УДК 681.5.03

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИЕЙ РАВНОВЕСИЯ

Волянский Р.С., к.т.н.
Днепродзержинский государственный технический университет
Тел.: +380674985064

Аннотация - **путем анализа характеристического уравнения замкнутой системы управления линеаризованным электромеханическим объектом с нелинейным алгоритмом предложен метод нахождения нелинейных стабилизирующих обратных связей, обеспечивающих улучшенные динамические характеристики. Использование предложенного метода базируется на применении итерационных процедур решения систем нелинейных уравнений. Приведенные выкладки подтверждены результатами математического моделирования.**

Ключевые слова: **характеристическое уравнение, нелинейная электромеханическая система, численные методы, переменный коэффициент усиления, апериодический переходный процесс**

Постановка проблемы. В настоящее время одним из методов линеаризации уравнений движения нелинейных электромеханических систем является линеаризация обратными связями [1], которая позволяет представить произвольные уравнения движения

$$py_i = f_i(y_1,..., y_n,U) \tag{1}$$

где $y_1,..., y_n$ - координаты электромеханической системы;

U - управляющее воздействие;

$f_i(.)$ - некоторые функции, определяющие взаимосвязь переменных состояния рассматриваемой системы;

n - порядок объекта управления, в форме Бруновского

$$pz_1 = z_2;\ ...,\ \ pz_{m-1} = z_m;\ \ pz_m = v,\ z_1 = y_j,$$
$$U = \frac{1}{L_g L_f^{m-1} z_1}\left(L_f^m z_1 + v\right), \tag{2}$$

где $z_1,...., z_m$ - новые переменные состояния;

m - порядок уравнений внешней динамики;

v - новое управляющее воздействие;

$L_g L_f^{m-1} z_1$ и $L_f^m z_1$ - соответствующие производные Ли [1].

Характеристическое уравнение линеаризованного объекта (2)

$$D(p) = p^m = 0, \tag{3}$$

имеет m-кратный нулевой корень, что ограничивает число методов и подходов, которые можно использовать для синтеза системы управления. При этом исключается большинство инженерных подходов к решению задач оптимизации электромеханических систем, таких как решение задачи аналитического конструирования регуляторов (АКР) [2], синтез замкнутых систем с позиции обратных задач динамики (ОЗД) [1]. Использование частотных методов, основанных на использовании логарифмических частотных характеристик [3] приводит к регуляторам со сложнореализуемыми передаточными функциями, полюса и нули которых выбраны эмпирически и не гарантируют требуемое качество процесса управления. Современные методы создания систем управления [4] не всегда обеспечивают желаемые динамические и статические характеристики замкнутых систем.

Анализ последних исследований. Одним из известных подходов, позволяющих синтезировать управляющее воздействие для объекта (2) является его последовательная и параллельная регуляризация [2,5]. Однако этот подход приводит к подмене объекта (2) следующим динамическим объектом

$$pz_1 = z_2, ..., pz_{m-1} = z_m; \, pz_m = -\sum_{i=2}^{m} a_i z_i + mv, \tag{4}$$

где a_i и m - коэффициенты регуляризации, которые назначаются из условий обеспечения желаемых траекторий движения внутренних контуров объекта управления.

Недостатком такого подхода является необходимость синтеза системы управления каждой внутренней переменной и использование при синтезе контура управления внешней переменной информации о всех синтезированных внутренних контурах [5]. Очевидно, что при синтезе систем управления электромеханическими объектами большого порядка такой подход является весьма трудоемким, особенно при различных коэффициентах регуляторов внутренних контуров.

Устранить этот недостаток можно, если синтезировать модальную систему управления [1]. В этом случае задание желаемого характеристического полинома автоматически означает определение весовых коэффициентов управляющего воздействия [6]. Однако, для обеспечения асимптотически устойчивых переходных процессов в этом случае увеличивают коэффициенты внутренних обратных связей, что приводит к сильному демпфированию системы и снижению ее быстродействия. Поэтому задача синтеза быстродействующей системы управления динамическим объектом с несколькими нулевыми корнями характеристического уравнения является актуальной.

Формулировка целей статьи. Целью настоящей статьи является разработка метода определения переменных коэффициентов стабилизирующих обратных связей для нелинейных систем управления динамическими объектами с несколькими нулевыми корнями.

Основные материалы исследования. Рассмотрим линеаризованный электромеханический объект, динамика которого в форме Бруновского описывается уравнениями (2).

Будем считать, что все координаты объекта (2) известны и их комбинация подается на вход объекта в виде управляющего воздействия

$$v = f\left(\overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i \right), \tag{5}$$

где $f(.)$ - нечетная активационная функция;

$\overset{*}{z_1}$ - задающее воздействие

Введя переменный коэффициент

$$g = \left| \frac{f\left(\overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i \right)}{\overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i} \right| = \frac{f\left(\left| \overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i \right| \right)}{\left| \overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i \right|}, \tag{6}$$

Представим управляющее воздействие (5) следующим образом

$$v = g\left(\overset{*}{z_1} - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i \right). \tag{7}$$

Подстановка управляющего воздействия (7) в уравнения (2) после раскрытия скобок позволяет получить уравнения динамики замкнутой системы управления:

$$\begin{aligned} &pz_1 = z_2;\ \ldots,\ \ pz_{m-1} = z_m; \\ &pz_m = g\overset{*}{z_1} - gz_1 - g\sum_{i=2}^{m} k_i z_m. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) аналогичны по форме записи уравнениям (4), однако существенно отличаются наличием переменного коэффициента g. Значения этого коэффициента определяются используемой активационной функцией $f(.)$, которая в свою очередь выбирается из условия реализации в замкнутой системе скользящего режима заданного порядка.

Из последнего уравнения системы (8) легко может быть определено характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^m + g\sum_{i=2}^{m} k_i p^{i-1} + g = 0. \tag{9}$$

Асимптотически устойчивые переходные процессы в замкнутой системе возникают при отрицательных вещественных корнях уравнения (9).

Обозначив корни желаемого характеристического полинома $p_1, p_2, ..., p_m$ и потребовав выполнение условия

$$\prod_{i=1}^{m} p_i = g, \tag{10}$$

составим желаемый полином

$$D^*(p) = \prod_{i=1}^{m}(p + p_i). \tag{11}$$

Используя обобщение теоремы Виета [7], запишем соотношения, связывающие коэффициенты полиномов (9) и (11)

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = k_m g; \quad \sum_{\substack{i=1\\ j=i+1}}^{m} p_i p_j = k_{m-1} g; \quad \sum_{\substack{i=1\\ j=i+1\\ r=j+1}}^{m} p_i p_j p_r = k_{m-2} g; ... \tag{12}$$

В силу соотношения (10) можно утверждать, что корни желаемого характеристического полинома зависят от коэффициента g, т.е.

$$p_i = P_i(g), \; i = 1,...,m. \tag{13}$$

С учетом зависимостей (13) соотношения (12) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} q_m(g) &= k_m; \\ q_{m-1}(g) &= k_{m-1}; \\ q_{m-2}(g) &= k_{m-2}; ..., \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} q_m(g) = \sum_{i=1}^{m} P_i(g); \; q_{m-1}(g) = \sum_{\substack{i=1\\ j=i+1}}^{m} P_i(g) P_j(g); \\ q_{m-2}(g) = \sum_{\substack{i=1\\ j=i+1\\ r=j+1}}^{m} P_i(g) P_j(g) P_r(g); ... \end{gathered}, \tag{15}$$

Подставив в выражения (14) значение коэффициента (6), получим систему нелинейных уравнений для определения неизвестных переменных коэффициентов k_i, $i = 2,...,m$

$$q_j\left(\frac{f\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right)}{\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|}\right) = k_j, \quad j = 2,...,m, \tag{16}$$

или

$$w_j\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right) = 0, \quad j = 2,...,m, \tag{17}$$

где

$$w_j\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right) = q_j\left(\frac{f\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right)}{\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|}\right) - k_j. \tag{18}$$

Решение нелинейной системы алгебраических уравнений (17) может быть найдено только численно с использованием следующей итерационной зависимости, которая получена при помощи метода Ньютона

$$k_{jr} = k_{j(r-1)} - \frac{w_j\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right)}{\frac{\partial}{\partial k_j} w_j\left(\left|z_1^* - z_1 - \sum_{i=2}^{m} k_i z_i\right|\right)}. \tag{19}$$

Таким образом, коэффициенты стабилизирующих обратных связей определяются текущими значениями координат линеаризованного объекта, выбранной активационной функцией и в общем случае траекториями движения корней желаемого характеристического полинома.

В качестве примера рассмотрим определение коэффициента стабилизирующей обратной связи k_2 для линеаризованного объекта 2-го порядка

$$pz_1 = z_2; \; pz_2 = v, \tag{19}$$

с управляющим воздействием

$$v = sign\left(z_1^* - z_1 - k_2 z_2\right). \tag{20}$$

Введя переменный коэффициент

$$g = \frac{1}{\left| z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right|}, \tag{21}$$

запишем характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p) = p^2 + k_2 g p + g = 0. \tag{22}$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы выберем в качестве желаемого характеристического уравнения полином Ньютона [1]

$$D(p) = p^2 + 2\sqrt{g}\, p + g = 0. \tag{23}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях p позволяет получить следующее выражение для определения искомого коэффициента k_2

$$2\sqrt{g} = k_2 g \tag{24}$$

или

$$k_2 = \frac{2}{\sqrt{g}}. \tag{25}$$

Подставив в выражение (25) значение коэффициента (21), получим

$$k_2 = 2\sqrt{\left| z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right|}. \tag{26}$$

Решение уравнения (26) может быть получено в результате применения итерационной процедуры (19), которую для рассматриваемого примера можно представить следующим образом

$$k_{2r} = k_{2(r-1)} - \frac{2\left| z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right| - k_2 \sqrt{\left| z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right|}}{z_2 sign\left(z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right) - \sqrt{\left| z_1^* - z_1 - k_2 z_2 \right|}}. \tag{27}$$

Переходная функция синтезированной системы приведена на рис.1 (кривая 1), там же для сравнения показаны результаты работы системы управления с релейным регулятором (кривая 2), реализующим алгоритм вида

$$v_m = sign\left(z_1^* - z_1 - 2 z_2 \right), \tag{28}$$

который синтезирован при помощи последовательной регуляризации объекта (19) из условия обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Анализ полученных результатов показывает пятикратное повышение быстродействия системы управления с нелинейной линией переключения по сравнению с аналогичной системой с линейной линией переключения. При этом синтезированная нелинейная система является асимптотически устойчивой.

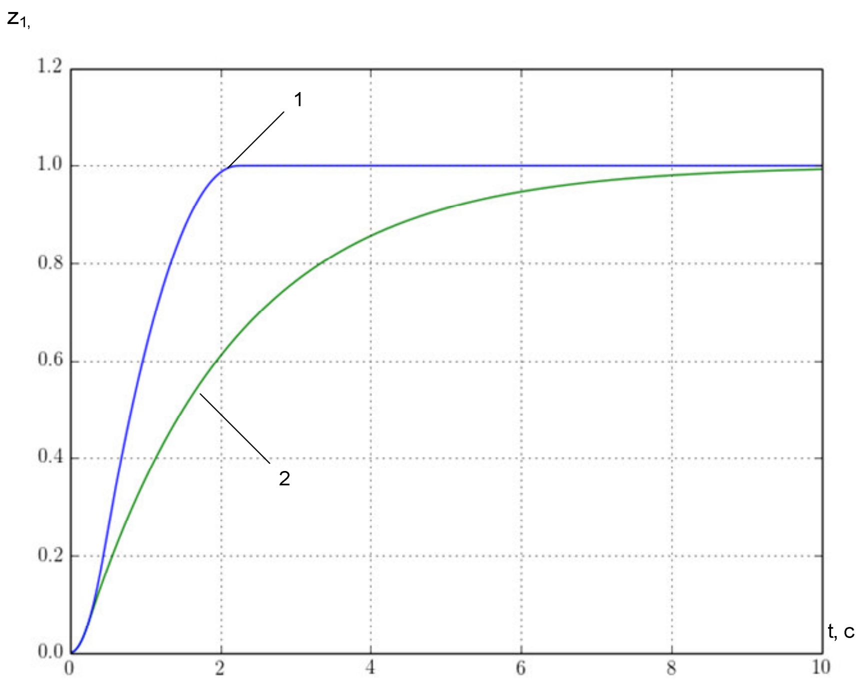

Рис.1 Результаты математического моделирования систем с переменным (кривая 1) и постоянным (кривая 2) коэффициентом стабилизирующей обратной связи.

Выводы. Приведенные в работе выкладки и результаты моделирования позволяют сделать следующие выводы:

1. Разработанный метод является методом параметрического синтеза, который позволяет определять коэффициенты стабилизирующих обратных связей в функции текущих значений координат линеаризованного объекта, выбранной активационной функции и траекторий движения корней желаемого характеристического полинома. Этот метод позволяет уточнять параметры алгоритмов управления, полученные в результате структурного синтеза и корректировать их заменой постоянных коэффициентов на переменные.

2. Любой алгоритм управления с нелинейной активационной функцией может быть приведен к виду аналогичному линейному алгоритму путем использования переменных коэффициентов, зависящих нелинейно от координат объекта. Такой подход позволяет составить характеристическое уравнение замкнутой системы управления с нелинейным алгоритмом и исследовать его методами классической теории автоматического управления.

3. Нелинейная зависимость введенных переменных коэффициентов от координат объекта управления определяет нелинейные траектории движения корней характеристического уравнения и, как следствие, формирует нелинейные стабилизирующие обратные связи. Использование этих обратных связей в системах разрывного управления

обеспечивает дополнительную форсировку, которая позволяет повысить быстродействие системы в целом.

4. Синтез переменных коэффициентов стабилизирующих обратных связей осуществляется из условия асимптотической устойчивости замкнутой системы и поэтому переход от постоянных коэффициентов обратных связей к переменным не нарушает условий устойчивости движения замкнутой системы.

5. В случае использования нелинейной нечетной активационной функции в алгоритме управления коэффициенты усиления стабилизирующих обратных связей могут быть определены численно при помощи соответствующих итерационных процедур. Такой подход позволяет синтезировать замкнутые системы со сколь угодно сложной активационной функцией, призванной обеспечить желаемое качество процесса управления.

Список использованный источников

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы [Текст]/ *Д.П.Ким.* – М.: Физматлит, 2004.–464с.

2. *Садовой А.В.* Системы оптимального управления прецизионными электроприводами [Текст]/ *А.В. Садовой, Б.В. Сухинин, Ю.В. Сохина.* – К.:ИСИМО, 1998. – 298с.

3. *Солодовников В.В.* Основы автоматического регулирования [Текст]/ *В.В. Солодовников.* – М.: Машгиз, 1954. - 1118с.

4. *Пупков К.А.* Методы классической и современной теории автоматического управления. Т 5. Методы современной теории автоматического управления [Текст]/ *К.А.Пупков, Н.Д.Егупов.* – М.: Изд-во МГТУ им.Баумана, 2004. – 784с.

5. *Волянский Р.С.* Алгоритмы регуляризация динамических объектов [Текст]/ *Р.С. Волянский, А.В. Садовой.* – Матеріали 1 Всеукраїнської науково-технічної конференції «Актуальні проблеми автоматики та приладобудування», 11-12 грудня 2014р, Харків.: НТУ «ХПІ», 2014. - С.27-28.

6. *Волянский Р.С.* Синтез оптимальной системы управления с нелинейной активационной функцией [Текст]/ *Р.С. Волянский, А.В. Садовой* // Электротехнические и компьютерные системы №15 (91), 2014. – С.69-71.

7. *Мельников О.В.* Общая алгебра [Текст] / *О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, Л.А. Скорняков, И.П. Шестаков.* - М.:Наука, 1990. - 592с.

СИНТЕЗ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З НЕЛІНІЙНИМ ЛІНІЄЮ РІВНОВАГИ

Волянський Р. С.

***Анотація* - шляхом аналізу характеристичного рівняння замкнутої системи управління линеаризованным електромеханічним об'єктом з нелінійним алгоритмом запропоновано метод знаходження нелінійних стабілізуючих зворотних зв'язків, що забезпечують покращені динамічні характеристики. Використання запропонованого методу базується на застосуванні ітераційних процедур розв'язання систем нелінійних рівнянь. Наведені викладки підтверджено результатами математичного моделювання.**

SYNTHESIS OF ELECTROMECHANICAL SYSTEMS WITH NONLINEAR EQUILIBRIUM LINE

R. Volyanskyi

Summary

By analyzing the characteristic equation of the closed-loop control system of linearized electromechanical object with nonlinear algorithm, the method of finding a nonlinear stabilizing feedback, providing superior dynamic performance, is suggested. The use of the proposed method is based on the use of iterative procedures for solving systems of nonlinear equations. Given calculations are confirmed by the results of mathematical modeling.