

**Мисліборський В.В.,  
Костогриз С.Г.**

Хмельницький національний університет,  
м. Хмельницький, Україна  
E-mail: mvovka13@gmail.com

## ПОВЗУЧІСТЬ У НОМІНАЛЬНО НЕРУХОМОМУ ФРИКЦІЙНОМУ КОНТАКТІ ПРИ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

УДК 621.891:620.194

В роботі на основі реологічної моделі вперше досліджений стан повзучості у номінально-нерухомому фрикційному контакті та одержана аналітична залежність, що описує повзучість (просту післядію) у ННФК.

**Ключові слова:** повзучість, реологічна модель, номінально нерухомий фрикційний контакт (ННФК), пружно - пластичний контакт, в'язко-пружний контакт, тангенціальна жорсткість ННФК, параметр пластичності контакту, відносна деформація зсуву, в'язкість.

### Вступ

Так зване «третє тіло», утворене фрикційним контактом подібно твердому тілу, має не тільки пружно-пластичні, але і в'язкі та в'язкопружні властивості. Утворене ним середовище, як і метал, чи інший конструкційний матеріал, здатний чинити в'язкий опір зсуву.

### Мета і постановка задачі

Метою даної роботи є виявлення та дослідження основних факторів, які в найбільшій мірі визначають стан повзучості (прості післядії) у ННФК: а саме такі, як в'язкість матеріалу контактних пар, модуль Юнга другого роду, коефіцієнт запасу зчеплення в контакті, початкова тангенціальна жорсткість контакту та наявність в ньому проміжного шару з розрихлених продуктів фретинг-зношування.

### Виклад матеріалів досліджень

Повзучість у нерухомих з'єднаннях деталей машин – явище, при якому відбувається зростання відносних переміщень елементів контакту зі збільшенням часу при постійному напруженні зсуву, це явище так званої післядії.

Формула (2.61) залежності дотичного напруження в контакті від відносної деформації елементів контакту одержана Костогризом С.Г. [1] для реологічної моделі ННФК, що відображає його пружно-пластичні властивості (рис. 1).

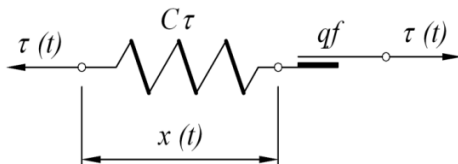


Рис. 1 – Реологічна модель ННФК з пружно-пластичними властивостями (модель Прандтля):  $x(t)$  – взаємне переміщення елементів контакту при їх зсуві

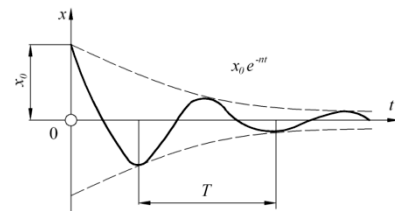


Рис. 2 – Приклад осцилограми вільних затухаючих коливань у ННФК

Разом з тим, осцилограми вільних затухаючих коливань у ННФК показують, що затухання коливань відбуваються за близьким до експоненціального закону (рис. 2), що засвідчує наявність опору в коливальній системі. Для того, щоб врахувати в'язкі властивості контакту в його реологічній моделі, зображеній на рис. 1, потрібно ввести елемент Ньютона з паралельним під'єднанням його до моделі Прандтля, як це зображено на рис. 3.

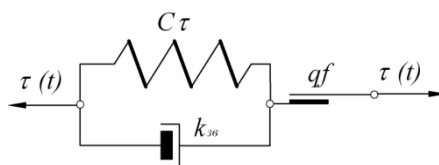


Рис. 3 – Реологічна модель ННФК, що враховує його пружно-пластичні та в'язко-пружні властивості

Для реологічної моделі контакту (рис. 3) рівняння напруженого стану при зсуві елементів контакту з врахуванням формули (9) [2] буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \tau = qf \left[ \varepsilon - \frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}} \varepsilon^{\frac{n+1}{n}} \right] + k_{зв} \dot{\varepsilon}, & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \\ \tau = qf, & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_{\max} \end{cases} \quad (1)$$

Враховуючи, що  $x = \Delta_{np} \varepsilon$  та  $\Delta_{np} = qf/c_{\tau_0}$ , а також ввівши позначення  $B = n / (n+1)^{\frac{n+1}{n}}$ , зведемо перше рівняння системи (1) до вигляду:

$$\tau = qf \left[ \varepsilon - B \varepsilon^{\frac{n+1}{n}} \right] + k_{зв} \dot{\varepsilon}. \quad (2)$$

З метою того, щоб позбутися нелінійності у диференційному рівнянні (2), прийемо припущення, що:

$$\varepsilon^{\frac{n+1}{n}} \approx \varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon, \quad (3)$$

де  $\varepsilon_0$  – початкове значення відносного переміщення, для якого розраховується  $\tau$ .

Розглянемо, за яких умов таке припущення можна вважати прийнятним. Для цього встановимо аналітичне співвідношення для оцінки відносної похибки, яку дає припущення (3). Його можна записати наступним чином:

$$Z = \frac{\varepsilon^{\frac{n+1}{n}} - \varepsilon \varepsilon_0^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon^{\frac{n+1}{n}}}. \quad (4)$$

Нехай  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ , тоді вираз для відносної похибки лінеаризації рівняння (4) прийме вигляд:

$$Z = \frac{(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)^{\frac{1}{n}} - \varepsilon_0^{\frac{1}{n}}}{(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}. \quad (5)$$

Зведемо вираз  $(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$  до вигляду  $\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \left( 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n}}$ .

З врахуванням цього запишемо формулу (1.5) таким чином, що:

$$Z = \frac{\left( 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left( 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n}}}. \quad (6)$$

Подамо  $(1 + \Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^{\frac{1}{n}}$  біноміальним рядом [3], обмежившись трьома членами ряду і ввівши при цьому позначення  $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0 = \alpha$ :

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\alpha}{n} - \frac{n-1}{2n^2} \alpha^2. \quad (7)$$

Підставивши цей вираз у (6) одержимо наближену формулу для розрахунку відносної похибки лінеаризації диференційного рівняння (2):

$$Z \approx \frac{2 \cdot \alpha \cdot n - (n-1) \cdot \alpha^2}{2 \cdot n^2 + 2 \cdot \alpha \cdot n - (n-1) \cdot \alpha^2}. \quad (8)$$

За формулою (8) розраховані і побудовані графіки залежності відносної похибки лінеаризації диференційного рівняння (2) на основі припущення (3) від параметра пластичності  $n$  та коефіцієнта  $\alpha$ .

Як видно з рис. 4 відносна похибка, що обумовлена введенням в рівняння (2) припущення, яке виражається співвідношенням (3), не буде перевищувати 15 %, якщо  $n \geq 2$ , а  $\alpha \leq 0,5$ . Як правило, для контактних пар з металів і сплавів  $n \geq 2$ , а  $\alpha$  можна обмежувати, щоб воно не перевищувало 0,5. Тому за таких умов можна вважати прийняття припущення (3) таким, що дає задовільні результати по точності лінеаризації рівняння (2).

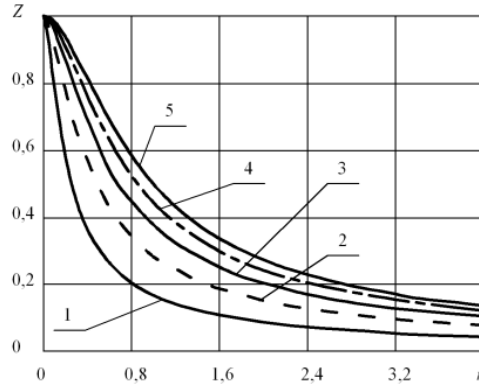


Рис. 4 – Залежності відносної похибки лінеаризації диференційного рівняння (1.2) від параметра пластичності  $n$  та коефіцієнта  $\alpha$ :  
 1 –  $\alpha = 0,2$ ; 2 –  $\alpha = 0,4$ ; 3 –  $\alpha = 0,6$ ;  
 4 –  $\alpha = 0,8$ ; 5 –  $\alpha = 1,0$

Внаслідок такого припущення нелінійне диференційне рівняння (2) перетворимо у лінійне диференційне рівняння:

$$\tau = qf \varepsilon \left( 1 - B\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right) + k_{зв} \dot{\varepsilon}. \quad (9)$$

Інтегруючи рівняння (9) одержимо:

$$\varepsilon = \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{k_{зв}} \int_0^t \tau e^{-\frac{t}{T_p}} dt \right) e^{-\frac{t}{T_p}}. \quad (10)$$

У цьому виразі постійна часу:

$$T_p = \frac{k_{зв}}{\left( 1 - B\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right) qf}, \quad (11)$$

де  $\varepsilon_0$  – початкова відносна деформація в контакті при  $t = 1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Аналіз виразу (11) показує, що коли впродовж всього часу  $t$  напруження в контакті постійне  $\tau = \text{const} = \tau_0$ , то деформація буде весь час зростати, асимптотично наближаючись до значення

$\tau_0 / \left( qf \left( 1 - B\varepsilon^{\frac{1}{n}} \right) \right)$  за законом:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\tau_0}{qf \left( 1 - B\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right)} \left[ 1 - \exp \left( \frac{- \left( 1 - B\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right) qf}{k_{зв}} \cdot t \right) \right]. \quad (12)$$

Враховуючи, що  $\tau_0 / qf$  є коефіцієнтом запасу зчеплення в контакті  $K_{зп}$ , розкривши вираз для  $B$  у формулі (12), одержимо залежність, що описує повзучість у номінально нерухомому фрикційному контакті:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{K_{zn} \left( (n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right)} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{qf}{k_{ze}} \cdot \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n\varepsilon_0^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}} \cdot t \right) \right]. \quad (13)$$

Якщо звернутись до виразу (2.41) [2], який показує, що параметр пластичності  $n$  є функцією коефіцієнта запасу зчеплення, то при відповідній підстановці замість  $n$  у вираз (13) його залежності від  $K_{zn}$  будемо мати залежність повзучості від коефіцієнта запасу зчеплення. Через громіздкість такого виразу його недоцільно подавати окремою формулою, але це потрібно врахувати при обчисленні повзучості за формулою (13) залежно від коефіцієнта запасу зчеплення.

Цікавим для розгляду повзучості у ННФК є граничний випадок, коли  $K_{zn} = (e+1)/2 = 1,858$ , а параметр пластичності  $n = 0$ . При цьому залежність (1.13) набуває спрощеного вигляду:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{2}{e+1} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{qf}{k_{ze}} \cdot t \right) \right]. \quad (14)$$

При  $n = 0$  контакт поводить себе при зсуві як тверде тіло [2]. У цьому ще більше можна переконатись, коли у залежність (14) підставити вираз (3.11) [2]  $k_{ze}$ . У результаті отримаємо:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{2}{e+1} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{G}{\eta} \cdot t \right) \right]. \quad (15)$$

У залежності (15) вже відсутня питома сила тертя  $qf$ , натомість присутній модуль пружності другого роду та коефіцієнт в'язкості твердого тіла (матеріал контактних елементів  $\eta$ ). Вираз у квадратних дужках тут такий, якби він мав відношення не до фрикційного контакту, а до твердого тіла з характеристиками пружності та в'язкості  $G$  та  $\eta$ .

Таким чином, у випадку пружного фрикційного контакту його постійна часу буде визначатись такою ж залежністю, як і для твердого тіла при чистому зсуві. Наприклад, у випадку сталевих елементів контакту  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\eta = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2 = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{с/мм}^2$ , а  $T = \eta/G = 1,75 \cdot 10^5 \text{ с}$ .

На рис. 5 зображена, розрахована за формулою (15), крива повзучості пружного ННФК із сталевими елементами при  $\varepsilon_0 = 0$ .

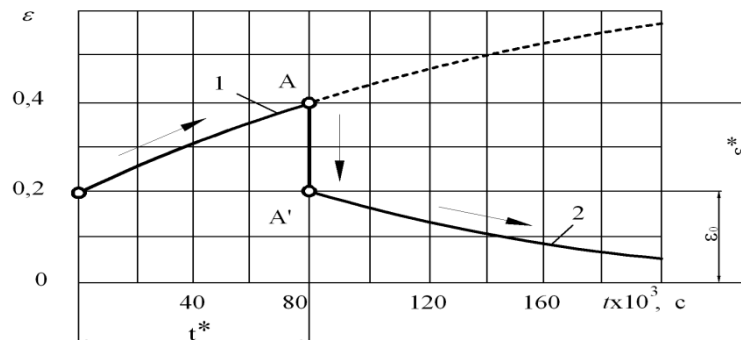


Рис. 5 – Повзучість у пружному ННФК зі сталевими елементами:  
1 – крива пружної післядії;  
2 – крива зворотної пружної післядії

Відносна деформація із збільшенням часу  $t$  зростає, асимптотично наближаючись при  $t = \infty$  до значення  $2/(e+1) = 0,538$ . Якщо, наприклад, досягнутий рівень відносної деформації у процесі повзучості  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , що відповідає  $t = t^*$  (точка  $A$ ) і в цей час напруження зсуву зняти, то за законом зворотної післядії [3] деформація зсуву повністю зникне при  $t = \infty$ .

На ділянці розвантаження, тобто при  $t^* < t < \infty$  (рис. 5) процес деформації буде відбуватись таким чином, що:

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{e+1} \left[ 1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} - 2 \cdot e^{-\frac{G}{\eta}t^*} \right] + AA_1 - \varepsilon_0. \quad (16)$$

Із зростанням часу відносна деформація зсуву буде зменшуватись наближаючись при  $t = \infty$  до  $\varepsilon = 0$ .

У другому випадку контактування, при наявності проміжного розрихленого шару в контакті та його пружно-пластичних властивостях для розрахунку повзучості в контакті використовуємо залежність (13), яку зведемо до вигляду:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{D(n)}{K_{zn}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{G + c_{\tau_0} b}{\eta D(n)} \cdot t\right) \right], \quad (17)$$

де

$$D(n) = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{\left( (n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right)}. \quad (18)$$

На рис. 6 зображені, розраховані за формулою (17), графіки повзучості (простой післядії) у пружно-пластичному ННФК зі сталевими контактними елементами.

Цікаво звернути увагу на верхню границю, до якої буде асимптотично наближатися в стані повзучості відносно переміщення в контакті при зростанні часу до  $\infty$ . Для цього у формулу (17) підставимо  $t = 0$  і одержимо вираз:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 + \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{K_{zn} \left( (n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n\varepsilon_0^{\frac{1}{n}} \right)}. \quad (19)$$

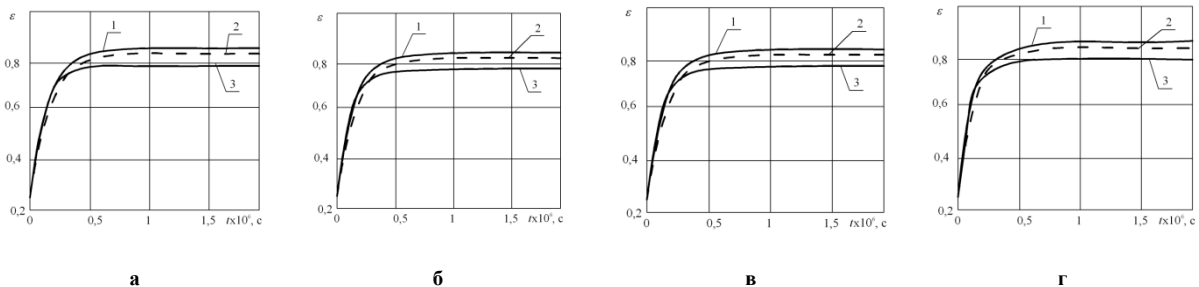


Рис. 6 – Криві повзучості (простой післядії) у пружно-пластичному ННФК, утвореному сталевими елементами при різних значеннях коефіцієнта запасу зчеплення в контакті:

1 –  $K_{zn} = 1,3$ ; 2 –  $K_{zn} = 1,5$ ; 3 –  $K_{zn} = 1,7$ .

Розрахунки здійснені при  $\eta = 1,4 \cdot 10^{10}$  Н/мм<sup>2</sup>;  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа;  $\varepsilon_0 = 0,25$ ;  $c_{\tau} = 300$  Мпа/мкм.

а –  $\sigma = 10$  мкм; б –  $\sigma = 20$  мкм;

в –  $\sigma = 40$  мкм; г –  $\sigma = 80$  мкм

Прийнявши до уваги те, що параметр пластичності  $n$  за формулою (2.41) [2] виключно залежить від коефіцієнта запасу зчеплення  $K_{zn}$ , приходимо до висновку, що при заданому рівні  $\varepsilon_0$  максимальне значення відносного переміщення  $\varepsilon_{\max}$  також залежить від  $K_{zn}$ , що відображено у виразі (20).

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 + \frac{\left\{ \frac{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)] + \ln^2(2K_{zn} - 1)}{\ln^2(2K_{zn} - 1)} \right\}^{\left(1 + \frac{\ln^2(2K_{zn} - 1)}{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)]}\right)}}{K_{zn} \left\{ \left\{ \frac{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)] + \ln^2(2K_{zn} - 1)}{\ln^2(2K_{zn} - 1)} \right\}^{\left(1 + \frac{\ln^2(2K_{zn} - 1)}{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)]}\right)} - \frac{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)]}{\ln^2(2K_{zn} - 1)} \varepsilon_0^{\frac{\ln^2(2K_{zn} - 1)}{2[1 - \ln(2K_{zn} - 1)]}} \right\}}. \quad (20)$$

За цим виразом розраховані графіки максимального відхилення при повзучості в контакті залежно від коефіцієнта запасу зчеплення при різних початкових рівнях відносного переміщення  $\varepsilon_0$ .

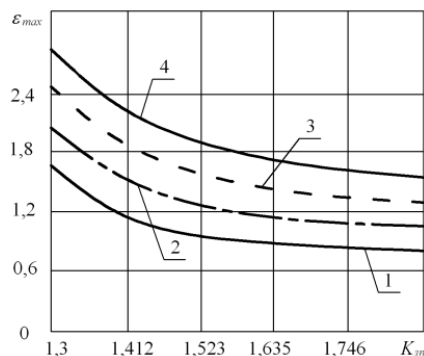


Рис. 7 – Залежність граничного значення відносного переміщення в контакті  $\varepsilon_{max}$  від запасу зчеплення в контакті при:  
 1 –  $\varepsilon_0 = 0,25$ ; 2 –  $\varepsilon_0 = 0,5$ ;  
 3 –  $\varepsilon_0 = 0,75$ ; 4 –  $\varepsilon_0 = 1,0$

Як видно із рис. 7, зростання  $K_{зн}$  призводить до суттєвого зменшення  $\varepsilon_{max}$ . При досягненні коефіцієнтом запасу зчеплення максимального граничного рівня  $K_{зн} = 1,858$  відносно переміщення в контакті в стані повзучості буде мати мінімальне значення:

$$\varepsilon_{min} = \varepsilon_0 + \frac{1}{K_{зн}} = \varepsilon_0 + 0,538. \quad (21)$$

## Висновки

1. На основі реологічної моделі вперше досліджений стан повзучості у номінально-нерухомому фрикційному контакті.

2. Одержана аналітична залежність, що описує повзучість (просту післядію) у ННФК. Показано, що стан повзучості та її розвиток при заданому початковому рівні відносної деформації зсуву та визначеному часі релаксації виключно залежить від коефіцієнту запасу зчеплення в контакті, а його збільшення призводить до зростання максимального значення відносної деформації зсуву при  $t = \infty$ .

3. Виявлена залежність граничного значення відносної деформації зсуву в контакті від коефіцієнта запасу зчеплення в контакті у стані повзучості в інтервалі  $1,0 < K_{зн} < 1,858$  та встановлені ці значення.

4. Встановлено, що для пружного контакту максимальне значення приросту відносної деформації зсуву в стані повзучості складає  $2/(e+1) = 0,538$ .

5. Показано, що час релаксації для стану повзучості визначається відношенням зведеного коефіцієнта в'язкого опору в контакті до номінальної сили тертя, що для пружного контакту перетворюється у відношення в'язкості матеріалу контактних пар до його модуля Юнга другого роду.

6. Виявлено, що основними факторами, які в найбільшій мірі визначають стан повзучості (простої післядії) у ННФК є в'язкість матеріалу контактних пар, модуль Юнга другого роду, коефіцієнт запасу зчеплення в контакті, початкова тангенціальна жорсткість контакту та наявність в ньому проміжного шару з розрихлених продуктів фретинг-зношування. Спрямований вплив на них дозволить у бажаному напрямку змінювати процес повзучості.

## Література

1. Костогрыз С. Г. Механика вибрационного трения в номинально неподвижном фрикционном контакте : дис... д-ра техн. наук : 05.02.04 “Трение и износ” / Костогрыз Сергей Григорьевич. – Хмельницкий, 1995. – 367 с.
2. Мисліборський В. В. Формування пружно-пластичних та в'язко-пружних властивостей номінально нерухомого фрикційного контакту : дис.. канд. техн. наук / В. В. Мисліборський. – Хмельницький, 2012
3. Рейнер М. Реология / М. Рейнер ; под ред. Э. И. Григолюка ; пер. с англ. – М. : Наука, 1965. – 224 с.

Поступила в редакцію 10.03.2015

Misliborski V.V., Kostogris S.G. **Creep in the nominal stationary friction contact at the shear strain.**

The paper represents the originally researched condition of creep in the nominal stationary friction contact and obtained analytical dependence describing creep (simple after effect) in NSFC on the basis of rheological model.

**Keywords:** creep, rheological model, nominal stationary friction contact (NSFC), elasto-plastic contact, visco-elastic contact, tangential hardness of NSFC, contact plasticity parameter, contact plasticity factor, contact relative shear strain, viscosity.

### References

1. Kostohruz SG Mechanics vybratsyonnoho trenyya in nominal standing fryktsyonnom Contact Details: Dis ... Dr. Sc. Sciences: 05.02.04 "Trenye and yznos". Kostohruz Sergey Hryhorevych. Khmel'nitsky, 1995. 367 p.
2. Mysliborskiy V. Formation of elastic-plastic and visco-elastic properties of nominally fixed frictional contact: dis .. candidate. Sc. Science. Khmel'nitsky, 2012
3. Rainer M. Rheology. M. Rayner; ed. E. I. Hryholyuka; Per. with the English. Moscow. Nauka, 1965. 224 p.