УДК 004.7

В. К. Антонов, канд. техн. наук, доц.

ЦЕПНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Национальный авиационный университет

Явления природы как процессы переходов ее объектов в различные состояния, когда сами переходы бесконечно глубоко взаимодействуют между собой, образуя многоуровневую фрактальную структуру, могут описываться многоуровневыми дифференциальными уравнениями, что и составляет основную предлагаемую идею

Введение. Известно, что при трении происходят качественные изменения в поверхностных слоях трущихся деталей (образование вторичных структур), и эти изменения зависят от длительности процесса, то есть переход в новое состояние связан с изменением во времени характера взаимодействия. Рассматривая потоки факторов взаимодействия трущихся деталей как самостоятельные (подобно самим деталям) нестационарные объекты, изменение потоков будем понимать как следствие взаимодействия не только деталей, но и самих потоков, что можно отразить термином «вторичное взаимодействие». Далее, аналогично рассматривая взаимодействия вторичных взаимодействий как самостоятельные объекты, мы можем ввести «третичное взаимодействие» – и так будем действовать до бесконечности. В итоге получаем фрактальную иерархическую структуру, в которой взаимодействиям будем приписывать номер их уровня организации: исходное взаимодействие (объектов) – первый уровень, вторичное – второй, и т.д.

Наиболее наглядно многоуровневость взаимодействий проявляется в физике элементарных частиц, где их взаимодействия идентифицируются с другими частицами, что отражается диаграммами Фейнмана.

Иерархичность взаимодействий возможна в разных областях, например в экономике, биологии, медицине, технике, структуре человеческого мышления, нейронных сетях, фрактальных системах.

Многоуровневую дискретную структуру можно представить в виде дифференциального уравнения, параметры которого, отражая характер взаимодействия между фазовыми координатами, сами подчиняются некоторому дополнительному (первому) дифференциальному уравнению. Оно, в свою очередь, также содержит параметры, описываемые вторым дополнительным уравнением, и так до бесконечности. Последовательно описывая разные уровни взаимодействий, приходим к цепному характеру структуры уравнений.

Некоторая практическая ограниченность предлагаемого подхода обусловливается тем обстоятельством, что физическая реальность не подразумевает наперед заданной до бесконечно большого уровня априорной определенности структуры связей, равно как и дискретного, не дифференциального характера самой структуры. Отметим, что естественным представляется понимание уровней взаимодействия с большими номерами как более низких и, следовательно, менее существенных, особенно при том, что в практике построения аппроксимирующих моделей, например методами идентификации, задача описания уровней взаимодействия с большими номерами усложняется, поскольку по мере углубления выявляемых связей одновременно возрастает роль ошибок идентификации на предыдущих уровнях. Образование замкнутых структур, когда параметрами последних уравнений являются координаты первых, ведет к противоречию с тезисом о неисчерпаемости материи, но в практике вычислений никаких препятствий для существования таких систем нет.

Постановка задачи для линейного цепного управляемого объекта. Многоуровневой дискретной структуре естественно поставить в соответствие дифференциальное уравнение, параметры которого, отражая характер взаимодействия между фазовыми координатами, сами подчиняются некоторому дополнительному (первому) дифференциальному уравнению. Оно, в свою очередь, также содержит параметры, описываемые вторым уравнением, и так до бесконечности. Рассмотрим простой пример двухуровневой системы. Объект описывается уравнением

$$\dot{X} = A(t)X + Bu . \tag{1}$$

Назначая для системы (1) функцию Ляпунова в виде квадратичной формы с симметричной матрицей

$$V = X^T QX , \tag{2}$$

и налагая дифференциальное уравнение связи на ее поведение на траекториях системы (1) в виде линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{V} + c_1\dot{V} + c_2V = 0\,, \qquad (3)$$

запишем производные функции Ляпунова (2) в силу системы (1), подставим их выражения в (3), и получим дифференциальное уравнение для определения управления u :

$$\dot{u} = -(2X^TQB)^{-1}\left\{2(X^TA^T + u^TB^T)Q(AX + Bu) + \right.$$

$$\left. + 2X^TQ\left[\dot{A}X + AAX + ABu\right] + 2c_1X^TQ(AX + Bu) + c_2X^TQX\right\}. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит производную от матрицы A , что обосновывает необходимость ввести дополнительное уравнение, отражающее вторичное взаимодействие. Зададим его в виде линейного относительно фазовых координат дифференциального уравнения

$$\dot{A} = (D_1 | D_2)X\,, \qquad (5)$$

где D_1 и D_2 – заданные квадратные матрицы, произведения которых на фазовый вектор образуют столбцы матрицы $\dot{A}$.

Уравнение (5) замыкает систему (1)–(4). Интегрирование (4) дает устойчивые переходные процессы для системы (1). Мы получили нелинейную устойчивую двухуровневую динамическую систему. Ее нелинейность является неизбежным следствием двухуровневости. При задании уравнения связи (3) в виде уравнения третьего порядка, неизбежно необходимо замыкание системы дополнительным дифференциальным уравнением второго порядка для матрицы A .

Применяя принцип суперпозиции, для линейных объектов можно построить пропорциональные, интегральные (как в нашем случае), и пропорционально-интегральные регуляторы.

Построение вероятностных многоуровневых цепных моделей на основе уравнений Колмогорова. В практике описания поведения систем при случайных воздействиях, свойственных также процессам трения и износа, применяется уравнение Колмогорова [1] для вероятностей состояний. Для системы с двумя состояниями и одним уровнем взаимодействия (одноуровневой системы) граф состояний имеет вид, изображенный на рис. 1. Для системы с тремя уровнями взаимодействия трехуровневый граф изображен на рис. 2.

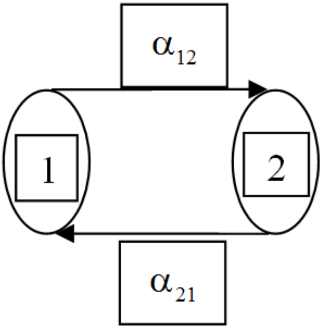

Рис. 1. Одноуровневый граф

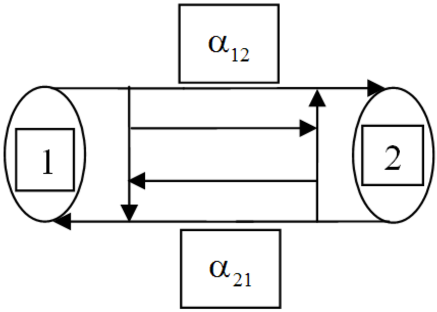

Рис. 2. Трехуровневый граф

Главное отличие от одноуровневой системы состоит в наличии дополнительных связей между интенсивностями обмена. В общем случае дополнительные связи могут существовать между разными уровнями, но в данном случае каждый уровень взаимодействует лишь с соседними. Для одноуровневой системы [1] дифференциальные уравнения вероятностей состояний Колмогорова имеют вид

$$\dot{P}_1 = -\alpha_{12} P_1 + \alpha_{21} P_2 \ ; \qquad \dot{P}_2 = \alpha_{12} P_1 - \alpha_{21} P_2 \ , \tag{6}$$

где P_1 и P_2 – вероятности нахождения системы соответственно в первом и втором состояниях, α_{12} и α_{21} – интенсивности перехода – соответственно из первого во второе, и из второго в первое состояния.

Для трехуровневой системы уравнения (6) сохраняются, и при этом дополняются уравнениями перехода между интенсивностями перехода (уравнениями перехода второго уровня), которые имеют вид

$$\dot{\alpha}_{12} = -\beta_{12-21} \cdot \alpha_{12} + \beta_{21-12} \cdot \alpha_{21} ; \quad \dot{\alpha}_{21} = \beta_{12-21} \cdot \alpha_{12} - \beta_{21-12} \cdot \alpha_{21} , \tag{7}$$

где β_{12-21} и β_{21-12} – интенсивности перехода второго уровня взаимодействия, т.е. интенсивности перехода между интенсивностями перехода первого уровня взаимодействия.

На третьем уровне взаимодействия зададим дифференциальные уравнения для интенсивностей второго уровня. Это можно сделать по разному в зависимости от конкретной задачи. Например

$$\dot{\beta}_{12-21} = -\gamma_{(12-21)-(21-12)} \cdot \beta_{12-21} + \gamma_{(21-12)-(12-21)} \cdot \beta_{21-12} ;$$

$$\dot{\beta}_{21-12} = \gamma_{(12-21)-(21-12)} \cdot \beta_{12-21} - \gamma_{(21-12)-(12-21)} \cdot \beta_{21-12} \ , \qquad (8)$$

где $\gamma_{(12-21)-(21-12)}$ и $\gamma_{(21-12)-(12-21)}$ – интенсивности перехода между интенсивностями перехода второго уровня, т.е. интенсивности перехода третьего уровня.

Для интенсивностей третьего уровня можно сделать предположение о их постоянстве. В этом случае построение полной системы уравнений заканчивается. Можно также замкнуть систему, дополнительно записав для интенсивностей третьего уровня дифференциальные уравнения для условия обмена на четвертом уровне. Также возможны структуры замкнутой кольцевой топологии, или структуры типа листа Мебиуса. Высшие интенсивности эквивалентны разложению исходных в ряд Тейлора по независимой переменной. На рис. 3, рис. 4, рис. 5 и рис. 6 представлены графики переходных процессов соответственно для систем с одним, двумя, тремя и четырьмя уровнями обмена.

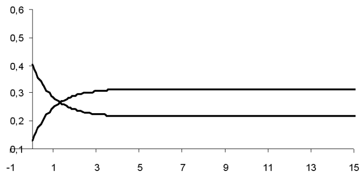

Рис.3. Один уровень обмена

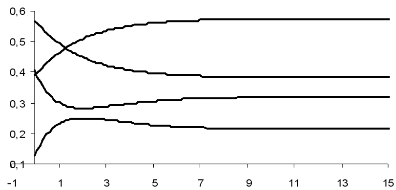

Рис. 4. Два уровня обмена

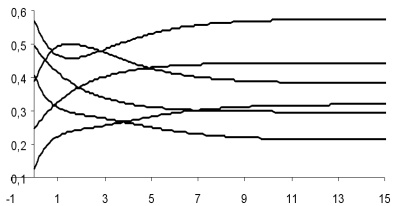

Рис. 5. Три уровня обмена

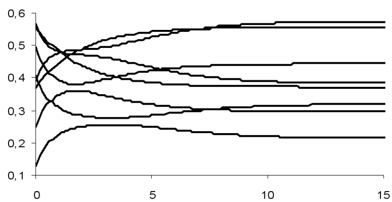

Рис. 6. Четыре уровня обмена

На каждом из этих рисунков число кривых вдвое больше максимального уровня обмена. При их численном построении параметры интенсивности на последнем уровне полагались постоянными. Начальные значения вероятностей и интенсивностей определялись с помощью датчика случайных чисел, при этом вероятности нормировались на равенство их суммы единице в начальный момент. Из уравнений состояний и из графиков видно, что сумма вероятностей остается равной единице, что соответствует полноте группы двух состояний объекта.

Отметим очевидную возможность постановки в связи с предложенными уравнениями оптимизационных и игровых задач, а также задач параметрической и структурной идентификации. Построение многоуровневых систем цепных уравнений носит итерационный характер. Если они отражают реальность так, что по мере роста уровня (порядка системы, порядка обмена) роль дополнительных уравнений с ростом порядка уменьшается («спектр порядков» оказывается ограниченным), это можно считать благоприятным сопутствующим проведению расчетов обстоятельством.

Очевидно, что с помощью цепных систем уравнений можно решать задачи идентификации параметров случайных процессов в различных системах, и при этом любому закону распределения можно поставить в соответствие некоторую цепную модель. Например, принцип неопределенности в квантовой механике можно моделировать как многоуровневую структуру с дополнительными связями между интенсивностями перехода между состояниями с заданными вероятностями определенности координат и импульса. При этом дополнительные связи указывают внутреннюю динамику исследуемой частицы. Не представляет непреодолимого труда сконструировать схему межуровневых взаимодействий так, чтобы излучение приводило к сообщению импульса излучающей частице в направлении излучения, или чтобы поглощение частицы приводило к сообщению импульса в ее направлении (это объясняло бы гравитацию и скрытую массу), что интересно даже при отсутствии связей с реальностью. В удачном случае получаем новый отрицательный эффект Мессбауэра (напомним, эффект Мессбауэра состоит в факте поглощения или излучения без отдачи), который можно практически использовать для реализации принципа антиреактивного движения. Косвенно такая возможность следует из факта наблюдаемого преимущественного движения материи, и при этом не требуется некоторого «первоначального толчка», или так называемого «большого взрыва», как не подразумевающих какой либо причины в силу их «первоначальности».

Выводы. Предложенные цепные уравнения Колмогорова целесообразно применять для статистического анализа широкого круга явлений природы и в технических приложениях, например для исследования поведения машин и механизмов в связи с их износом, в теории сетевых систем, чему сопутствует их простота и естественность. Интересно также построение управляемых цепных систем различного технического назначения, например эргатических.

Список литературы

1. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1996. — 400 с.

Антонов В.К. **Ланцюгові диференційні рівняння** / Проблеми тертя та зношування: наук.-техн. зб. – К.: НАУ, 2011. – Вип. 55. – С.72–78.
Явища природи як процеси переходів її об’єктів в різні стани, коли самі переходи нескінченно глибоко взаємодіють між собою, утворюючи багаторівневу фрактальну структуру, можуть описуватись багаторівневими диференційними рівняннями, що і складає основну ідею що пропонується.
Рис. 6, список літ.: 1 найм.

Continued differential equations
Natural phenomena as the processes of conversion of its facilities in various states where the transitions themselves infinitely deeply interact with each other, forming a multi-layered fractal structure can be described by multi-level differential equations that is the basic idea of the proposed

Стаття надійшла до редакції 04.04.2011