

**Сорокати́й Р.В.,\***  
**Писаре́нко В.Г.,\*\***  
**Диха О.В.,\***  
**Бабак О.П.\***

\*Хмельницький національний університет,  
м. Хмельницький, Україна,

\*\*КНВО "Форт" МВС України,  
м. Вінниця, Україна

**E-mail:** tribosenator@gmail.com

## МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ТРИБОПОШКОДЖЕНЬ У ЦИЛІНДРИЧНИХ ТРИБОСИСТЕМАХ КОВЗАННЯ

УДК 621.891

Для побудови траєкторій інтенсивних трибопошкоджень по точкам ліній рівня функції трибопошкодженості запропоновано використовувати кубічну сплайн - апроксимацію. Шляхом оцінки похибки сплайн - апроксимації, визначено мінімально необхідну кількість ізоліній функцій пошкодженості для досягнення визначеної точності за мінімального обсягу обчислювальної роботи.

**Ключові слова:** трибосистема, пошкоджуємість, інтерполяція, сплайн-апроксимація.

### Вступ та постановка проблеми досліджень

Враховуючи особливості процесів зношування, матеріали і умови функціонування трибоспрямижень, в більшості випадків можна вважати, що миттєве поле напружень впливає на траєкторію розвитку тріщини менше, ніж властивості пошкодженого матеріалу, а характерний час розвитку тріщини менше характерного часу накопичення пошкоджуваності.

Побудувавши лінії рівнів функції накопичення пошкоджень, за допомогою імовірнісної моделі, [1] можна визначити найбільш імовірні напрями траєкторій руху поширення тріщин, та оцінити тип руйнування і характер процесу зношування.

При моделюванні процесів зношування найбільш важливим і складним завданням є дослідження причин, механізмів і кінетики формування поверхневого шару під час тертя. Вирішення цього завдання дозволить керувати процесами, що відбуваються на контакті, а разом з ними фрикційними характеристиками і зносостійкістю, відкриє нові можливості в розробці технологій, що дозволять формувати поверхневі шари з необхідними характеристиками.

Варто враховувати, що зношування це специфічний вид руйнування, за якого з макроскопічної точки зору формозміну поверхонь за рахунок руйнування можна вважати безперервним і не можна розглядати як одноразовий катастрофічний процес.

Для розробки нових технологій обробки поверхонь і методів моніторингу роботи вузлів тертя машин необхідно є побудова моделей, що описують багаторазове руйнування, що дозволяють проаналізувати зміни мікрорельєфу під час зносу. Труднощі побудови моделей такого типу пов'язані з необхідністю розгляду контактних задач для тіл складної форми, моделювання елементарних актів руйнування й відділення частинок.

Враховуючи необхідність цієї проблеми для трибології, в окремих роботах [1 - 8] відображено можливість побудови таких моделей показана стосовно до процесів втомного руйнування внаслідок зношування.

У [9] розглядалось накопичення пошкоджень в шарі за трибоконтактної взаємодії. Авторами [9] прийнято, що при досягненні пошкодженості деякого критичного значення відбувається руйнування і відокремлення шару матеріалу, якщо критичні значення знаходяться на певній глибині, і відокремленню матеріалу з поверхні, якщо критичні значення пошкодженості досягнуті на поверхні. У роботі [9] проаналізовано вплив зовнішнього навантаження і закону накопичення пошкодженості на перебіг процесу, а також співвідношення процесів поверхневого руйнування і відшаровування, за якого можливе виникнення стаціонарного режиму зношування.

Більш загальна модель процесу побудована у роботі [10]. Розглянутий механізм накопичення пошкодженості оснований на використанні термокінетичної теорії руйнування твердих тіл.

Враховуючи, що миттєве поле напружень має менший вплив на траєкторію розвитку тріщини, ніж властивості пошкодженого матеріалу, а характерний час розвитку тріщин значно менший характерного часу накопичення пошкодженості, бралось, що тріщини розповсюджуються миттєво, а напрямок їх розвитку в кожній точці визначається напрямком мінімального зменшення накопиченої пошкодженості.

Параметрами, якими визначається хід процесу в цій моделі, є механічні і теплофізичні характеристики контактуючих тіл, умови навантаження, коефіцієнт тертя і вихідна макро- і мікроформа контактуючих тіл.

Однак, побудувати модель зношування пари тертя реального вузла, що адекватно описує процес накопичення пошкоджень, тип і характер можливих триборуйнувань, базуючись на розгляді взаємодії окремо взятих мікронерівностей, на цьому етапі розвитку трибології є досить проблематичним.

Для практичного керування процесами, що відбуваються при трибоконтактній взаємодії, важливо знати не стільки траєкторію розвитку окремої мікротріщини, скільки найбільш імовірні траєкторії, в межах яких буде відбуватись процес розвитку і формування мікротріщин в поверхневому шарі, що дозволить оцінити тип і характер можливих триборуйнувань.

Для побудови адекватних моделей і вирішення спряжених завдань з визначення характеристик полів напружень і температур в реальних вузлах тертя необхідно звернутися до методів комп'ютерного моделювання. У свою чергу специфіка комп'ютерного аналізу потребує чіткої математичної формалізації моделей та алгоритмів.

Досліджуючи кінетику формування поверхневого шару для визначення типу і характеру триборуйнувань методами комп'ютерного аналізу, необхідно формалізувати завдання побудови ліній, що визначають напрямком найбільш інтенсивного накопичення трибопошкоджень по точкам ліній рівня функції трибопошкоженості.

Враховуючи енергетичну умову А. Гриффітса для побудови траєкторій, що визначають напрямком найбільш інтенсивного накопичення трибопошкоджень, утворення і розповсюдження мікротріщин, а також припущення, що напрямком розвитку триборуйнувань у кожній точці визначається напрямком мінімального зменшення накопиченої пошкоженості, найбільш доцільно скористатися кубічними сплайнами, які забезпечують мінімум потенційної енергії поверхні, що описується.

### Основний матеріал

Для апроксимації траєкторії найбільш інтенсивного накопичення трибопошкоджень по точках ізоліній функції пошкоженості скористаємося кубічним сплайном виду [11]:

$$S(x) = m_{n-1} \frac{(x_n - x)^3}{6h} + m_n \frac{(x - x_{n-1})^3}{6h} + \left( Q(x_{n-1}) - \frac{m_{n-1}h^2}{6} \right) \frac{x_n - x}{h} + \left( Q(x_n) - \frac{m_n h^2}{6} \right) \frac{x - x_{n-1}}{h}, \quad (1)$$

де  $x_n, x_{n-1}$  – значення аргументу функції, відповідно в точках  $n, n-1$ ;

$Q(x_n), Q(x_{n-1})$  – значення функції пошкоженості в точках  $n, n-1$ ;

$m_n = Q''(x_n); m_{n-1} = Q''(x_{n-1})$  – значення інших похідних функцій пошкоженості;

$h = x_n - x_{n-1}$  – крок інтервалу  $[x_{n-1}; x_n]$ .

Враховуючи, що точки  $Q(x_i)$  знаходяться на ізолініях функції пошкоженості, визначимо мінімально необхідну кількість ізоліній функцій пошкоженості для досягнення визначеної точності при мінімальному обсязі обчислювальної роботи, шляхом оцінки похибок сплайн - апроксимації.

Похибки сплайн - апроксимації на відрізку  $[x_{n-1}; x_n]$  визначаються як абсолютна величина різниці між значеннями сплайна і функції пошкоженості:

$$|S(x) - Q(x)| = R(x). \quad (2)$$

Завдання полягає у визначенні оцінки  $R(x)$ .

Спростимо вираз (1) шляхом заміни:

$$t = \frac{x - x_{n-1}}{h}, \quad 1 - t = \frac{x_n - x}{h}. \quad (3)$$

Тоді (1) набере вигляду:

$$S(x) = m_{n-1} \frac{h^3(1-t)^3}{6h} + m_n \frac{t^3 h^3}{6h} + (Q(x_{n-1})(1-t)) - \frac{m_{n-1} h^2}{6} (1-t) + Q(x_n) \cdot t - \frac{m_n h^2}{6} t. \quad (4)$$

Виконавши перетворення, отримаємо:

$$S(x) = \frac{m_{n-1} h^2}{6} (3t^2 - t^3 - 2t) + \frac{m_n h^2}{6} (t^3 - t) + (Q(x_{n-1})(1-t)) + Q(x_n) \cdot t. \quad (5)$$

Функцію пошкоженості  $Q(x)$ , яка входить до виразу (2) розкладемо в ряд Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа [12], роблячи припущення, що  $Q(x)$  має похідні до третього порядку включно:

$$Q(x) = Q(x_{n-1}) + \frac{Q'(x_{n-1})}{1!} (x - x_{n-1}) + \frac{Q''(x_{n-1})}{2!} (x - x_{n-1})^2 + \frac{Q'''(\xi)}{3!} (x - x_{n-1})^3. \quad (6)$$

Із урахуванням заміни (3) вираз (6) набуде вигляду:

$$Q(x) = Q(x_{n-1}) + Q'(x_{n-1}) \cdot t \cdot h + Q''(x_{n-1}) \frac{t^2 h^2}{2} + Q'''(\xi) \frac{t^3 h^3}{6}. \quad (7)$$

Похідні в (6) виразимо через кінцеві різниці першого (8), другого (9) і третього (10) порядків:

$$Q'(x_{n-1}) \approx \frac{Q(x_n) - Q(x_{n-1})}{h}; \quad Q'(x_n) \approx \frac{Q(x_{n+1}) - Q(x_n)}{h}; \quad (8)$$

$$Q''(x_{n-1}) \approx \frac{\Delta^2 Q(x_{n-1})}{h^2}; \quad Q''(x_n) \approx \frac{\Delta^2 Q(x_n)}{h^2}; \quad (9)$$

$$Q'''(\xi) \approx \frac{\Delta^3 Q(\xi)}{h^3}. \quad (10)$$

Із урахуванням заміни (8) вираз (9) набуде вигляду:

$$Q''(x_{n-1}) \approx \frac{Q(x_{n+1}) - 2 \cdot Q(x_n) + Q(x_{n-1}))}{h^2}. \quad (11)$$

Вираз (10) через значення других похідних  $m_n, m_{n-1}$  можна записати:

$$Q'''(\xi) = \frac{m_n - m_{n-1}}{h}. \quad (12)$$

Із урахуванням виразів (7) - (12) залежність (8) набуде вигляду:

$$Q(x) = Q(x_{n-1})(1-t) + Q(x_n) \cdot t + \frac{m_n t^3 h^2}{6} + \frac{m_{n-1} h^2}{6} (3t^2 - t^3). \quad (13)$$

Підставимо (5) і (13) у вираз (12) після перетворення, отримаємо:

$$R(x) = |S(x) - Q(x)| = \left| \frac{m_{n-1} h^2}{6} (-2t) + \frac{m_n h^2}{6} (-t) \right|. \quad (14)$$

Перепишемо (14) наступним чином:

$$R(x) = \frac{h^2}{6} \left| [(2 \cdot t \cdot m_{n-1}) + m_n \cdot t] \right|. \quad (15)$$

Аналіз (15) показує, що  $R(x)$  набуває максимального значення за  $t = 1$ , оскільки  $0 \leq t \leq 1$ , і однакових других похідних  $m_n, m_{n-1}$ .

Тоді, оцінка похибки інтерполяції:

$$R(x) \leq \frac{h^2}{6} \left| [2m_{n-1} + m_n] \right|. \quad (16)$$

Оцінка похибки інтерполяції дає можливість визначити величину максимального кроку для забезпечення [13].

Для інтерполяції із заданою точністю  $\varepsilon$ , можна записати:

$$\frac{h^2}{6} \left| [2m_{n-1} + m_n] \right| \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Звідси крок інтерполяції  $h$ , який забезпечує задану точність  $\varepsilon$ :

$$h \leq \sqrt{\frac{6\varepsilon}{|[2m_{n-1} + m_n]|}}. \quad (18)$$

Таким чином, можна вважати, що крок інтерполяції, який забезпечує задану точність (18), визначає оптимальну кількість ізоліній. Це дає можливість оптимізувати обчислювальні алгоритми.

Виходячи з вище сказаного, в обчислювальний алгоритм необхідно включити блок визначення оптимальної кількості ізоліній, який забезпечує задану точність інтерполяції. Алгоритм блоку полягає в проведенні попереднього обчислення виразу (18) максимального кроку  $h$ , який забезпечує необхідну точність інтерполяції. Додавання оптимізаційного блоку в загальний алгоритм програм не впливає на обсяг обчислювальної роботи, якщо врахувати, що крок і відповідно оптимальна кількість ізоліній в залежності (18) обчислюються через другі похідні  $m_{n-1}, m_n$ , які визначаються під час побудови кубічного сплайну.

### Висновок

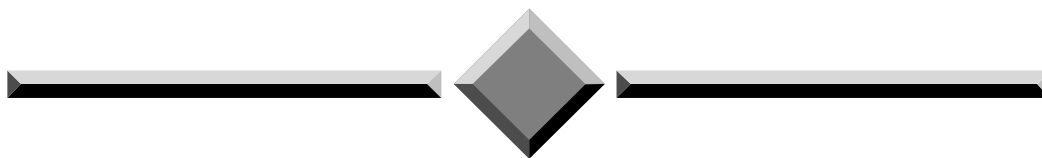
Для оцінки типу і характеру макроруйнувань при зносоконтактній взаємодії пар тертя запропоновано використовувати траєкторії найбільш інтенсивного накопичення трибопошкоджень, що будуються у напрямку мінімального зменшення накопиченої пошкодженості. Для побудови траєкторій інтенсивних трибопошкоджень по точкам ліній рівня функції трибопошкодженості використовується кубічна сплайн - апроксимація. Шляхом оцінки похибки сплайн - апроксимації, визначено мінімально необхідну кількість ізоліній функцій пошкодженості для досягнення визначеної точності за мінімального обсягу обчислювальної роботи.

---

**Література**

1. Сорокатый, Р. В. Метод трибоэлементов : монография. [Текст] / Р. В. Сорокатый. – Хмельницкий : ХНУ, 2009. – 242 с.
2. Венцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Венцель, Л. А. Овчаров – М. : Наука, 1991. – 384 с.
3. Богданов, Дж. Вероятностные модели накопления повреждений [Текст] / Дж. Богданов, Ф. Козин ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 344 с.
4. Регель, Р. В. Кинетическая природа прочности твёрдых тел [Текст] / Р. В. Регель, А. И. Слуцкер, Э. Е. Томашевский. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
5. Бетехтин, В. И. Эволюция микроскопических трещин и пор в нагруженных твердых телах [Текст] / В. И. Бетехтин, А. Г. Кадомцев // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, № 5 – С. 801-807.
6. Иванова, В. С. Разрушение металлов [Текст] / В. С. Иванова. – М. : Metallurgia, 1979. – 168 с.
7. Пластическая деформация и разрушение кристаллических тел. Сообщение 1. Деформация и развитие микротрещин [Текст] / В. И. Бетехтин, В. И. Владимиров, А. Г. Кадомцев, А. И. Петров // Проблемы прочности. – 1979. – № 7. – С. 38-45.
8. Пластическая деформация и разрушение кристаллических тел. Сообщение 2. Деформация и развитие микротрещин [Текст] / В. И. Бетехтин, В. И. Владимиров, А. Г. Кадомцев, А. И. Петров // Проблемы прочности. – 1979. – № 8. – С. 51-57.
9. Горячева, И. Г. Модель усталостного разрушения поверхностей [Текст] / И. Г. Горячева, О. Г. Чекина // Трение и износ. – 1990. – Т. 11, № 3. – С. 389-400.
10. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия [Текст] / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
11. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособ. [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
12. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М. Я. Выгодский. – М. : Наука, 1972. – 872 с.
13. Завялов, Ю. С. Методы сплайн - функций [Текст] / Ю. С. Завялов, Б. И. Квасов, В. Л. Миросниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Надійшла в редакцію 20.06.2018



**Проблеми трибології**  
**“Problems of Tribology”**  
**E-mail: tribosenator@gmail.com**

Pisarenko V.G., Sorokatyj R.V., Dykha O.V., Babak O.P. **Models of accumulation of tribodamages in cylindrical sliding tribosystems.**

Taking into account the peculiarities of wear processes, materials and conditions of the tribo conjugation, in most cases it is assumed that the instantaneous stress field affects the cracks development trajectory: less than the properties of the damaged material, and the characteristic development time of the crack is less than the characteristic time of accumulation of damage. The constructed lines of levels of the function of accumulation of damage, using probabilistic model, determined the most probable directions of trajectories of the propagation of cracks, estimated the type of destruction and the nature of the wear process. In modeling of wear processes, the most important and difficult task is to study the causes, mechanisms and kinetics of the formation of the surface layer during friction. Solving this problem allows you to manage the processes occurring on the contact. Together with the friction characteristics and durability, it opens up new opportunities in developing technologies that allow the formation of surface layers with the required characteristics. In order to estimate the type and nature of the fractures during wear-contact interaction of friction pairs, it is proposed to use the trajectories of the most intense accumulation of tribological damages. They are built in the direction of minimizing the accumulated damage. To construct trajectories of intense tribo damage along the points of the lines of the level of the tribological damage function, a cubic spline approximation is used. By estimating the spline error approximation, the minimum required number of isolation functions of the damage is determined to achieve a certain accuracy with a minimum amount of computational work.

**Key words:** tribosystem, damaging, interpolation, spline approximation.

### References

1. Sorokatyj, R. V. Metod triboelementov monografiya. [Tekst]. R. V. Sorokatyj. Hmel-nickij HNU, 2009. 242 p.
2. Vencel, E. P. Teoriya sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozheniya [Tekst] . E. P. Vencel, L. A. Ovcharov M. Nauka, 1991. 384 p.
3. Bogdanoff, Dzh. Veroyatnostnye modeli nakopleniya povrezhdenij [Tekst] . Dzh. Bogdanoff, F. Kozin ; per. s angl. M. Mir, 1989. 344 p.
4. Regel, R. V. Kineticheskaya priroda prochnosti tvyordyh tel [Tekst] . R. V. Regel, A. I. Sluc-ker, E. E. Tomashevskij. M. Nauka, 1974. 560 p.
5. Betehtin, V. I. Evolyuciya mikroskopicheskikh treshin i por v nagruzhennykh tverdyh telah [Tekst] .V. I. Betehtin, A. G. Kadomcev /Fizika tverdogo tela. 2005. T. 47, № 5 P. 801-807.
6. Ivanova, V. P. Razrushenie metallov [Tekst] .V. P. Ivanova. M. Metallurgiya, 1979. 168 p.
7. Plasticheskaya deformaciya i razrushenie kristallicheskih tel. Soobshenie 1. Deformaciya i razvitie mikrotreshin [Tekst] .V. I. Betehtin, V. I. Vladimirov, A. G. Kadomcev, A. I. Petrov /.Problemy prochnosti. 1979. № 7. C. 38-45.
8. Plasticheskaya deformaciya i razrushenie kristallicheskih tel. Soobshenie 2. Deformaciya i razvitie mikrotreshin [Tekst] . V. I. Betehtin, V. I. Vladimirov, A. G. Kadomcev, A. I. Petrov /.Pro-blemy prochnosti. 1979. № 8. C. 51-57.
9. Goryacheva, I. G. Model ustalostnogo razrusheniya poverhnostej [Tekst] .I. G. Goryacheva, O. G. Chekina /.Trenie i iznop. 1990. T. 11, № 3. P. 389-400.
10. Goryacheva, I. G. Mehanika frikcionnogo vzaimodejstviya [Tekst]. I. G. Goryacheva. M. Nauka, 2001. 478 p.
11. Bahvalov, N. P. Chislennye metody ucheb. posob. [Tekst] .N. P. Bah-valov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov. M. Nauka, 1987. 600 p.
12. Vygodskij, M. Ya. Spravochnik po vysshej matematike [Tekst] . M. Ya. Vygodskij. M. Nau-ka, 1972. 872 p.
13. Zavyalov, Yu. P. Metody splajn - funkcij [Tekst] .Yu. P. Zavyalov, B. I. Kvasov, V. L. Mi-roshnichenko. M. Nauka, 1980. 352 p.