна задовольняти умову випромінювання Зоммерфельда [4].

Формулювання цілей статті. Метою статті є побудова та вирішення задачі по визначенню граничного інтегрального рівняння першого роду відповідно нормальної компоненти швидкості на основі теорії потенціалу.

Основна частина. Безпосередня дискретизація граничного інтегрального рівняння першого роду за допомогою існуючих квадратурних виразів для інтегралів [5], частіше за все приводить до невизначеної обумовленої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, тому ми будемо розглядати випадок для біологічного об'єкту в вигляді еліпсоїдального сфероїда (модель спермія).

Введемо сфероїдальні координати за наступними виразами:

$$x = c\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\cos\varphi \; ;$$
$$y = c\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\sin\varphi \; ; \qquad (6)$$
$$z = c\,\xi\,\eta,$$

де $c=\sqrt{a^2-b^2}$, a та b – відповідно, більша й менша напівосі еліпсоїдального сфероїда.

Змінні ξ,η,φ визначаються в інтервалах $\xi\in[1,\infty]$, $\eta\in[-1,1]$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Ці змінні виражаються через декартові координати x, y, z за виразами :

$$\xi = \frac{r_1+r_2}{2c}; \quad \eta = \frac{r_1-r_2}{2c}; \quad \varphi = arctg\left(y/x\right), \qquad (7)$$

де введені додаткові позначення:

$$r_1 = \left[x^2+y^2+(z+c)^2\right]^{1/2}, \quad r_2 = \left[x^2+y^2+(z-c)^2\right]^{1/2}. \qquad (8)$$

Рівняння поверхні еліпсоїдального сфероїда в сфероїдальних координатах мають простий вид:

$$\xi = \xi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}. \qquad (9)$$

Нехай координати точки на цій поверхні будуть ξ_0,η_0,φ_0, а координати довільної точки поза поверхнею $\xi=\xi_0$, будуть ξ,η,φ причому $\xi>\xi_0$. Тоді легко показати, що

$$\eta_0 = \pm\left(1-\cos^2\tau\Big/\left(1-e^2\cos^2\tau\right)\right)^{1/2},$$

де τ – параметр параметризації поверхні еліпсоїда обертання.

Для функції Гріна $G\left(kR\right)$[5], справедливо розкладання в ряд по сфероїдальним функціям:

$$G\left(kR\right) = -\frac{ik}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{\gamma_{mp}}S_{mp}\left(h,\eta_0\right)S_{mp}\left(h,\eta\right)\times$$
$$\times\cos m\left(\varphi-\varphi_0\right)je_{mp}\left(h,\xi_0\right)he_{mp}\left(h,\xi\right), \qquad (10)$$

де $S_{mp}(h,\eta)$ – кутові сфероїдальні функції;

$je_{mp}(h,\xi)$ та $he_{mp}(h,\xi)$ – радіальні сфероїдальні функції;

$h = k\sqrt{a^2-b^2}$ при $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$, $m \neq 0$;

$$\gamma_{mp} = \int_{-1}^{1} \left| S_{mp}(h,\eta) \right|^2 d\eta ,$$

$$R^2 = \left(a^2-b^2\right)\left[\xi^2 + \xi_0^2 - \eta^2 - \eta_0^2 - 2\xi\xi_0\eta\eta_0 - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(\xi_0^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)\left(1-\eta_0^2\right)} \cos\left(\varphi-\varphi_0\right)\right].$$

Використовуючи (10), можна розрахувати внутрішній інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(kR)\,d\varphi = -ik\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0p}} S_{0p}(h,\eta_0) S_{0p}(h,\eta)\, je_{0p}(h,\xi_0)\, he_{0p}(h,\xi). \quad (11)$$

Після ряду перетворень отримаємо наступний вираз для потенціалу U^S коливальної швидкості:

$$U^s = 2A\sum_{p=0}^{\infty} \frac{ip}{\gamma_{0p}} a_p\, S_{0p}(h,1)\, S(h,\eta)\; he_{0p}(h,\xi), \quad (12)$$

де $a_p = -je_{0p}(h,\xi_0) / he_{0p}(h,\xi_0)$.

Оскільки довжина збуджуючої звукової хвилі значно більше геометричних розмірів еліпсоїдального сфероїда, то, параметр $h = k\sqrt{a^2-b^2}$ повинен бути менше одиниці $(h \to 0)$.

Надалі вважатимемо, що амплітуда розсіяної хвилі нормована на амплітуду A збудливої хвилі і вважати $A = 1$.

Виконавши ряд перетворень та врахувавши граничні умови члену ряду (12) з індексом $p = 0$, в результаті отримаємо приближений вираз для потенціалу коливальної швидкості:

$$U^s = -\frac{AR}{r_1+r_2} e^{ik\frac{r_1+r_2}{2}}, \quad (13)$$

де $r_1 = \left(x^2 + y^2 + (z+c)^2\right)^{1/2}$;

$r_2 = \left(x^2 + y^2 + (z-c)^2\right)^{1/2}$;

x, y, z – декартові координати точки, де визначається потенціал U^S (початок координат співпадає з центром симетрії еліпсоїдального сфероїда);

$$R = \frac{4a}{2 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\, \ell n\, \frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}}. \quad (14)$$

Звідки видно, що при $a = b = R$, еліпсоїдний сфероїд перетворюється на сферу радіусу R. Якщо скористатися виразом для хвилевого числа k, то отримаємо:

$$U^s = -\frac{A R e^{-\alpha \frac{(r_1 + r_2)}{2}}}{r_1 + r_2} \cos\left(k_0 \frac{(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right) \quad (15)$$

Таким чином, потенціал коливальної швидкості для еліпсоїдного сфероїда по своїй структурі подібний до потенціалу для кулі. Насправді, з (15) витікає, що при значних відстанях від межі еліпсоїдного сфероїда, коли виконується умова $r_1 + r_2 \cong 2r = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, вираз потенціалу U^S набуде вигляду:

$$U^s = -\frac{A R e^{-\alpha r}}{r} \cos\left(k_0 r - \omega t\right), \quad (15)$$

$$R = \frac{2a}{2 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ell n \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}}. \quad (16)$$

З (15) витікає, що потенціал коливальної швидкості еліпсоїдного сфероїда на великих відстанях $\left(r_1 + r_2 \cong 2r\right)$співпадає з потенціалом коливальної швидкості сфери з радіусом що задається по формулі (16). Тоді швидкість поля визначається :

$$\vec{V} = \frac{A R \vec{r} e^{-\alpha \frac{(r_1 + r_2)}{2}}}{\rho_0 r_1 r_2} \left[\cos\left(k_0 \frac{(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right)\left(\frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{k_0}{2} \sin\left(k_0 \frac{(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right)\right], \quad (17)$$

де $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орти декартової системи координат з початком співпадаючим з центром симетрії еліпсоїдного сфероїда.

Висновки. Таким чином, побудована математична модель процесу дії звукової хвилі на кріоконсервуюче середовище, що містить біологічні об'єкти, дозволяє визначати всі основні характеристики процесу впливу. За допомогою цієї моделі в низькочастотному приближені отримані аналітичні вирази для розрахунку коливальної швидкості і надмірного тиску, що виникають в кріоконсервуючому середовищі під дифракцією звукової хвилі на біологічному об'єкті. Ці вирази є основою для аналізу процесу масопереносу часток кріоконсервуючого середовища до поверхні біологічних об'єктів за наявності акустичних коливань.

Література

1. *Кунденко Н.П.* Математическое моделирование процесса воздействия акустического поля на криоконсервирующую среду с био-

логическим объектом: матеріали міжнародної науково-практичної конференції "Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України"/ *Н.П. Кунденко*. – Харків: ХНТУСГ ім. П. Василенка. – 2011. – Вип 117. – С. 140-142.

2. *Еременко З.Е.* Объемный полусферический резонатор для измерения диэлектрической проницаемости в малом объеме сильно поглощающей жидкости / *З.Е. Еременко, Е.М. Ганапольский* // Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. / – Харьков: ХНТУСГ ім. П. Василенка, 2003. – Т. 8, № 2. – С. 187–196.

3. *Ширман Я.Д.* Радиоволноводы и объемные резонаторы / *Я.Д. Ширман*. – М.: Гос. изд-во лит-ры по вопросам связи и радио, 1959. – 380 с.

4. *Акопян В.Б.* Исследование механизмов действия ультразвука на биологические среды и объекты. / *В.Б. Аконян, А.П. Сарвазян* // Акустический журнал. – 1979. – Т. 25. – С. 462-463.

5. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. / *Н.С. Бахвалов*. – М.: Наука, 1975. – 632 с.

ПАРАМЕТРАЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАССОПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ ДЛЯ ЭЛЛИПСОИДНОГО СФЕРОИДА НА ПРИМЕРЕ СПЕРМИЕВ ЖИВОТНЫХ

Федюшко Ю.М.

Аннотация

Предлагается математическая модель процесса массопереноса частиц криоконсервующей среды к поверхности биологических объектов при наличии акустических колебаний.

PARAMETRAL'NI RECEPTIONS OF DESIGN TO CARRY THOSE THE MASS OF PARTICLES FOR ELLIPSOID SPHEROID OF STEP EXAMPLE OF SPERM OF ANIMALS

Yu. Fediushko

Summary

The mathematical model of process of carry those the mass of particles of kriocanning environment is offered to the surface of biological objects at presence of acoustic vibrations.