УДК 539.4

В. М. КІНДРАЧУК

Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ РУЙНУВАННЯ КРИХКОГО ПОРУВАТОГО СЕРЕДОВИЩА

Запропонована реологічна модель для анізотропного руйнування крихкого поруватого матеріалу. Досліджено проблему існування та єдиності розв'язку рівнянь і нерівностей моделі. Представлений алгоритм чисельного інтегрування реологічних співвідношень.

Ключові слова: *поруватість, мікротріщини, руйнування, умови Куна-Такера.*

Вступ. У бетоні в умовах ударного навантаження [1] або у кераміці підданій індентуванню [2] виникають складні напружено деформовані стани, котрі призводять до різних режимів руйнування. Під індентором чи ударником утворюється ущільнений, роздроблений матеріал (ядро), котрий з протилежного боку обмежений фронтом руйнування. Безпосередньо за межами ядра матеріал підлягає розтягуючим напруженням і розтріскуванню. Задача цієї публікації – запропонувати загальну реологічну модель, котра опише механічну поведінку матеріалу як у ядрі, так і за його межами. У цій роботі пропонується модифікація моделей запропонованих у роботах [1, 3], де ми розглядаємо еволюцію поруватості і утворення мікротріщин як два доповнюючих один одного механізми руйнування. Окрім того, на відміну від [1], ми розглядаємо анізотропну пошкоджуваність, що узгоджується з впливом мікротріщин на макроскопічні пружні характеристики крихкого матеріалу.

Ефективне напруження. Механіка суцільного середовища розглядає поруване середовище з мікротріщинами як гомогенний континуум. Для адаптації поняття руйнування для цього континууму застосовується певний принцип еквівалентності – зазвичай принцип еквівалентності деформації, який стверджує, що напруження $\boldsymbol{\sigma}$ викликає у гомогенному, пошкодженому матеріалі таку ж деформацію, яку викликає у непошкодженому матеріалі ефективне напруження $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Таким чином, усі реологічні співвідношення для непошкодженого матеріалу продовжують мати місце з точністю до заміни номінального напруження на ефективне. Найширше застосування знайшов взаємозв'язок між $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ та $\boldsymbol{\sigma}$ запропонований у роботах Качанова та Роботнова [4, 5]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(1-d\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

де скаляр d $(0 \le d < 1)$ характеризує міру ізотропної пошкоджуваності матеріалу. Зокрема $d \to 1$ відповідає стану цілком зруйнованого матеріалу. Для крихких матеріалів пошкоджуваність має анізотропну природу і макроскопічно може бути описана не скаляром, а тензором другого або четвертого рангу $\mathbf{D}$. Звертають увагу наступні моделі взаємозв'язку між $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ та $\boldsymbol{\sigma}$ для анізотропної пошкоджуваності:

Муракамі [6]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{1}-\mathbf{D}\right)^{-1} + \left(\mathbf{1}-\mathbf{D}\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right] \Big/ 2, \tag{2}$$

Ванга [7]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}\right)^{-1/2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}\right)^{-1/2}, \tag{3}$$

Бетена [8]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}\right)^{-1}, \tag{4}$$

а також Лематре [3], де девіатор тензору напружень перетворюється згідно з (3), а гідростатична складова – згідно з (1). У рівняннях (1) - (4) $\mathbf{1}$ є одичним тензором, а $\mathbf{D}$ є симетричним тензором другого рангу. Інші принципи еквівалентності та приклади моделей можна знайти у [9].

Реологічна модель.

Положення моделі. Ми розглядаємо два механізми руйнування у ізотропному матеріалі. Анізотропна пошкоджуваність асоціюється з утворенням мікротріщин. Ізотропна пошкоджуваність викликана наявністю та ростом пор. Ми нехтуємо пластичною деформацією і тому зволікаємо еволюцією поруватості викликаною пластичною течією. Таким чином, тензор пошкоджуваності $\mathbf{D}$ складається з доданку асоційованого з мікротріщинами $\mathbf{D}_{mcr}$ та доданку асоційованого з поруватістю $\mathbf{D}_{por}$. Останній має виключно шарову природу

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_{mcr} + \mathbf{D}_{por}, \\ \mathbf{D}_{por} &= d_{por} \cdot \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Непошкоджений матеріал має поруватість θ_0, тому для ізотропної пошкоджуваності ми покладаємо

$$d_{por} = \theta - \theta_0. \tag{6}$$

Згідно принципу еквівалентності деформації, закон Гука виконується для ефективного напруження

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\upsilon}{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\upsilon}{E}\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot 1. \tag{7}$$

У останньому рівнянні υ і E є коефіцієнтом Пуассона та модулем Юнга ізотропного, пористого, непошкодженого тіла ($\theta = \theta_0$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$), $\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ є слідом матриці ефективного напруження, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор пружної деформації, котрий за відсутності незворотної деформації покладається рівним тензору деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}\ . \tag{8}$$

Ми застосовуємо критерій Мацарса, згідно котрому поверхня руйнування визначається рівнянням

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}\ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) = \varepsilon^* - k(\mathrm{tr}\mathbf{D}) = 0, \tag{9}$$

де скаляр ε^* є ефективною деформацією і визначається позитивною компонентою головних деформацій $\varepsilon_i^{\mathrm{e}}$ тензору пружної деформації, $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\left\langle \varepsilon_i^{\mathrm{e}} \right\rangle_+\right)^2}, \\ \left\langle \varepsilon_i^{\mathrm{e}} \right\rangle_+ &= \begin{cases} \varepsilon_i^{\mathrm{e}}, if\ \varepsilon_i^{\mathrm{e}} > 0, \\ 0, if\ \varepsilon_i^{\mathrm{e}} \le 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

де $k(\mathrm{tr}\mathbf{D})$ – функція, що буде визначена нижче.

Закон руйнування. Для моделювання еволюція пошкоджуваності потрібні диференціальні рівняння котрі визначають закон для $\dot{\mathbf{D}}$. З (5) і (6) слідує очевидне рівняння

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}_{mcr} + \dot{\theta} \cdot \mathbf{1}. \tag{11}$$

Швидкість зміни поруватості пов'язана зі швидкістю об’ємної деформації [1]

$$\dot{\theta} = \theta\left(1-\theta\right) \cdot \mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{12}$$

Для написання еволюції пошкоджуваності викликаною мікротріщинами, ми виходимо з того, що мікротріщини відкриваються і ростуть перпендикулярно до напрямку найбільшого позитивного головного напруження. Емпірично ми покладаємо, що позитивна частина тензору деформації $\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \ \right\rangle_{+}$ визначає ріст мікротріщин

$$\dot{\mathbf{D}}_{mcr} = \dot{\mu}\left\langle \boldsymbol{\varepsilon} \ \right\rangle_{+}^{n}, \quad \dot{\mu} \geq 0. \tag{13}$$

Відзначимо, що цей закон течії, окрім того що має анізотропну природу, привносить також асиметрію на розтяг та на стиск. Остання дійсно спостерігається у крихких матеріалах, котрі менш стійкі до розтягуючих навантажень. Для прикладу, при розтягу (tension) та при стиску (compression) у напрямку x_1 елементи матриці $\mathbf{D}_{mcr}$, згідно з (13) , матимуть такий вигляд

$$\dot{\mathbf{D}}_{mcr}^{tension} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{D}}_{mcr}^{compression} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}, \quad d_{22} = d_{33}.$$

Невідомий множник $\dot{\mu}$ визначається з умов Куна-Такера

$$\dot{\mu} \geq 0, \ \ f(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) \leq 0, \ \ \dot{\mu} \cdot f(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) = 0, \tag{14}$$

котрі вказують, що пошкоджуваність акумулюється лише на поверхні руйнування, і залишається незмінною якщо ця поверхня не досягнута.

Інтегрування реологічних співвідношень. Ми розглядаємо інтервал часу $[t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ і припускаємо, що на момент t_1 ми знаємо усі величини проблеми і інкремент деформації $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Невідомим є напруження $\boldsymbol{\sigma}_2$ в момент t_2. Надалі індекси 1 та 2 позначають момент часу t_1 чи t_2, для котрого розглядається та чи інша величина. Перш ніж розвинути обчислювальну процедуру для знаходження напруження ми розглянемо питання існування та єдиності розв'язку. Якщо $f_1(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) < 0$, то згідно (13) і (14) $\dot{\mathbf{D}}_{mcr} = \mathbf{0}$ і ми маємо рівняння теорії пружності у поєднанні з еволюцією поруватості. У такому разі напруження однозначно визначається з деформації. Якщо ж $f_1(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) = 0$, то, оскільки $f_2(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) \leq 0$, слідує що $\Delta f(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) = f_2(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) - f_1(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) \leq 0$. Для такого випадку реологічні співвідношення (14) еквівалентні до

$$\dot{\mu} \geq 0, \ \ \dot{f}(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) \leq 0, \ \ \dot{\mu} \cdot \dot{f}(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D}) = 0. \tag{15}$$

Похідну $\dot{f}(\boldsymbol{\varepsilon} \ , \mathrm{tr}\mathbf{D})$ обчислюємо з (9)

$$\dot{f}(\boldsymbol{\varepsilon}\ ,\mathrm{tr}\mathbf{D}) = A - \dot{\mu}\cdot B,$$
$$A = \frac{\partial\varepsilon^*}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 3\frac{\partial k}{\partial\mathrm{tr}\mathbf{D}}\dot{\theta},\quad B = \frac{\partial k}{\partial\mathrm{tr}\mathbf{D}}\cdot\mathrm{tr}\left(\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\ \right\rangle_+^n\right). \tag{16}$$

Нескладно показати, що (15), а тому і (14), мають і причому єдиний розв'язок тоді і тільки тоді коли виконується нерівність $B > 0$. Остання дійсно має місце. Слід $\mathrm{tr}\left(\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\ \right\rangle_+^n\right) \geq 0$ за означенням $\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\ \right\rangle_+$, а $k(\mathrm{tr}\mathbf{D})$ ми можемо визначити як позитивну, диференційовану, монотонно зростаючу функцію, що автоматично означає виконання $\dfrac{\partial k}{\partial\mathrm{tr}\mathbf{D}} > 0$. Такі вимоги до функції $k(\mathrm{tr}\mathbf{D})$ мають фізичний сенс. Згідно з (9), ці вимоги означають, що з ростом пошкоджуваності також ростуть ефективні деформація й напруження. Ми пропонуємо наступну асимптотичну функцію для $k(\mathrm{tr}\mathbf{D})$

$$k(\mathrm{tr}\mathbf{D}) = \frac{a}{1 - b\cdot\mathrm{tr}\mathbf{D}},\ a > 0,\ b > 0,\ \mathrm{tr}\mathbf{D}\in[0;1/b). \tag{17}$$

Параметри a та b мають фізичний сенс. Неушкоджений матеріал починає руйнуватись коли $\varepsilon^* = a$, а повне руйнування настає коли $\mathrm{tr}\mathbf{D}\to 1/b$.

Довівши існування і єдність розв'язку реологічних співвідношень, ми можемо перейти до обчислювальної імплементації моделі. Для знаходження невідомого напруження $\boldsymbol{\sigma}_2$ у момент t_2 ми користуємось законом Гука (7), принципом еквівалентності деформації у вигляді (3) і рівнянням для пружної деформації (8)

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}_2\right)^{-1/2}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\left(\mathbf{1} - \mathbf{D}_2\right)^{-1/2},\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \dfrac{1+\upsilon}{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 - \dfrac{\upsilon}{E}\mathrm{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2\cdot\mathbf{1},\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}.\end{cases} \tag{18}$$

Невідомим у (18) залишається тензор пошкоджуваності $\mathbf{D}_2$. Для його знаходження ми пропонуємо схему предиктор-коректор. Ми обчислюємо предиктор $f_2^* := f(\boldsymbol{\varepsilon}\ ,\mathrm{tr}\mathbf{D}_2)$ припускаючи, що $\dot{\mathbf{D}}_{mcr} = \mathbf{0}$ ($\dot{\mu} = 0$). Це припущення виконується якщо $f_2^* < 0$. У такому разі $\mathbf{D}_2$ отримується напряму з системи рівнянь з невідомими θ_2 та $\mathbf{D}_2$

$$\begin{cases}\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + \left(\theta_2 - \theta_1\right)\cdot\mathbf{1},\\ \theta_2 - \theta_1 = \theta_2\left(1 - \theta_2\right)\cdot\mathrm{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}.\end{cases} \tag{19}$$

Якщо ж $f_2^* \geq 0$, то $\dot{\mathbf{D}}_{mcr} = \dot{\mu}\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\ \right\rangle_+^n$ з $\dot{\mu} > 0$, що означає руйнування матеріалу шляхом анізотропного розтріскування. У такому разі, згідно умовам Куна-Такера, ми маємо розв'язати рівняння $f_2\ = f(\boldsymbol{\varepsilon}\ ,\mathrm{tr}\mathbf{D}_2) = 0$. Цей крок називається коректор

$$\begin{cases} \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + \Delta t \cdot \dot{\mu} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle_+^n + (\theta_2 - \theta_1) \cdot \mathbf{1}, \\ \varepsilon_2 * - k(\mathrm{tr}\mathbf{D}_2) = 0, \\ \theta_2 - \theta_1 = \theta_2 (1 - \theta_2) \cdot \mathrm{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}. \end{cases} \tag{20}$$

Покроковий алгоритм обчислювальної процедури представлений у таблиці.

Таблиця

Алгоритм знаходження напруження з деформації для моделі руйнування крихкого середовища

Крок	Дія
1	$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
2	Знайти $\mathbf{D}_2$ з (19)
3	$f_2^* := f(\boldsymbol{\varepsilon}\ , \mathrm{tr}\mathbf{D}_2) = \varepsilon_2 * - k(\mathrm{tr}\mathbf{D}_2)$
4	Якщо $f_2^* < 0$, то йти до кроку «6»
5	Якщо $f_2^* \geq 0$, то знайти $\mathbf{D}_2$ з (20)
6	Знайти $\boldsymbol{\sigma}_2$ з (18)

Закривання мікро дефектів. Рівняння (12) встановлює закон для розкривання і закривання пор через гідростатичний стиск. Для врахування закриття мікротріщин ми можемо модифікувати співвідношення між напруженнями $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ та $\boldsymbol{\sigma}$, і замість (3) користуватись наступним рівнянням

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \left(\mathbf{1} - \eta \cdot \mathbf{D}_{mcr} - \mathbf{D}_{por}\right)^{-1/2} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \cdot \left(\mathbf{1} - \eta \cdot \mathbf{D}_{mcr} - \mathbf{D}_{por}\right)^{-1/2} + \\ + \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}_{mcr} - \mathbf{D}_{por}\right)^{-1/2} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{D}_{mcr} - \mathbf{D}_{por}\right)^{-1/2}, \ 0 \leq \eta \leq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Тут $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+$ додатна, а $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+$ - від'ємна компоненти тензору напружень $\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+$. Це рівняння вказує на те, що від'ємна і додатня компоненти перетворюються по різному, використовуючи тензор руйнування $\eta \cdot \mathbf{D}_{mcr}$ та $\mathbf{D}_{mcr}$. Значення $\eta = 0$ відповідає повному закриттю мікротріщин.

Висновки. Запропонована реологічна модель для анізотропного руйнування пористого, крихкого матеріалу. Руйнування моделюється шляхом урахування механізму утворення і росту мікротріщин (анізотропне руйнування) та пор (ізотропне руйнування). Розглянуто питання існування та єдиності розв'язку для реологічних співвідношень моделі. Також запропонований алгоритм для знаходження чисельного розв'язку проблеми.

Подальший розвиток моделі може розглядати роздроблення матеріалу зсувними напруженнями, що можна спостерігати у експериментах індентування крихких матеріалів. Для моделювання незворотної деформації викликаної роздробленням передбачається застосування реологічних моделей розвинутих для пористих та порошкових матеріалів. Це також дозволить прогнозувати вплив міри роздроблення на еволюцію поруватості.

Список літератури

1. *Burlion N., Gatuingt F., Pijaudier-Cabot G., Daudeville L.* Compaction and tensile damage in concrete: constitutive modelling and application to dynamics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2000. - №183. – P. 291 – 308.

2. *Галанов Б.* Аналитическая модель индентирования хрупких материалов / *Б. Галанов, О. Григорьев //* Электронная микроскопия и прочность материалов. – Киев, 2006. – №13. – С. 191.

3. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. – Springer, 2005. – P. 404.

4. *Качанов Л.* О времени разрушения в условиях ползучести / Качанов Л. // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. - №8. – С. 26 – 34.

5. *Rabotnov Y.* Creep rupture // Proc. Appl. Mech. Conf. – 1968. – P. 342 – 349.

6. *Murakami S.* Mechanical modeling of material damage // J. Appl. Mech. – 1988. - №55. – P. 280 -286.

7. *Chow L. and Wang J.* An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics // Int. J. Fract. – 1987. - №33. – P. 3 – 16.

8. *Betten J.* Net-stress analysis in creep mechanics // Ingenieur-Archiv. – 1982. – №52. – P. 405 – 419.

9. *Murakami S.* Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture – Springer, 2012. – P. 402.

Стаття надійшла до редакції 15.03.2013

V. M. KINDRACHUK

MODELING OF BRITTLE DAMAGE IN POROUS MEDIUM

A constitutive model is proposed for failure of brittle materials. The anisotropic damage is introduced by a tensor of second rang. The deviatoric part corresponds to damage induced by microcracks and the hydrostatic one is associated with porosity evolution. The closure of microdefects in compression-like loadings is taken into account too. The model is implemented using the corrector-predictor technique. Existence of the unique solution has been proven.

Key words: porosity, microcracks, damage evolution, Kuhn-Tucker conditions.

Кіндрачук Віталій Мирославович – канд. техн. наук, докторант Інституту проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України, vkindrachuk@web.de.