УДК 517.518.82

ВІДНОВЛЕННЯ КРИВОЇ ЗА ЇЇ НОРМАЛЯМИ В СИСТЕМІ ТОЧОК

Величко О. В., к.ф.-м.н.,
Малкіна В. М., д.т.н.
Таврійський державний агротехнологічний університет
Тел. (0619) 42-68-74

Анотація – **Для деякої кривої відомі напрямки нормалей в системі точок. Ставиться задача про апроксимацію цієї кривої. Шукана крива повинна задаватися многочленом. Функція нев'язки вибрана таким чином, що система для визначення коефіцієнтів многочлена була лінійною. Систему було отримано методом найменших квадратів. Отримані розрахункові формули та наведено чисельний приклад, який ілюструє ефективність запропонованого алгоритму.**

Ключові слова: **нормаль, нев'язка, крива, многочлен, відновлення.**

Актуальність теми. Як відомо, регулярну криву на площині можна однозначно (з точністю до положення) відновити за її натуральними рівняннями [1]. Однак на практиці не завжди відомі геометричні характеристики кривої у всіх її точках. Якщо у дослідника є інформація про криву в дискретній системі точок, то одним із методів відновлення кривої є апарат дискретного геометричного моделювання [2]. При цьому результатом роботи відповідних алгоритмів є додаткова інформація про криву на більш широкій множині точок при деяких апріорних припущеннях про її поведінку.

Задача пошуку апроксимуючого полінома, зазвичай, розглядається для кривої, про яку відомо положення декількох точок [3]. В статті цей підхід пропонується для відновлення кривої по дискретній системі її нормалей. Така задача виникає, наприклад, при відновленні тривимірного образу об'єкта по його фотографії при використанні моделі Ламберта[4]. В таких задачах, зазвичай, використовуються інші методи, описані у статтях [5,6].

Постановка проблеми. На координатній площині задана деяка регулярна крива Φ, яка однозначно проектується на область D координатної осі OX. В області D задано n точок $A_i(x_i)$, $i=1...n$, в яких відомі нормалі $\bar{v}_i$ до кривої Φ. Потрібно знайти криву Ψ, яка описується рівнянням $y = P_m(x)$, нормалі до якої в точках A_i «близькі» в деякому сенсі по напрямку до векторів $\bar{v}_i$. Тут $P_m(x)$ - поліном фіксованого степеня m. Поняття «близькості» нормалей потрібно строго визначити при формалізації задачі.

Якщо для визначення «близькості» порівнювати задані та відновлені нормалі одиничної довжини, то функція нев'язки буде містити радикали, і система, утворена після обчислення частинних похідних буде дуже громіздкою і її розв'язок аналітично знайти не можливо. Ставиться задача розробки алгоритму, який призводить саме до лінійної системи рівнянь.

Метод розв'язання. Вважаємо, що всі нормалі $\bar{v}_i$ задані таким чином, що утворюють гострий кут з додатним напрямком вісі OY. Оскільки нас цікавить тільки напрямок векторів, а не їх довжина, зручно вважати, що вони нормовані таким чином, що їх друга координата дорівнює одиниці, тобто $\bar{v}_i = \bar{v}_i(v_i, 1)$.

Функцію $P_m(x)$ запишемо у вигляді

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j . \tag{1}$$

Тоді вектор нормалі к графіку функції $y = P_m(x)$ в точці $A_i(x_i)$ буде наступним

$$\bar{\omega}_i = \left(-P'_m(x_i), 1\right). \tag{2}$$

Таким чином, якщо поставлена задача розв'язана точно, то повинні мати місце рівності

$$\bar{\omega}_i = \bar{v}_i, i = 1..n ,$$

які можна записати у вигляді однієї тотожності

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\omega}_i - \bar{v}_i)^2 = 0 .$$

Оскільки ступінь многочлена $P_m(x)$ фіксований, то мова йде про наближений розв'язок. В цьому випадку наведений вираз не буде дорівнювати нулю. «Близькість» напрямків заданих та побудованих нормалей будемо характеризувати нев'язкою

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\bar{\omega}_i - \bar{v}_i)^2 , \tag{3}$$

яку потрібно мінімізувати. З урахуванням (1) та (2), в розгорнутому вигляді нев'язка буде записуватися наступним чином

$$2F(a_1,a_2,...,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i+\sum_{j=1}^{m}ja_jx^{j-1}\right)^2\to\min. \qquad (4)$$

Кількість шуканих параметрів a_j дорівнює $m-1$, оскільки наявність доданка a_0 не впливає на напрямки нормалей. Для знаходження цих параметрів, згідно з методом найменших квадратів, потрібно знайти частинні похідні від F по ним та прирівняти отримані вирази до нуля. Це призводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial a_s}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(v_i+\sum_{j=1}^{m}j\cdot a_jx_i^{j-1}\right)sx_i^{s-1}\right)=0,\quad s=\overline{1,m}$$

Після перетворень матимемо

$$\sum_{j=1}^{m}ja_jR_{j+s-2}+L_{s-1}=0,\quad s=\overline{1,m}, \qquad (5)$$

де

$$R_\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ ,\ L_\alpha=\sum_{i=1}^{n}v_ix_i^\alpha\ . \qquad (6)$$

Розв'язавши систему (5), отримаємо значення коефіцієнтів, які задають криву Ψ.

Тестовий приклад. Нехай тестова крива Φ задана рівнянням $y=-\sin(8x)e^{-x}$ та 7 точок $A_1(0)$, $A_2(0.1)$, $A_3(0.2)$, $A_4(0.3)$, $A_5(0.4)$, $A_6(0.5)$, $A_6(0.6)$. Відповідні нормовані нормалі мають вигляд $\bar{v}_1=(8,1)$, $\bar{v}_2=(4.394,1)$, $\bar{v}_3=(-1.010,1)$, $\bar{v}_4=(-4.871,1)$, $\bar{v}_5=(5.314,1)$, $\bar{v}_6=(-2.713,1)$, $\bar{v}_7=(0.931,1)$.

По відомим координатам точок A_i та нормалей $\bar{v}_i$, за допомогою наведеного вище математичного апарату були отримані многочлени

$$P_3=-9.12x+36.775x^2-32.98x^3$$

та

$$P_5=-8x+5.054x^2+118.349x^3-263.401x^4+115.498x^5,$$

які описують функції, що апроксимують тестову функцію.

В таблиці 1 наведені перші координати векторів нормалей, обчислених для кривої Φ (тобто заданих) в точках A_i, та ці ж координати для нормалей побудованих кривих (нагадаємо, що другі координати дорівнюють 1).

Таблиця 1 – Абсциси нормованих векторів нормалей

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
Φ	8	4.394	-1.01	-4.871	5.314	-2.713	0.931
P_3	9.12	2.754	-1.633	-4.041	4.47	-2.921	0.607
P_5	7.997	4.411	-1.042	-4.84	-5.327	-2.711	0.931

На рис.1 зображена задана крива Φ та дві криві, які є результатом її відновлення. Коефіцієнт $a_0 = 0$ обирався таким чином, щоб ці криві мали загальну точку $(0,0)$.

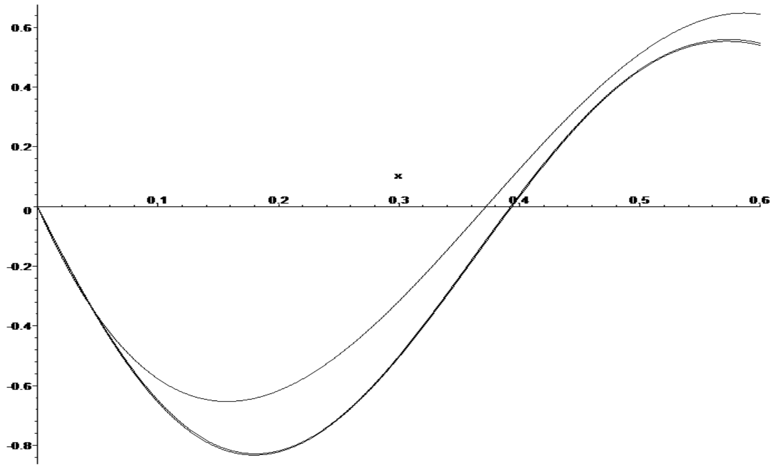

Рис. 1. Задана крива Φ та відновлені криві P_3 та P_5.

Як бачимо, крива, задана многочленом P_5, точніше наближає тестову криву Φ . Нев'язки (3) для функцій $y = P_3(x)$ та $y = P_5(x)$ відповідно дорівнюють 2.9404 та 0.0012.

Висновки. В статті сформульована задача про наближене відновлення кривої (з точністю до вертикальних зсувів) за її відомими нормалями в системі точок. Обґрунтовано та записано вираз для нев'язки. За допомогою методу найменших квадратів отримано розрахункові формули. Розглянуті тестові приклади підтверджують достовірність запропонованої методики.

Література

1. *Сизый С.В.* Лекции по дифференциальной геометрии. // С.В. Сизый // Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 376с.
2. *Найдиш В.М.* Основи прикладної геометрії (навчальний посібник) / В.М. Найдиш, А.В. Найдиш, В.М. Верещага, В.М. Малкіна// Мелітополь, 2007. – 194с.
3. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обра-

ботки наблюдений / Ю.В. Линник // – М 1962. – 352с.
4. *Вежневец В.М.* Задача восстановления формы объекта по закраске (shape from shading). / В.М. Вежневец. // Компьютерная графика и мультимедиа. – Выпуск №2(1)/2004. Режим доступу http://cgm.computergraphics.ru/content/view/59
5. *Корчагин Д.С.* Реконструктивная геометрия кривой линии. / Д.С.Корчагин, К.Л. Панчук// Электронный журнал "ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»– Выпуск 13 номер 27. Режим доступу http: // www.apg.mai.ru/Volume13/Number27/pan1327.pdf
6. *Doi M.* Three-dimensional mesh generation of an object from an image by shape-from-shading and ellipsoidal bubble mesh method //M.Doi,Y. Takabe //Electronic Imaging 2007. – International Society for Optics and Photonics, 2007. – С. 649908-649908-9.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРИВОЙ ПО ЕЕ НОРМАЛЯМ В СИСТЕМЕ ТОЧЕК

Е. В. Величко, В. М. Малкина

Аннотация - для некоторой кривой известны направления нормалей в системе точек. Ставится задача об аппроксимации этой кривой. Искомая кривая должна задаваться многочленом. Функция невязки выбирается таким образом, что система для определения коэффициентов многочлена была линейной. Данную систему было получено методом наименьших квадратов. Получены расчетные формулы и приведены численные примеры, которые иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма.

RECOVERY CURVE ON ITS NORMALS SPECIFIED IN THE POINTS

H. Velichko, V. Malkina

Summary

Consider the problem of searching for polynomial. Normal to the graph of this polynomial at the given points are close to the given vectors. Applicable the specially constructed function of the discrepancy and the method of least squares. Obtain a system of linear equations to determine the coefficients of the polynomial. Given the calculation formulas. A numerical example has be. Illustrated the efficiency of the proposed algorithm.