

**Шифрин Б.М.,
Извалов А.В.**

Кировоградская летная академия
Национального авиационного университета,
г. Кировоград, Украина
E-mail: b_shifrin@mail.ru

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ
МОДЕЛИ М.В. КЕЛДЫША
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПНЕВМОКОЛЕСА
С ОПОРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**

УДК 629.735.015: 533.6.013.43

В связи с развитием представлений о сухом трении твердых тел возобновился интерес к изучению шимми и других задач динамики пневмоколесных машин. В работе теоретические результаты по модели М. В. Келдыша (1945 г.) о взаимодействии упругого пневмоколеса с опорной плоскостью сопоставлены с результатами экспериментов, выполненных гораздо позже 1945 г. Рассматривались три режима движения пневмоколеса: поперечно-поступательные и азимутально-вращательные гармонические колебания вблизи нулевого угла увода, скачок угла увода. Для нахождения констант шины М. В. Келдыша использовались формулы И. Бесселинка и струнной теории шины. В конечном счете, приходим к выводу, что модель М. В. Келдыша остается в силе.

Ключевые слова: пневмоколесо, трение, модель, колебание.

Введение

Математическое моделирование сил и моментов, возникающих на участке контакта катящейся шины с опорной поверхностью, продолжает оставаться актуальной научно-технической проблемой. В настоящее время в связи с развитием представлений о сухом трении твердых тел и объяснении явления шимми в рамках поликомпонентного сухого трения [1, 2] в подходах к решению проблемы наметились новые тенденции.

В первой половине прошлого столетия проявилась необходимость изучения самовозбуждения угловых колебаний опор шасси пневмоколесных транспортных машин или явления *шимми*. М. В. Келдыш в [3, 1945 г.] предложил модель, описывающую поперечную силу трения F и восстанавливающий момент сил трения M на пневмоколесе и послужившую базой для объяснения шимми, а также разработки мер для борьбы с ним. Работа М. В. Келдыша вошла в историю изучения динамики пневмоколесных машин [4, 5] и многие годы являлась отправной точкой для исследований в области механики шин и явления шимми [6, 7].

В настоящей статье, развивая начатое в [8], результаты моделирования по М. В. Келдышу [3] сопоставлены с экспериментальными данными [9, 10], полученными гораздо позже 1945 года.

Изучение литературных данных; цель и задачи исследования

Рассмотрим движение буксируемого пневмоколеса (точка C – его центр масс), имеющего вынос назад L (рис. 1).

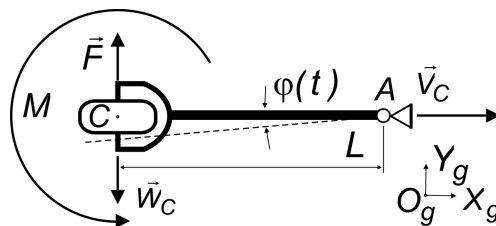


Рис. 1 – Буксируемое пневмоколесо

Оси $O_g X_g Y_g$ неподвижны и лежат в опорной плоскости. Считаем, что распределенные силы трения приводятся к силе F и моменту M вокруг оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через точку C . Пневмоколесо закреплено так, что его диск всегда строго перпендикулярен опорной плоскости. Тяга AC абсолютно жесткая.

Смещение точки C в поперечном направлении равно Y_C . Углы поворота тяги $\varphi = \varphi(t)$, где t – время в секундах, «малы». Скорость $\vec{V}_C = \vec{V}_A = \text{const}$ обуславливает переносную скорость точки C , а углы поворота – относительную, которую обозначим \vec{W}_C :

$$W_C = \dot{Y}_C = L\dot{\phi},$$

точка сверху указывает на дифференцирование по времени t . В итоге скорость точки C равна $\vec{V}_C + \vec{W}_C$.

«Малый» угол Δ между плоскостью диска пневмоколеса и вектором скорости точки C на виде сверху принято называть углом увода.

Математическую модель [3] запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} F &= k_F \xi, M = k_M \chi; \\ \dot{\xi} + L\dot{\phi} &= -V_C(\chi + \phi); \\ \dot{\chi} + \dot{\phi} &= V_C(\alpha\xi - \beta\chi), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ξ, χ – абсолютные линейная и угловая деформации шины;

α, β – кинематические коэффициенты;

k_F, k_M – статические боковая и крутильная жесткости шины.

Уравнения (1) позволяют при заданном законе «малых» поворотов $\phi(t)$ найти функции времени $F(t), M(t), \xi(t), \chi(t)$. Величины α, β и k_F, k_M являются механическими константами шины и требуют экспериментального определения.

Сформулируем цель и задачи исследования. Сопоставить результаты моделирования в виде функций $F(t), M(t)$, полученных с помощью системы (1), с экспериментальными данными [9, 10]. Выделить задачу гармонических колебаний (поперечно-поступательных, а также азимутально-вращательных) и скачка угла поворота пневмоколеса. При изучении колебательных режимов использовать [8, 9], при изучении скачка – эксперименты [10].

В [8] теоретически на основе уравнений (1) изучались сила F и момент M для буксируемого пневмоколеса (рис. 1), тяга которого совершает вынужденные колебания по закону:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \Omega t,$$

где ϕ_0, Ω – постоянные амплитуда и частота колебаний.

После получения общего решения были выделены предельные движения, а именно: (а) поперечно-поступательные колебания ($L \rightarrow \infty$) и (б) азимутально-вращательные ($L = 0$). Далее варианты (а) и (б) будем различать с помощью «говорящих» индексов nn и av , т.е. «поперечно-поступательные» и «азимутально-вращательные».

В [9] представлены экспериментальные результаты группы С. Кларка по замеру силы F и момента M на шести типах авиационных шин при гармонических поперечно-поступательных или азимутально-вращательных вынужденных колебаниях катящегося пневмоколеса, а также для их нахождения предложена математическая модель, основанная на струнной теории шины. Теоретические и экспериментальные данные сопоставлены.

В данной работе, как и в [8, 9], при рассмотрении режимов колебаний искомые функции $F(t), M(t)$ будем представлять в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} F_i(t) &= k_F a_i A_F^i(\bar{\Omega}) \sin[\Omega t + \beta_F^i(\bar{\Omega})]; \\ M_i(t) &= k_M D a_i A_M^i(\bar{\Omega}) \sin[\Omega t + \beta_M^i(\bar{\Omega})], \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где $i = nn, av$;

$a_{nn} = Y_0$ – амплитудное поперечное смещение точки C ; $a_{av} = D\phi_0$;

D – наружный диаметр необжатой шины;

A_F^i, A_M^i и β_F^i, β_M^i – безразмерные амплитуды и фазовые углы силы и момента;

$\bar{\Omega} = \Omega D / V_C$ – число С. Кларка.

Формулы [8] содержат три безразмерные константы шины, а именно $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ и κ , где:

$$\bar{\alpha} = \alpha D^2, \bar{\beta} = \beta D; \kappa = k_M / (k_F D^2).$$

Первые две константы найдем по формулам И. Бесселинка, приведенным в капитальном труде [5, с. 262]:

$$\begin{aligned}\alpha(H, \lambda) &= 2/(H\lambda); \\ \beta(H, \lambda) &= (H + 2\lambda)/(H\lambda),\end{aligned}\quad (3)$$

где H – длина пятна контакта;

λ – длина релаксации.

Величины H, λ , соответствующие шинам группы С. Кларка и условиям эксперимента, даны в [9]. Константу κ найдем по формуле струнной теории шины [9, 11]:

$$\kappa = \left(\frac{0,25H^2}{3\lambda + 0,5H} + \lambda \right) \cdot \frac{H}{2D^2}. \quad (4)$$

Задача №1: гармонические колебания пневмоколеса

В табл. 1 внесены данные по шинам группы С. Кларка: в столбцах 2, 3 – данные из [9]; в столбцах 4, 5, 6 – данные, полученные по формулам (3) и (4). На рис. 2 и 3 размещены теоретические и экспериментальные кривые для четырех шин группы С. Кларка. Каждый рисунок содержит фрагменты, где представлены графики функций $A_F^i(\bar{\Omega})$, $\beta_F^i(\bar{\Omega})$ и $A_M^i(\bar{\Omega})$, $\beta_M^i(\bar{\Omega})$. Точки соответствуют экспериментальным данным [9]; теоретические кривые, полученные по формулам [8], изображены штрихпунктирными линиями, помеченными кружками; участки сплошных линий являются результатами моделирования группы С. Кларка.

Таблица 1

**Шины группы С. Кларка:
данные для расчетов**

Шина	$\bar{H} = H/D$	$\bar{\lambda} = \lambda/D$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	κ
A20	0,404	0,523	9,47	6,86	0,110
A23	0,428	0,390	12,0	7,24	0,091
A24	0,428	0,304	15,4	7,96	0,074
B9	0,404	0,363	13,6	7,71	0,080
VecoCL	0,364	0,355	15,5	8,31	0,069
RHCA12	0,428	0,327	14,3	7,73	0,078

Задача №2: скачок угла поворота пневмоколеса

В дифференциальных уравнениях, входящих в систему (1), выполним замену переменной t на s , где s – путь точки A : $s = V_C t$. Будем иметь:

$$\begin{cases} \xi' + L\phi' = -(\chi + \phi), \\ \chi' + \phi' = \alpha\xi - \beta\chi, \end{cases} \quad (5)$$

где штрих указывает на дифференцирование по s .

Рассмотрим случай, когда угол ϕ изменяется скачкообразно:

$$\{s = 0 : \phi = 0; s > 0 : \phi = \text{const} = \phi_*\}. \quad (6)$$

Тогда вместо (5) получим:

$$\begin{cases} \xi' = -(\chi + \phi), \\ \chi' = \alpha\xi - \beta\chi. \end{cases} \quad (7)$$

На рис. 4 приведены экспериментальные и теоретические кривые $|F(s)|, |M(s)|$ для изучаемого случая (6). Экспериментальные линии заимствованы из [10] и соответствуют тракторной шине P245/75R16. В [10] на рисунках кроме экспериментальных кривых показаны результаты вычислений К.

Guo, L. Ren. Поэтому экспериментальные кривые нами точечным образом выделены. Теоретические кривые (рис. 4) получены с помощью численного интегрирования уравнений (7) методом Рунге-Кутты для шины М. В. Келдыша [3] (табл. 2).

Таблица 2

**Шина М.В. Келдыша:
данные для расчетов и анализа результатов**

Шина	αD^2	βD	\bar{H}	$\bar{\lambda}$	κ	k_F	k_M
400 × 150	19,2	12	0,2	0,525	0,052	88,2 кН/м	735 Нм/р

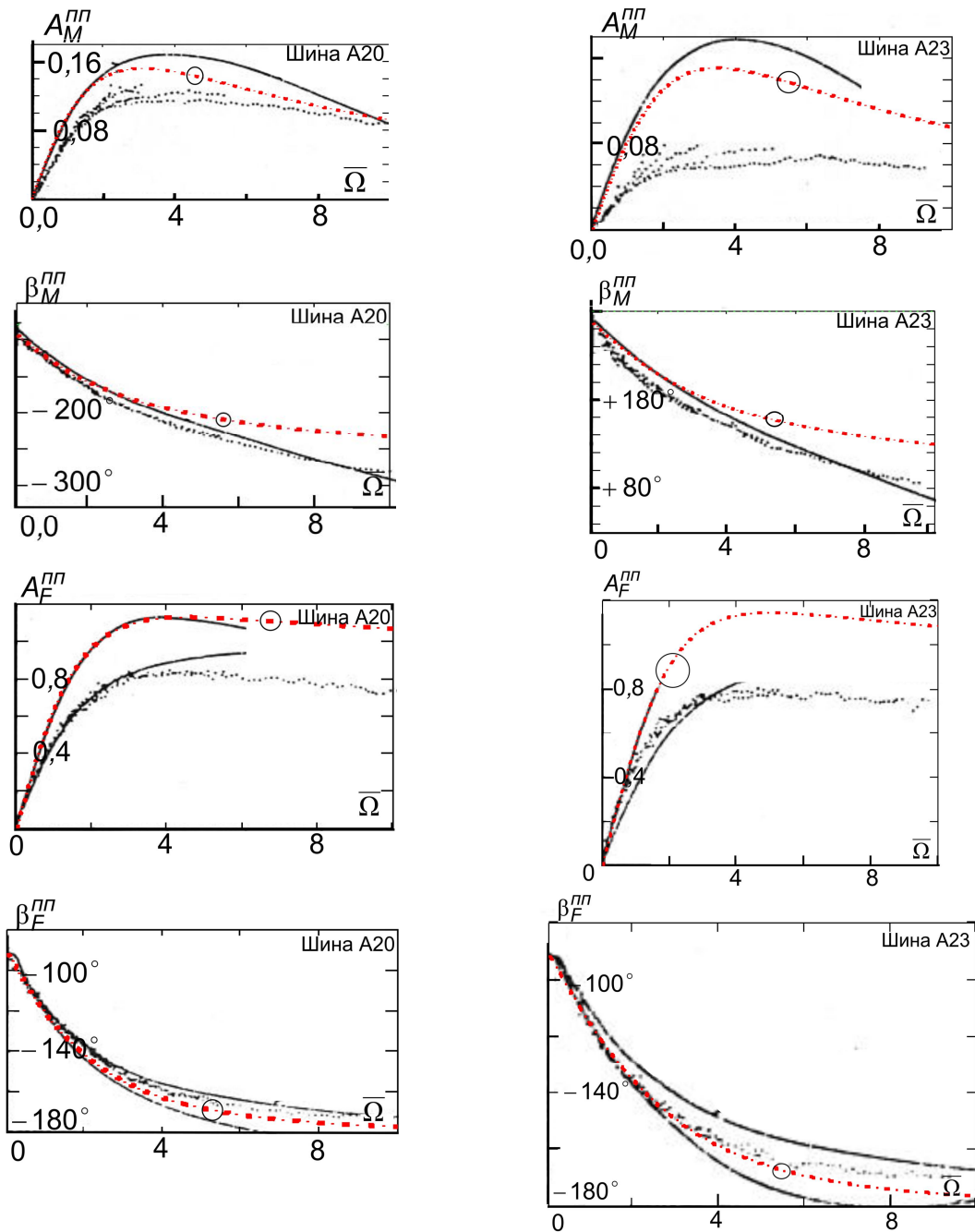


Рис. 2 – Поперечно-поступательные колебания пневмоколеса

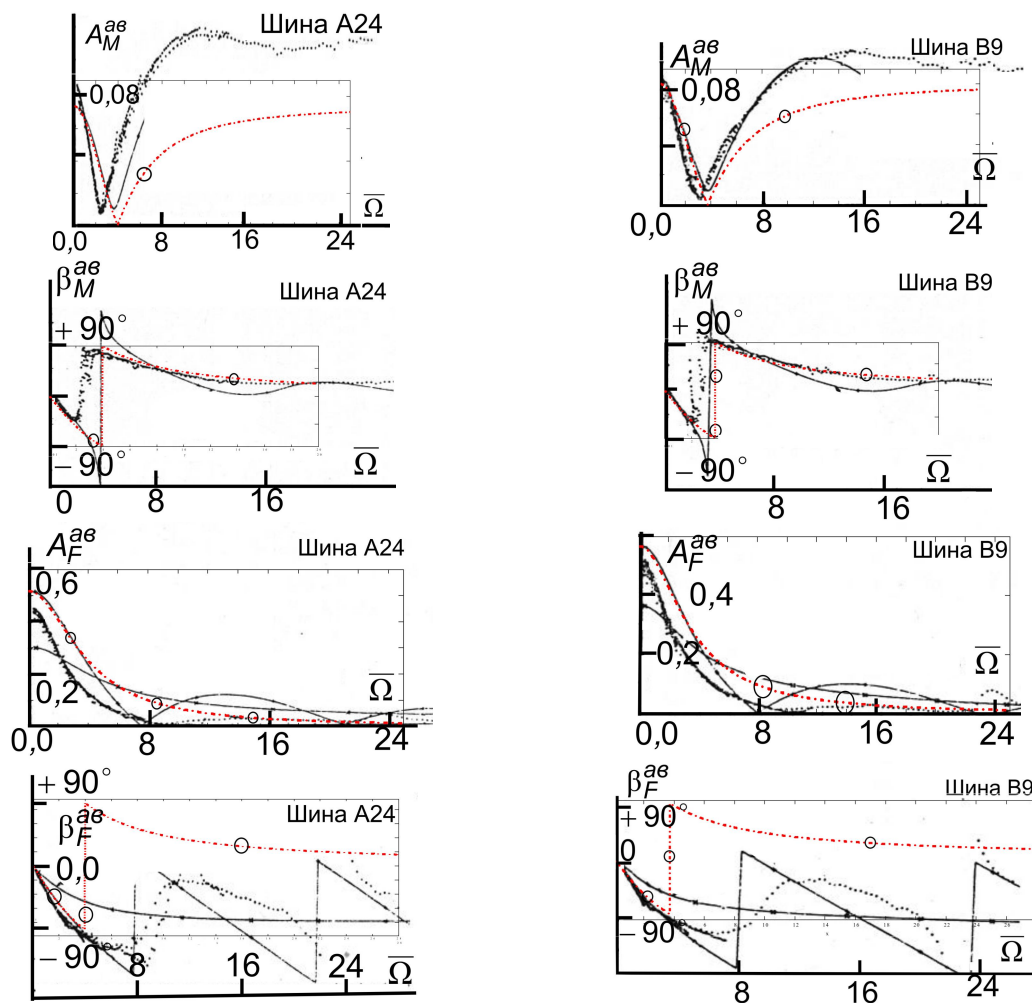


Рис. 3 – Азимутально-вращательные колебания пневмоколеса

$$|F(s)| = |k_F \xi(s)|, |M(s)| = |k_M \chi(s)|.$$

Задавались такие начальные условия: $\xi(s=0) = 0; \chi(s=0) = -\varphi_*$, где $\varphi_* = 2,7^\circ$ (верхние кривые) и $\varphi_* = 0,7^\circ$.

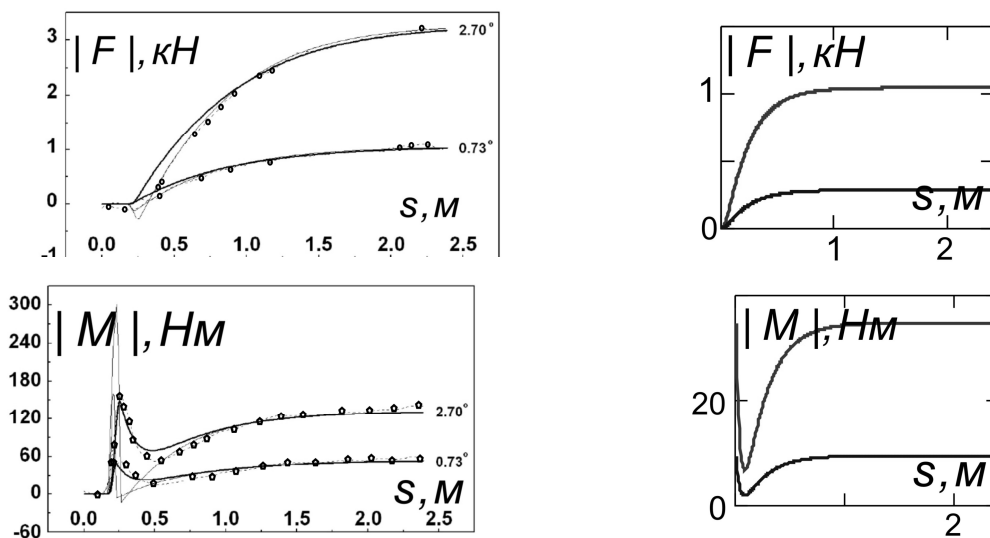


Рис. 4 – Скачок угла поворота пневмоколеса

Обсуждение результатов работы и выводы

В настоящей работе на основе экспериментальных данных верифицирована модель М. В. Келдыша для нахождения поперечной силы трения и азимутального момента сил трения на катящемся податливым пневмокоlesе. Подобная задача была также предметом работы [8]. Однако теперь, используя результаты [8], верификация выполнена более полно и аргументировано.

Теоретически получены и сопоставлены с экспериментальными 20 графиков, которые описывают упомянутые силу и момент при колебаниях пневмокоlesa, а также его мгновенном повороте. Следует признать, что во всех рассмотренных случаях наблюдается качественное согласие данных, а в подавляющем большинстве случаев имеет место и их хорошее количественное соответствие.

Сравнивая расчетные данные табл. 1 и графики рис. 2 и 3 при $\bar{\Omega} \rightarrow 0$, можно прийти к выводу, что формулы (3) и (4) состоятельны и значительного улучшения согласия теоретико-экспериментальных кривых при нахождении констант шины путем их идентификации по результатам опытов не приходится ожидать.

В целом приходим к выводу, что модель [3] остается в силе и не уступает большинству других известных моделей [12]. Подчеркнем, она справедлива лишь при «малых» углах увода, когда скольжением шины можно пренебречь.

Литература

1. Андронов, В.В. Сухое трение в задачах механики / В.В. Андронов, В.Ф. Журавлев / М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 184 с.
2. Журавлев, В.Ф. Новая модель шимми [Текст] / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов, П.К. Плотников // Известия РАН, МТТ. – 2013. – №5. – С. 13 - 23.
3. Келдыш, М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси [Текст] / М.В. Келдыш // Труды ЦАГИ, 1945. – №564. – 37 с.
4. Неймарк, Ю.И. Динамика неавтономных систем [Текст] / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
5. Pacejka, H.V. Tyre and vehicle dynamics [Текст] / H. V. Pacejka. – Butterworth-Heinemann, 2006. – 642 p.
6. Вибрации в технике: Справочник в 6 - ти т. [Текст] / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979. – т. 2. – 351 с.
7. Бидерман, В.Л. Нестационарное качение пневматической шины [Текст] / В.Л. Бидерман, В.В. Шумаев // Известия Вузов, Машиностроение. – 1977. – №12. – С. 85 - 90.
8. Шифрин, Б.М. О модели шины М.В. Келдыша [Текст] / Б.М. Шифрин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №5/6(41). – С.34 - 37.
9. Clark, S. Dynamic properties of aircraft tires [Текст] / S. Clark, R. Dodge, G. Nybakken // J. aircraft. – 1974. – Vol. 11, №3. – P. 166 - 172.
10. Guo, K. A non-steady and non-linear tire model under large lateral slip condition [Текст] / K. Guo, L. Ren // SAE Techn. Pap. Ser., 2000-01-0358. – 10 p.
11. Шифрин, Б.М. Фрикційні коливання механічних систем із пневмокоlesом і засоби їх запобігання [Текст] / Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин. Національний університет України «Львівська політехніка», Львів. – 2013. – 347 с.
12. Шифрин, Б.М. Сопоставление моделей трения на шине при ее колебаниях [Текст] / Б.М. Шифрин // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин: загальнодерж. міжвідомчий наук.-техн. зб. / М-во освіти і науки України, Кіровоградський нац. техн.ун-т. –К., 2010. – Вип. 40, частина II – С. 139 - 150.

Поступила в редакцію 04.03.2015

Shifrin B.M., Izvalov A.V. **Experimental verification of M. V. Keldysh model of interaction of air wheel with supporting plane.**

Due development of concepts of dry friction of solids the interest to study shimmy and other problems of a tyre and vehicle dynamics was renewed. In this article the theoretical results of M. V. Keldysh model (1945) of the interaction of elastic air wheel with supporting plane are correlated with experimental results (20 graphic charts were built) which were performed much later than 1945. Three air wheel rating modes were studied: cross-translational and azimuthal rotational harmonic oscillations near zero slip angle and jump of slip angle. Experiments with air wheel oscillations were executed by Clark, Dodge, Nybakken in 1974, but with jump by Guo, Ren in 2000. To find the constants of M. V. Keldysh tyres, I. Besselink equation and string theory of a tyre were used. Ultimately, we conclude that the M. V. Keldysh model remains actual.

Key words: air wheel, friction, model, oscillation.

References

1. Andronov V.V., Zhuravlev V.F. *Suhoe trenie v zadachah mehaniki*. M.; Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», Institut kompyuternykh issledovaniy, 2010. 184 s.
2. Zhuravlev V.F. Klimov D.M., Plotnikov P.K. *Novaya model shimmi*. Izvestiya RAN, MTT. 2013. #5. S. 13-23.
3. Keldysh M.V. *Shimmi perednego koleasa trehkolesnogo shassi*. Trudy TsAGI, 1945. #564. 37 s.
4. Neymark Yu.I., Fufaev N.A. *Dinamika negolonomnykh sistem*. M.: Nauka, 1967. 520 s.
5. Pacejka H.B. *Tyre and vehicle dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2006. 642 p.
6. *Vibratsii v tehnikе: Spravochnik v 6 - ti t. Red. sovet: V.N. Chelomey (pred.)*. M.: Ma-shinostroenie, 1979. t. 2. 351 s.
7. Biderman V.L., Shumaev V.V. *Nestatsionarnoe kachenie pnevmaticheskoy shinyi*. Izvestiya Vuzov Mashinostroenie. 1977. #12. S. 85-90.
8. Shifrin B.M. *O modeli shinyi M.V. Keldysha*. Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tehnologiy. 2009. #5/6(41). S.34 - 37.
9. Clark S., Dodge R., Nybakken G. *Dynamic properties of aircraft tires*. J. aircraft. 1974. Vol. 11, №3. P. 166 - 172.
10. Guo K., Ren L. *A non-steady and non-linear tire model under large lateral slip condition*. SAE Techn. Pap. Ser., 2000-01-0358. 10 p.
11. Shifrin B.M. *Friktsiyni kolivannya mehanichnih sistem Iz pnevmokolesom I zasobi Yih zapobigannya*. Disertatsiya na zdobuttya naukovogo stupenya doktora tehniknih nauk za spetsialnistyu 05.02.09 – dinamika ta mitsnisti mashin. Natsionalniy univrsitet UkraYini «Lvivska politehnika», Lviv. 2013. 347 s.
12. Shifrin B.M. *Sopostavlenie modeley treniya na shine pri ee kolebaniyah*. Konstruyuvannya, virobnitstvo ta ekspluatatsiya silskogospodarskikh mashin: zagalnodерж. mlzh-vldomchiy nauk.-tehn. zb. M-vo osvlti I nauki UkraYini, Kirovogradskiy nats. tehn.un-t. K., 2010. Vip. 40, chastina II S.139 - 150.