

УДК.531.383

М. Д. Гераимчук, д-р техн. наук, проф.,
Ю. Ф. Лазарев, канд. техн. наук, доц., П. М. Аксененко
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСТЕПЕННОГО ГИРОКОМПАСА

В работе изучаются особенности возникновения, установления и устойчивости вынужденных колебаний двухстепенного гироскопа при интенсивной высокочастотной угловой вибрации основания. Показана хорошая совместимость теоретических результатов и результатов компьютерного моделирования.

Ключевые слова: двухстепенной гироскоп, интенсивная вибрация основания, вынужденные колебания.

Введение

Двухстепенной гироскоп (ДГК) не используется на подвижных объектах ввиду его чрезвычайной чувствительности к угловым колебаниям основания, на котором он установлен. При этом на первый план в образовании погрешности выходит постоянное отклонение главной оси гироскопа от направления на север. Именно оно не позволяет применять ДГК в реальных условиях даже незначительной качки. Однако, жесткая зависимость постоянной составляющей погрешности ДГК от параметров качки основания позволяет надеяться на использование ее для компенсации этой погрешности. Представляет интерес исследовать, как влияет высокочастотная интенсивная угловая вибрация корпуса на параметры вынужденных колебаний ДГК.

Как показывает практика, для анализа поведения ДГК при интенсивной вибрации

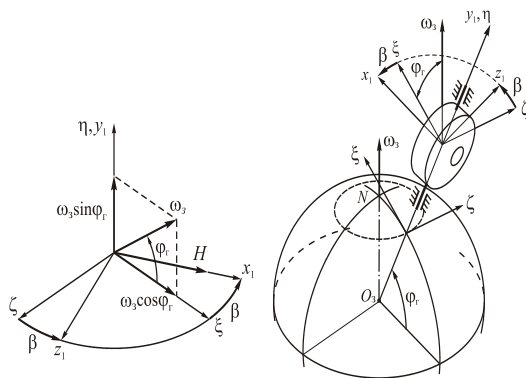


Рис. 1.

основания методы малого параметра неприменимы, так как они существенно опираются на предположение о малости внешних возмущений. Также неприменимым оказался и минимаксный метод Т. Г. Стрижак [2], хорошо показавший себя в применении к маятнику на вибрирующем основании. В этом случае методика Т. Г. Стрижак не позволяет прийти к усредненным уравнениям движения ДГК.

Кинематика двухстепенного гироскопа (ДГК) представлена на рис. 1. Ось рамки y_1 в среднем (при незначительных угловых

вибрациях корпуса ДГК) совпадает с вертикалью места η .

Уравнение движения ДГК при качке основания будем рассматривать в виде

$$J\ddot{\beta} + H[\dot{\varphi}_E \cos \beta + (\omega_3 \cos \varphi_r + \dot{\varphi}_N) \sin \beta] = M, \quad (1)$$

где β – текущее отклонение главной оси гироскопа от направления на север; J – момент инерции ДГК относительно оси y_1 ; H – кинетический момент гироскопа; ω_3 – угловая скорость собственного вращения Земли; φ_r – географическая широта места;

ϑ_E и ϑ_N – углы качки основания соответственно вокруг касательной к параллели места и полуденной линии; M – момент сил по измерительной оси.

В безразмерной форме уравнение (1) с учетом сил вязкого трения в измерительной оси удобно представить следующим образом

$$\beta'' + 2\zeta\beta' + [1 + B'(\tau)] \sin \beta + A'(\tau) \cos \beta = 0, \quad (2)$$

где штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{H\omega_3 \cos \varphi_\Gamma}{J}}$ – частота собственных малых колебаний главной оси гирокомпаса;

ζ – относительный коэффициент затухания;

$$A'(\tau) = k\vartheta'_E(\tau); \quad B'(\tau) = k\vartheta'_N(\tau); \quad k = \sqrt{\frac{H}{J\omega_3 \cos \varphi_\Gamma}}. \quad (3)$$

В дальнейшем рассматривается гармоническая качка, происходящая по законам

$$\vartheta_E = \vartheta_{Em} \sin(v\tau); \quad \vartheta_N = \vartheta_{Em} \sin(v\tau + \varepsilon). \quad (4)$$

с относительной частотой $v = \frac{\omega}{\omega_0}$, где ω – частота качки; амплитудами ϑ_{Em} угла кач-

ки вокруг оси запад-восток и ϑ_{Nm} – вокруг полуденной линии. В этих условиях уравнение (2) приобретает вид

$$\beta'' + 2\zeta\beta' + [1 + vN \cos(v\tau + \varepsilon)] \sin \beta + vE \cos(v\tau) \cos \beta = 0, \quad (5)$$

где $E = k\vartheta_{Em}$ и $N = k\vartheta_{Nm}$ – приведенные амплитуды качки.

Задачей исследования является нахождение параметров возможных установившихся вынужденных колебаний ДГК по углу β в условиях высокочастотной ($v \gg 1$) и интенсивной ($\vartheta_m > 1'$) качки основания.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением движения при угловой вибрации основания вокруг неподвижной относительно Земли горизонтальной оси, составляющей с касательной к параллели места некоторый угол φ . В этом случае можно полагать $E = V_m \cos \varphi$; $N = V_m \sin \varphi$; $\varepsilon = 0$, где V_m – приведенная амплитуда угла качки.

Компьютерное моделирование, состоящее в численном интегрировании уравнения (5) показало, что основным режимом движения рассматриваемой системы являются установившиеся вынужденные колебания оси собственного вращения ДГК относительно некоторого смещенного от направления на север центра. Поэтому частное решение уравнения (5) будем искать в виде суммы двух составляющих $\beta(\tau) = \bar{\beta} + \Delta\beta(\tau)$, где $\bar{\beta}$ предполагается медленно меняющимся средним значением угла β за период высокочастотного воздействия (центром малых колебаний маятника), а $\Delta\beta(\tau)$ – высокочастотной центрированной составляющей этого угла со средним значением, равным нулю ($\langle \Delta\beta(\tau) \rangle = 0$).

Теперь уравнение (5) можно представить так:

$$\Delta\beta'' + 2\zeta\Delta\beta' + \bar{\beta}'' + 2\zeta\bar{\beta}' + [1 + vV_m \sin \varphi \cos(v\tau)] \sin(\bar{\beta} + \Delta\beta) + vV_m \cos \varphi \cos(v\tau) \cos(\bar{\beta} + \Delta\beta) = 0 \quad (6)$$

Как показало моделирование, амплитуды вынужденных колебаний ДГК малы по величине ($|\Delta\beta| \ll 1$) даже при интенсивной вибрации основания. Это позволяет рассматривать вместо уравнения (6) его приближенную линеаризованную модификацию

$$\Delta\beta'' + 2\zeta\Delta\beta' + [\cos\bar{\beta} - vV_m \cos(v\tau)\sin(\bar{\beta} - \varphi)]\Delta\beta + \bar{\beta}'' + 2\zeta\bar{\beta}' + \sin\bar{\beta} + vV_m \cos(v\tau)\cos(\bar{\beta} - \varphi) = 0. \quad (7)$$

Усредняя уравнение (7) по быстрому времени, получим

$$\bar{\beta}'' + 2\zeta\bar{\beta}' + \sin\bar{\beta} - vV_m \sin(\bar{\beta} - \varphi)\langle\Delta\beta \cos(v\tau)\rangle = 0. \quad (8)$$

которое можно и удобнее использовать в таком виде:

$$\bar{\beta}'' + 2\zeta\bar{\beta}' + \sin\bar{\beta} + V_m \sin(\bar{\beta} - \varphi)\langle\Delta\beta'(\tau) \sin(v\tau)\rangle = 0. \quad (9)$$

Вычитая из исходного уравнения (7) усредненное уравнение (8), получим уравнение центрированных членов:

$$\Delta\beta'' + 2\zeta\Delta\beta' + \cos\bar{\beta}\Delta\beta - vV_m \sin(\bar{\beta} - \varphi)[\cos(v\tau)\Delta\beta(\tau) - \langle\Delta\beta(\tau)\cos(v\tau)\rangle] + vV_m \cos(v\tau)\cos(\bar{\beta} - \varphi) = 0.$$

Если частота вибрации основания (а значит, и частота изменения центрированной составляющей движения ДГК) намного больше частоты собственных колебаний ДГК ($v \gg 1$), то все члены левой части полученного уравнения будут намного меньше по амплитуде первого и последнего слагаемых, и ими можно пренебречь. В результате придем в первом, грубом приближении к соотношению

$$\Delta\beta'' + vV_m \cos(v\tau)\cos(\bar{\beta} - \varphi) = 0$$

или, интегрируя,

$$\Delta\beta' \approx -V_m \cos(\bar{\beta} - \varphi)\sin(v\tau). \quad (10)$$

Теперь можно конкретизировать уравнение (9) медленного движения:

$$\bar{\beta}'' + 2\zeta\bar{\beta}' + \sin\bar{\beta} - \frac{1}{4}V_m^2 \sin 2(\bar{\beta} - \varphi) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11), в отличие от исходного нестационарного уравнения (6), является уравнением с постоянными коэффициентами.

Отличительной особенностью уравнения (11) является то, что оно позволяет исследовать не только положения равновесия, но и переходный процесс установления вынужденных колебаний. Кроме того, из соотношения (10) можно также определять амплитуду вынужденных колебаний.

Сумма последних двух слагаемых левой части уравнения (11) представляет собой безразмерный позиционный момент сил

$$P(\bar{\beta}) = \sin\bar{\beta} - \frac{1}{4}V_m^2 \sin[2(\bar{\beta} - \varphi)].$$

Равенство его нулю определяет положение β^* равновесия (т. е. центра стационарных колебаний). Итак, центры стационарных колебаний могут быть определены решениями тригонометрического уравнения

$$\sin\beta^* - \frac{1}{4}V_m^2 \sin 2(\beta^* - \varphi) = 0. \quad (12)$$

В диапазоне $-\pi < \beta \leq \pi$ уравнение (12) может иметь от одного до четырех корней. Соответствует ли найденный корень устойчивому центру – определяется знаком функции

$$\Phi(\bar{\beta}) = \frac{\partial P(\bar{\beta})}{\partial \bar{\alpha}} = \cos\bar{\beta} - \frac{1}{2}V_m^2 \cos 2(\bar{\beta} - \varphi)$$

при найденном значении β^* корня. Если выполняется условие $\Phi(\beta^*) > 0$, то найденный центр колебаний β^* устойчив. При отрицательном значении этой величины соответствующий центр является неустойчивым.

Нетрудно видеть, что выражение $\Phi(\beta^*)$ определяет квадрат безразмерной частоты ν_0^* переходных колебаний ДГК при установлении колебаний относительно центра β^* :

$$\nu_0^* = \sqrt{\Phi(\beta^*)} = \sqrt{\cos \beta^* - \frac{V_m^2}{2} \cos 2(\beta^* - \varphi)}. \quad (13)$$

Возвращаясь к центрированной составляющей решения, найдем из (10):

$$\Delta \beta' \approx -V_m \cos(\beta^* - \varphi) \sin(\nu \tau),$$

откуда следует

$$\Delta \beta \approx \frac{V_m}{\nu} \cos(\beta^* - \varphi) \cos(\nu \tau).$$

Амплитуда вынужденных колебаний ДГК определяется выражением

$$\beta_m \approx \frac{V_m}{\nu} \cos(\beta^* - \varphi). \quad (14)$$

Колебания основания вокруг оси север-юг

Колебаниям основания вокруг оси север-юг соответствует значение угла $\varphi = 90^\circ$. При этом формулы (12)...(14) приобретают вид:

$$\sin \beta^* (1 + \frac{1}{2} V_m^2 \cos \beta^*) = 0; \quad \nu_0^* = \sqrt{\cos \beta^* + \frac{V_m^2}{2} \cos 2\beta^*}; \quad \beta_m \approx \frac{V_m}{\nu} \sin \beta^*.$$

Изучение их приводит к следующим выводам.

1. Центры, соответствующие корням $\cos \beta^* = -\frac{2}{V_m^2}$, всегда неустойчивы.
2. Северное положение равновесия главной оси ДГК при качке основания вокруг оси север-юг всегда устойчиво, а сами вынужденные колебания имеют амплитуду, равную нулю.
3. Южное положение равновесия становится устойчивым, если приведенная амплитуда V_m качки основания вокруг полуденной линии превышает величину

$$V_m > \sqrt{2}. \quad (15)$$

Амплитуда вынужденных колебаний относительно южного положения также равна нулю.

4. Частота переходного процесса при приближении главной оси гирокомпаса к северному направлению определяется выражением $\nu_0^* = \sqrt{1 + \frac{V_m^2}{2}};$

5. Частота переходного процесса при приближении главной оси гирокомпаса к южному направлению определяется выражением $\nu_0^* = \sqrt{\frac{V_m^2}{2} - 1}.$

На рис. 2 показаны (линиями с точками) графики зависимостей частот переходного процесса относительно северного (синяя линия) и южного (красная линия) положений равновесия ДГК от амплитуды качки основания вокруг полуденной линии. На том

же рисунку квадратними маркерами показані результати вимірювання відносительних частот переходних процесів, отриманих комп'ютерним моделюванням при частоті качки $\nu = 10$ і $\nu = 20$.

Нетрудно побачити, що при малих амплітудах ($V_m < \frac{\nu}{3}$) вібрації метод балансу (приводящий до тих же результатів, що і метод усереднення) дає задовільне співпадіння з модельним експериментом. Однак при великих амплітудах ($\frac{\nu}{2} > V_m > \frac{\nu}{3}$) різниця експерименту з теорією досягає 35%.

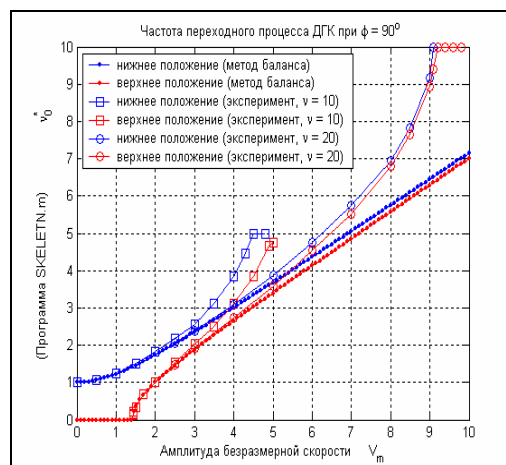


Рис. 2. Частота переходного процесу при качці навколо полуденної лінії

Колебания основания вокруг оси восток-запад

В цьому випадку $\varphi = 0$ і формули (12)...(14) набувають вигляду:

$$\sin \beta^* \left(1 - \frac{1}{2} V_m^2 \cos \beta^*\right) = 0; \quad v_0^* = \sqrt{\cos \beta^* - \frac{V_m^2}{2} \cos 2\beta^*}; \quad \beta_m \approx \frac{V_m}{\nu} \cos \beta^*.$$

Поэтому выводы следуют такие.

1. При колебаниях основания вокруг оси запад-восток колебания ДГК относительно направления на север устойчивы, если амплитуда качки основания подчиняется условию

$$V_m < \sqrt{2}, \quad (16)$$

при этом установившиеся вынужденные колебания имеют амплитуду $\beta_m = \frac{V_m}{\nu}$ и становятся неустойчивыми при амплитуде скорости, подчиняющейся условию (15).

2. Частота переходного процесса относительно направления на север определяется выражением $v_0 = \sqrt{1 - \frac{V_m^2}{2}}$, т. е. уменьшается (от единицы до нуля при амплитуде $V_m = \sqrt{2}$) с ростом интенсивности вибрации основания.

3. При качке основания вокруг линии запад-восток колебания ДГК относительно южного положения равновесия всегда неустойчивы.

4. Положения равновесия, определяемые условием $\cos\beta^* = \frac{2}{V_m^2}$, располагаются в северной горизонтальной полуплоскости симметрично относительно направления на север и имеют реальный смысл лишь при выполнении условия (15). Поэтому при выполнении условия (15) колебания маятника около рассматриваемых положений равновесия являются устойчивыми. Амплитуда колебаний ДГК относительно этих положений определяется равенством $\beta_m = \frac{2}{\nu V_m}$, а частота переходного процесса – соотношением

$$\nu_0 = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{4}{V_m^4}}.$$

График зависимости положения центра колебаний от амплитуды качки основания вокруг оси запад-восток, построенный в соответствии с формулой (12), приведен на рисунке 3 (точками).

Там же приведены аналогичные графики, построенные на основе применения метода возмущений (звездочками). Квадратными маркерами нанесены результаты измерения положений центров при возмущении с частотой $\nu = 10$, полученные при программном моделировании.

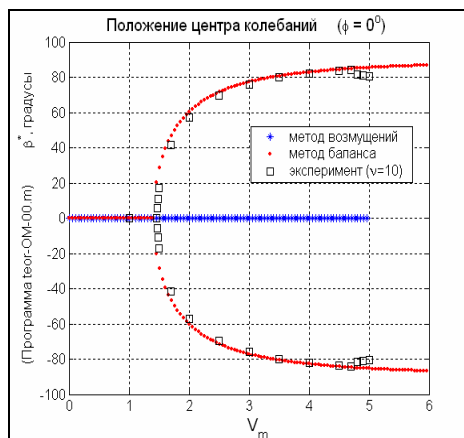


Рис. 3. Положения центров колебаний

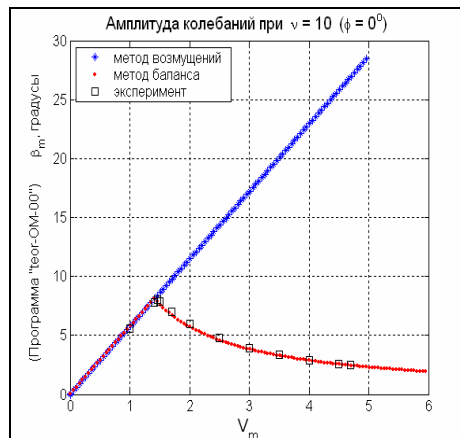


Рис. 4. Амплитуды вынужденных колебаний

На рис. 4 представлены зависимости амплитуд вынужденных колебаний ДГК, рассчитанные по формулам метода баланса (точками) и метода возмущений (звездочками) для частоты возмущения $\nu = 10$. Квадратные маркеры отмечают соответствующие значения амплитуды, полученные путем программного моделирования движения маятника.

Рисунок 5 представляет (точками) графики теоретических зависимостей (13) частот переходного процесса ДГК относительно северного и боковых положений равновесия от приведенной амплитуды качки основания. Квадратными маркерами отмечены модельные замеры частоты переходного процесса при частоте вибрации основания $\nu = 10$.

Результаты моделирования совпадают с предсказанными теорией во всем диапазоне существования вынужденных колебаний. Начиная со значений амплитуд $V_m \approx \frac{\nu}{2}$,

вынужденные колебания, происходящие с частотой ν вибрации основания, сменяются параметрическими, частота которых вдвое меньше.

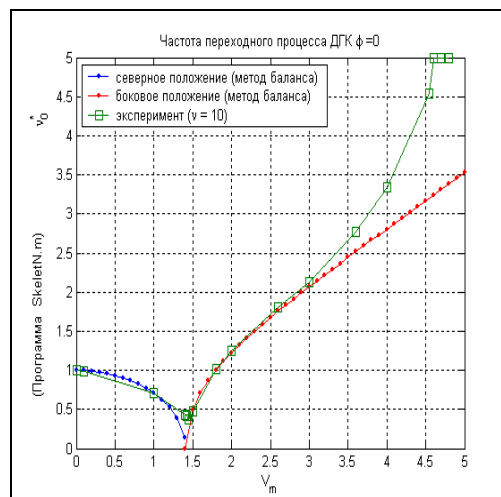


Рис. 5. Частоты переходного процесса ДГК

Колебания основания вокруг оси юговосток – северозапад

Качка основания вокруг оси, наклоненной к странам света под 45° , вызывает установление вынужденных колебаний с параметрами, графическое представление которых приведено на рис. 6 и 7. Положения устойчивых центров вынужденных колебаний, найденные различным путем, показаны на рис. 6.

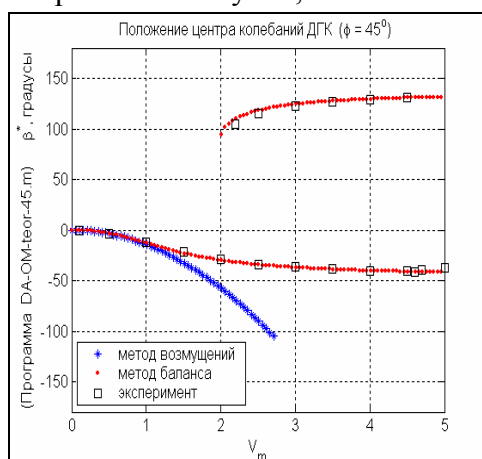


Рис. 6. Центры колебаний при $\phi = 45^\circ$

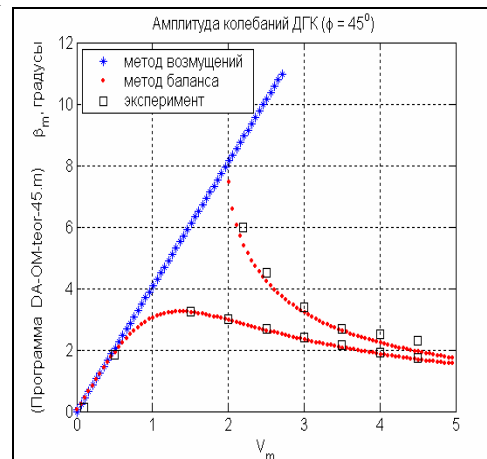


Рис. 7. Амплитуды вынужденных колебаний

На рис. 7 представлены зависимости амплитуд вынужденных колебаний ДГК, рассчитанные по формулам метода баланса (точками) и метода возмущений (звездочками) для частоты возмущения $\nu = 10$. Квадратные маркеры отмечают соответствующие значения амплитуды, полученные путем программного моделирования движения маятника.

Как видим, в этом случае совпадение теории с модельным экспериментом практически полное. Метод возмущений приводит к удовлетворительным значениям амплитуд лишь при малых интенсивностях вибрации основания ($V_m \leq 1$).

Интересно заметить, что в соответствии с теорией и результатами моделирования положения центров вынужденных колебаний и частоты переходных процессов опреде-

ляються лише величиною V_m приведенної амплитуди кулової вібрації основи і не залежать від її частоти. Амплитуди же вимушених коливань в цих умовах обернено пропорційні частоті вібрації основи

Висновки:

1. Движение ДГК существенно различается в трех диапазонах изменения амплитуды угловых колебаний основания:

$$1) 0 < \vartheta_m < \sqrt{\frac{2J\omega_3 \cos \varphi_r}{H}}; \quad 2) \sqrt{\frac{2J\omega_3 \cos \varphi_r}{H}} < \vartheta_m < \frac{J\omega}{2H}; \quad 3) \frac{J\omega}{2H} < \vartheta_m.$$

2. В первом диапазоне движение ДГК удовлетворительно описывается методами малого параметра. Здесь устанавливается только один центр вынужденных колебаний при любых начальных условиях

3. Во втором диапазоне наблюдается возникновение нескольких устойчивых положений центров вынужденных колебаний, потеря устойчивости некоторых прежних центров, изменение частоты переходных процессов при изменении амплитуды вибрации основания.

4. Вблизи верхнего предела второго диапазона наблюдается стабилизация частоты переходного процесса на уровне половины частоты вибрации основания. При этом вынужденные колебания сменяются на параметрические, частота которых вдвое меньше частоты вибрации основания, амплитуда резко увеличивается с возрастанием амплитуды возмущения.

5. В третьем диапазоне колебания не устанавливаются при любых начальных условиях. Главная ось гирокомпаса непрерывно вращается вокруг вертикали в одну сторону.

Список литературы:

1. Лазарев Ю. Ф. Основы теории чувствительных элементов систем ориентации [Текст]: учеб. / Ю. Ф. Лазарев, П. М. Бондар. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 644 с.
2. Стрижак Т. Г. Метод усреднения в задачах механики / Т. Г. Стрижак. – Киев: Донецк: Вища школа, 1982. – 250 с.
3. Лазарев Ю. Ф. Применение метода баланса для исследования поведения двухстепенного гирокомпаса при вибрации / Ю. Ф. Лазарев, П. М. Аксёненко // XII Міжнародна науково-технічна конференція «Приладобудування: стан і перспективи»: збірник тез доповідей. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 280 с.

Надійшла до редакції 20.01.2014

М. Д. Гераймчук, Ю. Ф. Лазарев, П. М. Аксёненко

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ДВОСТУПЕНЕВОГО ГІРОКОМПАСУ

У роботі досліджуються особливості виникнення, усталення та стійкості вимушених коливань двоступеневого гірокомпаса за інтенсивної високочастотної кутової вібрації основи. Зображена гарна збіжність теоретичних результатів та результатів комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: двоступеневий гірокомпас, інтенсивна вібрація основи, вимушені коливання.

M. Geraimchuk, Yu. Lazarev, P. Aksionenko

FORCED OSCILLATIONS OF A TWO-STAGE GYROCOMPASS

This paper investigates the features of occurrence and stability of forced oscillations during intensive high frequency rotational vibration of the base. There was good agreement of theoretical results and the results of computer simulation.

Keywords: two-stage gyro, intense vibration of the base, forced oscillations.