

УДК 621.78(043.2)

В. І. КРАВЦОВ, А. М. САДЕГІДЖАЛАЛ

Національний авіаційний університет, Україна

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН, СТІЙКІСТЬ І ЗАКРИТИЧНА ПОВЕДІНКА ЕЛЕМЕНТІВ ТРИБОСПРЯЖЕННЯ У ЇХ ПРУЖНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

На базі сучасних методів обчислювальної математики й чисельного аналізу розроблена методика визначення напружено-деформованого стану, стійкості та закритичної поведінки елементів трибоспряження при просторовому пружному деформуванні. Для цього розроблена математична модель, яка описує рівновагу й деформування просторово скривленого елемента, його зовнішню й внутрішню геометрію. Методика чисельного розв'язку поставленої задачі заснована на спільному застосуванні методу продовження за параметром й методу Ньютона-Канторовича. Для оцінки достовірності розробленої методики було проведено експеримент з визначення напружено-деформованого стану, біфуркаційної втрати стійкості і закритичної поведінки пружного плоского кільця при його обертанні навколо свого діаметра.

Ключові слова: вузол тертя; пружність; деформування; стійкість; математична модель; чисельні методи; диференціальні рівняння; біфуркація; обчислювальна математика; експеримент; зусилля.

Вступ. Специфіка фрикційного контакту така, що при його аналізі доводиться мати справу з великою групою факторів, серед яких є дискретність контакту, різноманітність типів деформування нерівностей (навіть у межах однієї області контакту), неоднорідність властивостей матеріалів по поверхні й глибині, зміна цих властивостей у процесі тертя. Сучасна механіка твердого тіла намагається врахувати перераховані фактори при постановці й розв'язанні контактних задач, але, як правило, розглядається кожний фактор окремо. Крім того, при роботі трибоспряження можливі нестійкі процеси в кожному з елементів вузла тертя, які звичайно називають біфуркаційними. Вони пов'язані зі змінами аналітичних або геометричних властивостей системи, тобто – це стрибкоподібна поява нових можливостей системи, що відповідає поступовій зміні її параметрів [8]. Внаслідок різноманіття різних умов, що приводять до виникнення фрикційних біфуркаційних станів, з'явилися різні теорії їх виникнення. Так, М. Л. Кайдановський [4] причину виникнення фрикційних біфуркацій вбачав у наявності падаючої нелінійної залежності тертя від відносної швидкості ковзання; Ю. Ішлинський і І. В. Крагельський [3; 5] – у перевищенні сили тертя спокою над силою тертя ковзання. А. П. Амосов [1] зв'язав процес виникнення фрикційних автоколивань зі зміною характеристик тертя за рахунок теплових процесів при яких після зриву на етапі відносного ковзання (звичайно з великою швидкістю) відбувається розігрів поверхонь тертя й у більшості випадків зменшення коефіцієнта тертя.

При розв'язанні практичних задач трибологів цікавить дослідження стійких режимів ковзання вузлів тертя, умови, при яких ці режими тертя реалізуються [7]. Тому актуальним є створення такої моделі дослідження, яка дозволяла б максимально враховувати вплив якого-небудь із факторів (або одночасно декількох з них) на стійкість і закритичну поведінку елементів трибоспряження.

Напружений стан у зоні фактичного зіткнення тіл характеризується деформацією мікронерівностей, а також пружними або пластичними деформаціями

опорних поверхонь. Таким чином, елементи вузла тертя можна розглядати як деформовані, геометрично нелінійні тверді тіла [6]. При цьому геометрією опорної поверхні може бути як окружність, так і деяка інша форма кривої, наприклад, еліпс із незначним співвідношенням осей і т.п., яка виникла внаслідок зношування поверхонь тертя або обумовлена технологічними умовами, а геометрією нерівностей шорсткості – просторові об'ємні тіла невизначеної форми, які як правило апроксимують у найменшій наближенні як правильний конус [2; 5]. Такі задачі є геометрично нелінійними й вимагають особливого підходу.

Мета роботи. Аналітичні методи зараз не можна вважати алгоритмічними – постановка й розв'язок будь-якої нової задачі вимагає великих ускладнень у математичних обчисленнях, часових витрат. Тому найбільш перспективним у даному напрямку можна вважати застосування чисельних методів на базі сучасних методів обчислювальної математики й чисельного аналізу, що і є метою даної роботи. Результати, що отримані в процесі чисельного аналізу, можуть скласти основу прогнозування поведінки матеріалів при контактних взаємодіях і забезпечити надалі вдосконалення триботехнічних властивостей матеріалів.

Метод дослідження. Розглядається математична модель, яка описує рівновагу й деформування пружного елемента, його зовнішню й внутрішню геометрію. Опишемо коротко метод дослідження. Введемо природній тригранник $\bar{n}, \bar{b}, \bar{\tau}$ з одиничними ортами головної нормалі й дотичній; рухливий тригранник з ортами u, v, w . Позначимо вектори внутрішніх зусиль і моментів \bar{F}, \bar{M} ; кривизни відносно орт рухливого тригранника p, q, r ; координати x, y, z незалежної змінної s .

Представимо систему розв'язальних рівнянь, що описують деформування просторово скривленого елемента, у вигляді

$$x' = f(x, s, \lambda), \quad (1)$$

де $x(s) = (F_u(s), F_v(s), F_w(s), p(s), q(s), r(s), \tau_x(s), \tau_y(s), \tau_z(s), n_x(s),$

$n_y(s), n_z(s), b_x(s), b_y(s), b_z(s), x(s), y(s), z(s))^T$ – вектор стану ($m=18$), f – вектор-функція правих частин системи рівнянь; λ – параметр інтенсивності збурювання (навантаження), штрихом позначена похідна по s . Сформульована в такий спосіб в області $0 \leq s \leq S$ (S – довжина ділянки інтегрування) зміни незалежної змінної s система розв'язальних рівнянь (1) має загальний вісімнадцятий порядок. Наявність шести перших інтегралів

$$|\bar{\tau}| = 1, |\bar{n}| = 1, \bar{\tau}\bar{n} = 0, \bar{\tau} \times \bar{n} = \bar{b} \quad (2)$$

дозволяє зменшити її порядок до дванадцятого.

Методика розв'язку поставленої задачі заснована на спільному застосуванні методу продовження по параметру й методу Ньютона-Канторовича. На краю $s = 0$ інтервалу $0 \leq s \leq S$ зміни змінної s задано шість незалежних крайових умов $\varphi[\bar{x}(0)] = 0$ і шість, що впливають із перших інтегралів рівнянь, зв'язків $\bar{\theta}[\bar{x}(0)] = 0$. Для замикання системи рівнянь досить на краю $s = S$ задати шість незалежних крайових умов $\bar{\psi}[\bar{x}(s)] = 0$. У сформульованих крайових рівняннях $\bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{\psi}$ означають шестивимірні вектори-функції.

Нехай при деякому значенні $\lambda=\lambda^{(n)}$ відомий розв'язок $\bar{x}^{(n)}(S)$. Дамо мале збільшення $\delta\lambda^{(n)}$ параметра λ . Тоді відповідну йому варіацію $\delta\bar{x}^{(n)}(S)$ розв'язку $x^{(n)}(S)$ можна знайти з лінійного рівняння

$$\frac{d\delta\bar{x}^{(n)}}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x}^{(n)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \delta\lambda^{(n)}, \quad (3)$$

отриманого лінеаризацією системи розв'язальних рівнянь. Крайові рівняння для функції $\delta(x)^{(n)}$ формуються лінеаризацією початкових нелінійних крайових рівнянь

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x}^{(n)}(0), \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x}^{(n)}(0), \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \delta\bar{x}^{(n)}(S) = 0. \quad (4)$$

Для побудови $\delta\bar{x}^{(n)}(S)$ виберемо серед складових $\delta\bar{x}_i^{(n)}(S)$ ($i=1,2,3,\dots,18$) такі шість компонентів $\delta\bar{x}^{(n)}(S)$, будь-які значення яких $\delta_j^{(n)}(0)$ не змінюють перші два векторні рівняння системи (4). Перенумеруємо невідомі $\delta\bar{x}_i^{(n)}(s)$ ($i=1,2,3,\dots,18$) так, щоб індекс j приймав значення $j=1, 2, 3, \dots, 6$. Тоді розв'язок задачі (4) представимо у вигляді

$$\delta\bar{x}^{(n)}(s) = \bar{y}_\lambda \delta\lambda^{(n)} + Y(s) \delta\bar{c}^{(n)}, \quad (5)$$

де $\bar{y}_\lambda(s)$ – розв'язок задачі Коші для системи

$$\frac{d\bar{y}_\lambda}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{y}_\lambda + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \quad (6)$$

при нульових початкових умовах, $Y(s)$ – матриця розміру $m \times 6$ розв'язків системи

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} v \quad (7)$$

с початковими умовами $y_j(0) = (\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_6^j)$ ($j=1, 2, \dots, 6$) для незалежних змінних, для інших змінних – $y_i(0)$ ($i=7, \dots, 8, \dots, 18$). Вектор постійних $\delta c^{(n)} = \{\delta c_1^{(n)}, \delta c_2^{(n)}, \dots, \delta c_6^{(n)}\}$ підбирається з рівнянь

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} Y(S) \delta\bar{c}^{(n)} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \bar{y}_\lambda(S) \delta\lambda^{(n)}. \quad (8)$$

Якщо матриця $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} Y(S)$ у формулі (8) невиворджена, то при значенні $\lambda=\lambda^{(n)}$ можна знайти вектор $\delta c^{(n)}$, відповідний до обраного значення $\delta\lambda^{(n)}$, а потім варіації початкових умов $\delta x_i^{(n)}(0)$ ($i=1,2,\dots,18$), початкові умови $x_i^{(n+1)}(0) = x_i^{(n)}(0) + \delta x_i^{(n)}(0)$ при $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \delta\lambda^{(n)}$ й відповідний їм розв'язок $x^{(n+1)}(s)$. Стан, у яких визначник матриці $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} Y(S)$ звертається в нуль, є біфуркаційним. У ньому система втрачає стійкість.

Вибираючи стан $x^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}$ як породжуючий, варіацією параметра λ його можна продовжити на величину $\delta x^{(n+1)}$. Побудова матриць $Y(s)$ на кожному кроці варіювання параметра λ здійснюється методом Рунге-Кутта четвертого поряд-

ку. Для чисельної реалізації запропонованого підходу застосовується програмне середовище, розроблене при використанні стандартних підпрограм алгоритмічної мови Фортран-4.

Результати дослідження. Для оцінки розробленої методики був проведений експеримент з визначення напружено-деформованого стану, біфуркаційної втрати стійкості й закритичної поведінки пружного плоского кільця при його обертанні навколо свого діаметра.

Нехай кільце розташоване в площині xOy , жорстко закріплене й має можливість плавно збільшувати швидкість ω обертання навколо осі x (рис. 1).

Навантаження, які діють на кожний елемент кільця масою M при його обертанні у випадку, коли воно залишається плоским, визначаються силами інерції. При досягненні деякого критичного значення плоска форма кільця може виявитися нестійкою й воно набуде форми просторової кривої, для якої навантаження визначається наступними складовими:

$$f_x = 0, f_y = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 y, f_z = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 z,$$

$$f_x = 0, f_y = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 y, f_z = \frac{M}{2\pi - \alpha} \omega_x^2 z. \quad (9)$$

При послідовному збільшенні кутової швидкості були побудовані різноманіття станів рівноваги, у яких форма рівноваги залишалася плоскою й симетричною до осі обертання (рис. 2). Формою обертання при докритичній швидкості є куля (рис. 2, *a*). При збільшенні швидкості обертання після досягнення біфуркаційного стану кільце виходить з плоского стану й обертається з деяким просторовим вигином із площини (рис. 2, *б*, *в*).

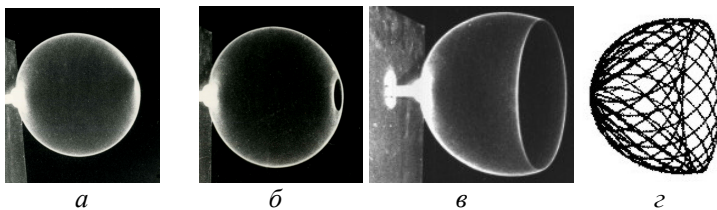


Рис. 2. Стійкі просторові форми обертання пружного кільця до (*a*) і після (*б-г*) втрати стабільності

На побудованому різноманітті виявлено біфуркаційний стан рівноваги (рис. 2, *б*), у якому матриця Якобі (8) виявилася від'ємною. Продовження розв'язків по гілці, яка виходить із біфуркаційної точки, дозволило побудувати стійке різноманіття станів із просторовими формами рівноваги, які залишаються симетричними до площини xOy , виходячи із площини, і віддаляються від неї зі збільшенням ω_x^2 . Одне з різноманіть показано на рис. 2, *в*. Усі розрахунки були виконані для кільця з наступними фізико-геометричними параметрами:

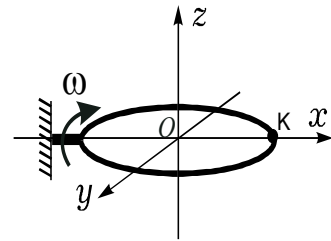


Рис. 1. Схема кільця, що обертається навколо осі x

$$R = 0,15\text{ м}; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = 7,84 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$I_x = 3126 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_z = 7342 \cdot 10^{11} \text{ м}^4; I_p = 4525 \cdot 10^{11} \text{ м}^4,$$

де R – радіус кільця; E – модуль пружності; G – модуль пружності при крутінні; I_x, I_y – моменти інерції; I_p – полярний момент інерції.

Дані експерименту повністю збіглися з даними чисельного розрахунку (рис. 2, з). На всіх етапах деформування обчислювалися координати точок, зусилля й моменти в перерізах. Приклад одержаних результатів у безрозмірних величинах наведено на рис. 3. Тут спостерігається відсутність зусилля F_u до певної швидкості обертання, але потім, у закритичному обертанні, воно з'являється й продовжує еволюціонувати.

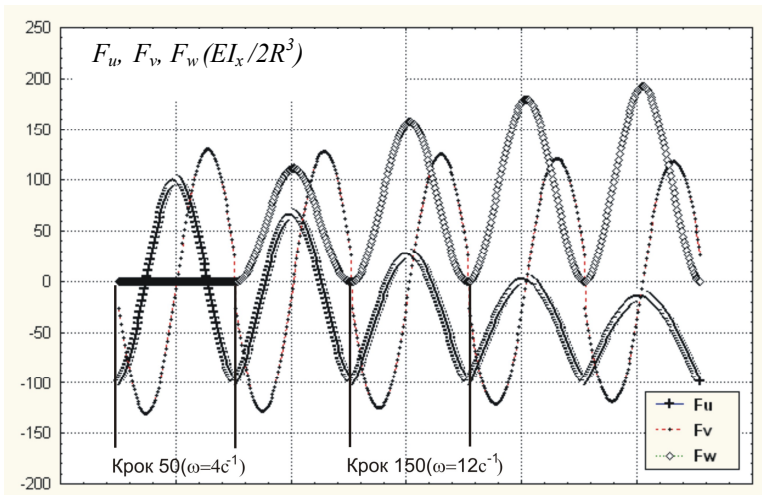


Рис. 3. Внутрішні зусилля у перерізах елемента в недеформованому стані (1-й крок інтегрування) і після втрати стійкості (150-й крок інтегрування)

Тут під кроком інтегрування мається на увазі дискретне збільшення швидкості обертання кільця. З рис. 3 видно, що на першому кроці інтегрування визначається тільки геометрія елемента (зусилля дорівнюють нулю), а на 150 кроці при накопиченому навантаженні з'явилися зусилля з явно вираженою нелінійністю.

Висновок. Розроблена методика чисельного дослідження напружено-деформованого стану й стійкості елементів трибоспряження може бути ефективною при аналізі й створенні нових типів вузлів тертя. Експериментальна перевірка методики показала її ефективність і можливість розв'язку великого класу задач у трибології. Її застосування дозволяє без значної перебудови обчислювальних алгоритмів міняти для довільної просторової кривизни елемента характер дії навантажень для кожної конкретної задачі, одержувати в зручному для користувача виді необхідні параметри напружено-деформованого стану. При раптовому додаванні навантаження, втраті стійкості, зміні жорсткості тощо можна припинити розв'язок і після зміни певних параметрів задачі відновити його знову, починаючи з перерваного кроку інтегрування. Простота використання, наочність, швидкість одержання результатів роблять методику зручною й ефективною для використання при розрахунках вузлів тертя.

Список літератури

1. Амосов А. П. Тепловая теория воспламенения : [учеб. пособ.] / А. П. Амосов. – Куйбышев : КПТИ, 1982. – 94 с.
2. Дерягин Б. В. Теория фрикционных автоколебаний с периодическими остановками / Б. В. Дерягин, В. Э. Пуш, Д. М. Толстой. – М. : Изд-во АН СССР, 1960. – 143 с.
3. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1987. 320 с.
4. Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении / Н. Л. Кайдановский. – СПб. : Питер, 1949. – 128 с.
5. Крагельский И. В. Узлы трения машин / И. В. Крагельский, Н. М. Михин. – М. : Машиностроение, 1984. – 280 с.
6. Мышкин Н. К. Трение. Смазка. Износ. Физические основы трибологии / Н. К. Мышкин, М. И. Петроковец. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 368 с.
7. Основы трибологии (трение, износ, смазка) / А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, Н. А. Буше и др. – М. : Машиностроение, 2001. – 664 с.
8. Bernardo D. Bifurcations : A Novel Mechanism for the Sudden Onset of Chaos in Dry-friction Oscillators / D. Bernardo, M. Kowalczyk, P. Nordmark, A. Sliding // Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2003. – Vol. 13. – № 10. – P. 2935–2948.

Стаття надійшла до редакції 12.06.2013

V. I. KRAVTSOV, A. M. SADEGIDZHALAL

MODE OF DEFORMATION, STABILITY AND OVERCRITICAL BEHAVIOR OF TRIBOLOGICAL UNITS UNDER ELASTIC DEFORMATION

Methods for determining the stressedly-deformed mode, stability and overcritical behavior of tribological units under spatial elastic deformation of their elements is worked out on the basis of modern methods of computational mathematics and numerical analysis. For this purpose a mathematical model describing the equilibrium and deformation of spatially curved element, its external and internal geometry is designed. The methods of numerical solution of the defined problem are based on the combined application of the method of continuation by a parameter and the method of Newton-Kantorovich. To assess the reliability of the developed methods an experiment to determine the stressedly-deformed mode, bifurcational stability loss and overcritical behavior of an elastic planar annulus by its rotating around its diameter was carried out.

Key words: tribological unit; elasticity; deformation; stability; mathematical model; numerical methods; differential equations; bifurcation; computational mathematics; experiment; forces.

Кравцов Віктор Іванович – д-р техн. наук, професор, професор кафедри машинознавства Національного авіаційного університету, akvarobotec@narod.ru

Садегіджалал Абаді Мехррад - аспірант кафедри машинознавства Національного авіаційного університету, akvarobotec@narod.ru