

В. І. Кравцов, д-р техн. наук., проф.,  
М. Д.-А. Садегі, аспірант

## ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ У ДОСЛІДЖЕННІ МЕХАНІКИ КОНТАКТУЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ ТРИБОСПРЯЖЕНЬ

Національний авіаційний університет

*Описані способи задавання геометрії кривої при дослідженні пружного деформування контактуючих поверхонь трибоспряження. Запропонована методика може використовуватися при чисельному розв'язку звичайних диференціальних рівнянь високого порядку, що описують деформування поверхонь трибоспряжень під дією довільного вектора статичних або квазістатичних навантажень.*

**Вступ.** Взаємодія твердих тіл при зовнішньому терті локалізована в найтонших поверхнях і приповерхневих шарах. Значна зміна властивостей поверхневих шарів має місце при зовнішньому терті в тих випадках, коли відбувається інтенсивне деформування поверхневих шарів. Товщина поверхневих шарів, що перетерпіли зміну при зовнішньому терті, залежить від напруженого стану в зонах їх фактичного торкання. Обробка поверхні твердих тіл, як би вона не була досконалою, приводить до відхилення профілю поверхні від правильної геометричної форми, заданої кресленням деталі. Напружений стан у зоні фактичного торкання тіл характеризується деформацією мікронерівностей поверхонь, а також пружними або пластичними деформаціями. Таким чином, поверхневий шар можна розглядати як деформівне, геометрично нелінійне тверде тіло [1]. При цьому геометрію поверхні може бути як коло, так і деяка інша форма кривої, наприклад, еліпс із незначним співвідношенням осей тощо, яка виникла внаслідок зношування поверхонь тертя або зумовлена технологічними параметрами.

**Постановка завдання.** При оцінці взаємодії контактуючих твердих тіл мікронерівності реальної поверхні моделюють у вигляді однакового розміру тіл правильної геометричної форми, що розташовані на деякій основі й розподілені за певною залежністю по

висоті. Бувають наступні основні види відхилень поверхонь [1]: макровідхилення, хвилястість, шорсткість.

При зіткненні твердих тіл внаслідок відхилень їх поверхонь від правильної геометричної форми контактування здійснюється не по номінальній площі, а тільки по частині її. У зіткнення звичайно входять найвищі мікронерівності, сумарна площа контакту яких називається фактичною площею торкання. Залежно від величини навантаження, прикладеного до кожної мікронерівності, механічних властивостей матеріалу й геометричного обрису мікронерівностей у зоні фактичного торкання можуть мати місце пружні, пружнопластичні й пластичні деформації. Силове збурення через дискретні контакти, утворені окремими мікронерівностями, передається хвилями, на яких вони розташовані й викликає їхнє деформування.

Деформація й напруження в зонах фактичного торкання мікронерівностей, що визначають взаємодію твердих тіл при зовнішньому терті, суттєво залежать від геометричного обрису поверхонь тел. Для вивчення геометричного обрису мікронерівностей зазвичай досліджують перерізи (профілі) поверхонь у заданому напрямку за допомогою профілограм.

При оцінці шорсткості поверхні використовуються висоти мікронерівностей і їх геометричні обриси. На взаємодію твердих тіл мають значний вплив радіуси кривизни мікронерівностей. Радіуси кривизни уздовж слідів обробки й перпендикулярно до них різні і залежать від виду обробки поверхні. Розподіл матеріалу в поверхневому шарі задається кривою опорної поверхні. Криву опорної поверхні будують на підставі профілограм. Для опису кривої опорної поверхні застосовуються різні функції. Для поверхонь більших розмірів необхідно враховувати вплив на процес контактування хвилястості. За геометричним обрисом хвилі подібні кульовим або циліндричним сегментам. Найпоширеніші хвилі циліндричної форми. Радіус закруглення хвиль можна визначити за хвилеграмами поверхні.

На сьогодні найбільш часто використовують сферичну модель шорсткуватої поверхні. У цій моделі вважається, що мікронерівності являють собою кульові сегменти постійного радіуса, які розташовані з постійною щільністю на деякій загальній основі й

розподілені по висоті таким чином, що криві опорної поверхні моделі й реальної поверхні збігаються [2].

**Мета роботи.** На підставі вищесказаного можна зробити висновок, що при дослідженні пружного контактування трибоспряжень необхідно мати чітке уявлення про геометрію кривих, які мають місце у цьому процесі. Метою роботи є розроблення методики задавання геометрії кривої опорної поверхні елементів у трибоспряженні при дослідженні його напружено-деформованого стану.

**Методика дослідження.** При чисельному дослідженні пружних деформацій у трибоспряженнях за методикою, описаною в [3], для задавання кривої використовується її аналітична або чисельна функція, за якими визначаються її похідні для наступного застосування при чисельному інтегруванні системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують процес тертя.

Як було відзначено, криві можуть мати різноманітну плоску або просторову форму. Причому, геометрія кривої може бути довільно просторовою як в напруженому, так і в ненапруженому стані в залежності від технологічного призначення і характеру діючих навантажень. Дослідження геометрії кривої у трибоспряженні вимагає особливого підходу. Описана в [3] математична модель передбачає завдання початкової (ненапруженої) геометричної конфігурації осьової лінії елемента як з точки зору визначення початкових умов опирання, так і з точки зору еволюції геометрії по довжині інтервалу  $0 \leq s \leq S$ . Таким чином, для завдання кривої необхідної просторової конфігурації досить визначити початкові умови, параметри кривизни і їх похідні, а також дільницю інтегрування, яка, з точки зору обчислювального процесу, може бути вибрана довільно на будь-якій ділянці параметрично заданої кривої. Найпростішою кривою на площині можна вважати коло, і завдання її геометрії не представляє складності в математичному плані.

Розглянемо загальний випадок задавання геометрії кривої. Нехай осьова лінія задана аналітичними рівняннями

$$x=f_1(s), y=f_2(s), z=f_3(s). \quad (1)$$

Довжина кривої визначається за формулою

$$S=f_s(x, y, z) = \text{const}. \quad (2)$$

Маючи в своєму розпорядженні співвідношення (1), можна обрахувати параметри кривизни  $p_0$ ,  $q_0$  криволінійного елемента в недеформованому стані.

Припустимо, що в початковому стані напрями осей рухомих тригранників  $(u, v, w)$  і  $(n, b, \tau)$  співпадають і кут між ними  $\chi=0$ . Тоді кривизна  $p_0$  у всіх точках кривої дорівнює нулю.

Кривизна  $q_0$  визначається з відомого співвідношення

$$q_0 = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \quad (3)$$

Крутіня  $r_0$  підраховується за формулою

$$r_0 = \frac{1}{(q_0)^2} \begin{vmatrix} x' y' z' \\ x'' y'' z'' \\ x''' y''' z''' \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Враховуючи, що  $z''=0$  і  $z'''=0$  і розкриваючи визначника (4), отримаємо

$$r_0 = \frac{1}{(q_0)^2} \frac{dz}{ds} \left( \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{d^2y}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3} \right). \quad (5)$$

Рівності (3)–(5) визначають геометрію кривої в недеформованому стані і дозволяють сформулювати систему розв'язальних рівнянь [3] з крайовими умовами при  $s=0$  і при  $s=S$ .

Варіаціями величин початкових функцій кривої, а також початковими умовами, можна описати необхідне просторове положення криволінійного елемента як ділянки кривої будь-якої довжини (рис. 1). Слід зазначити, що задавання кривої, наприклад, у вигляді кола не означає, що осьова лінія гнучкого елемента є повним колом. Це може бути дуга кола довільного радіуса аж до рівного нескінченності, при цьому ця ділянка дуги може розглядатися як пряма.

Таким чином, варіюючи величиною радіуса і кутом між точками опирання з вершиною в центрі кола, можна отримати необхідні розміри дуги (рис. 1). Цим же способом можна задати геометрію осьової лінії за допомогою будь-яких інших кривих, в тому числі і просторових. Приведені способи задавання геометрії кривих дозволяють зробити висновок, що за допомогою розроблених

методів представляється можливим дослідити елементи з довільною площею або просторовою конфігурацією осьової лінії.

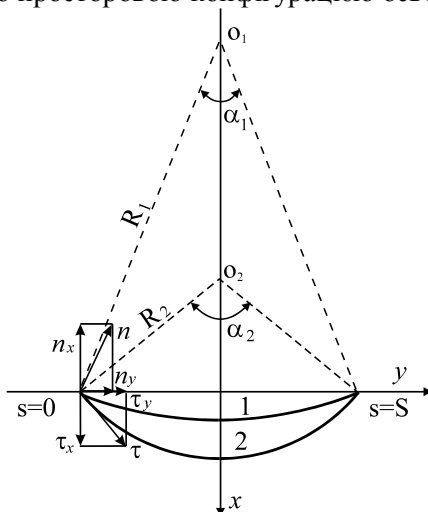


Рис. 1. Формування кривої необхідної кривизни

**Результати досліджень.** Із застосуванням запропонованої методики чисельним методом отримані деякі типи кривих, які можна використовувати при дослідженні механіки контактуючих поверхонь у трибоспряженнях (рис. 2).

Розглянуті способи задавання кривих описують «стандартні» криві, тобто ті, що описуються елементарними функціями. Однак в реальних умовах часто виникають випадки, коли ненапружена форма осьової лінії не може бути описана відомими з елементарної геометрії функціональними рівняннями. Можуть виникнути ситуації, коли геометрію осьової лінії гнучкого елемента неможливо задати функціонально ніяким з розглянутих вище способів, і крім того, розрахунок напружено-деформованого стану необхідно проводити оперативно, використовуючи обчислювальні комплекси. Для цього опишемо універсальний спосіб задавання геометрії осьової лінії гнучкого елемента.

Виходячи з розробленої і описаної вище методики, для задавання кривої необхідно знати закон зміни її геометрії по довжині  $S$ , тобто необхідні наступні початкові характеристики: кривизни  $p$ ,  $q$ ,  $r$  в ненапруженому стані і їх перші, другі і треті похідні.

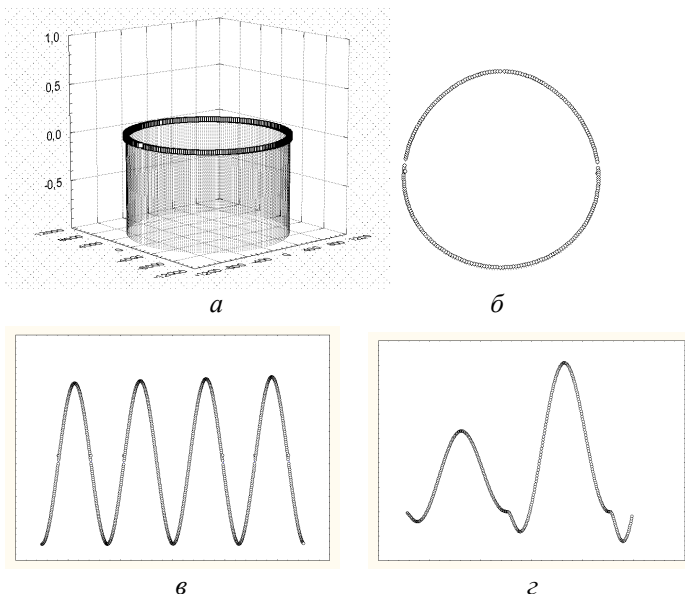


Рис. 2. Деякі типи кривих, що застосовуються при дослідженні контактуючих поверхонь трибоспряжень: *a* – коло; *б* – «деформована» коло; *в* – «хвиляста» крива; *г* – довільна геометрія плоскої кривої

Для їх встановлення розроблено і перевірено на практиці метод визначення геометрії кривої способом сканування. Опишемо стисло такий метод. Спочатку необхідно фотограмметричним способом внести образ осьової лінії елемента в пам'ять комп'ютера. Після отримання на екрані монітора образу кривої, використовуючи відомі математичні пакети прикладних програм (наприклад, Mathcad, Matlab тощо) можна отримати всі необхідні її характеристики і похідні. Враховуючи, що розроблена методика дослідження механіки трибоспряжень розрахована на роботу в середовищі, що програмується пакетом Фортран-77, необхідно використати інтерфейс спільного функціонування декількох програмних пакетів одночасно. Таким чином, при покроковому розв'язуванні задачі з програм Фортран-77 в необхідний на якомусь кроці дискретизації час проводиться виклик програми Mathcad, в якій вже обчислено і наявні всі необхідні дані параметрів кривизни. Після цього за допомогою спільного функціонування двох пакетів програм можливе задавання довільної

плоскої або просторової конфігурації подовжньої осі через криву, що не описується відомими елементарними функціями.

**Висновки.** Застосовуючи запропоновану методику, можна без значної перебудови обчислювальних алгоритмів міняти конфігурацію кривої, що належить досліджуваній опорній поверхні контактуючих поверхонь або інших елементів трибоспрямижень, на які діють навантаження, і в подальшому числовому розрахунку одержувати необхідні параметри напружено-деформованого стану. При деяких раптово виникаючих умовах навантаження (наприклад, при появі будь-якого навантаження, втраті стійкості, зміні жорсткості унаслідок зносу тощо) можна припинити розв'язання і після зміни певних параметрів задачі відновити його знову, починаючи з перерваного кроку. Простота використання, наочність, швидкість отримання результатів роблять методику зручною для використання в дослідженнях механіки контактуючих поверхонь в трибоспрямиженнях.

#### Список літератури

1. Крагельский И.В. Узлы трения машин: Справочник/ И.В.Крагельский, Н.М. Михин. –М.: Машиностроение, 1984. –280 с.
2. Владимиров В.И. Проблемы физики трения и изнашивания / В.И. Владимиров // Физика износостойкости поверхности металлов. Ленинград: ФТИ РАН, 1988. – С. 8–41.
3. Кравцов В.И. Управление деформированием гибкими пространственно искривленными элементами / В.И. Кравцов // Проблемы тертя та зношування. Наук.-техн. зб.–К.: НАУ. –2008. – Вип.50.–С. 113–121.

**Кравцов В.И., Садегі М.Д.-А. Геометрия кривых в исследовании механики контактирующих поверхностей трибоспрямижений // Проблемы тертя та зношування: наук.-техн. зб. – К.: НАУ, 2012. – Вип. 57. – С. 58–65.**

Описаны способы задания геометрии кривой при исследовании упругого деформирования контактирующих поверхностей трибоспрямижения. Предложенная методика может использоваться при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, описывающих деформирование поверхностей трибоспрямижений под действием произвольного вектора статических или квазистатических нагрузок.

Рис. 2, список лит.: 3 наим.

**Kravtsov V.I., Sadegi M.D.-A. Geometry of curves in research of mechanics of contacting surfaces of surfaces of friction**

Ways of the task of geometry of a curve are described at research elastic deformation of contacting surfaces of mutual friction. The offered procedure can be used at the numerical decision of the ordinary differential equations of the high order describing deformation of surfaces of friction under action of an any vector static or nearly so of static loads.

**Ключові слова:** трибоспряження, контактуюча поверхня, геометрія кривої, деформування, диференційні рівняння, напруження, навантаження, чисельні методи, комп'ютерна графіка.

**Ключевые слова:** трибоспряжение, контактирующая поверхность, геометрия кривой, деформирование, дифференциальные уравнения, напряжения, нагрузки, численные методы, компьютерная графика.

**Keywords:** a surface of the friction, a contacting surface, geometry of a curve, deformation, the differential equations, pressure, loads, numerical methods, computer the chart

Стаття надійшла до редакції 15.03.2012